

УДК 532.5 + 523.9

МОДЕЛЮВАННЯ УТВОРЕННЯ АСТЕРОЇДІВ У ПЛАНЕТАРНОМУ ВИХОРИ ТА РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ЇХ ОРБІТ

Л. В. Ключинська, В. І. Перехрест

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, просп.
Гагаріна, 72, кафедра диференціальних рівнянь, Дніпропетровськ, 49010, t-mail:
prokhrest@i.ua*

Розглянуто теорію планетарного вихору як початкового стану утворення зіркових систем до вивчення умов утворення астероїдів та розрахунку параметрів їх орбіт. У застосуванні теорії до Головного астероїдного поясу Сонячної системи отримано збіг теоретичних та експериментальних даних.

Ключові слова: астероїди, астероїдні пояси, параметри орбіт астероїдів, планетарний вихор.

1. Астероїдні групи і пояси в Сонячній системі

Астероїди та комети являють собою малі тіла, що знаходяться у великій зоні тяжіння Сонця і рухаються по еліптичних траєкторіях з різноманітними параметрами. Вони надзвичайно поширені в Сонячній системі. На відміну від великих планет, які рухаються по майже колових орбітах та у площинах, слабо нахилених до площини екліптики, ексцентриситети та кути нахилу площин астероїдів значно більші: середній ексцентриситет становить 0,14, а середній нахил їх площин $9,7^\circ$ [1]. Уся Сонячна система густо заповнена астероїдами, але у її середній частині існує кілька великих щільних груп астероїдів: Головний пояс з відстанями $a = 2,0 - 3,5$ а.о.; група Хільди ($a = 3,98$ а.о.), група Троянці ($a = 5,2$ а.о.) та протяжний зовнішній астероїдний пояс Койпера.

Відомо, що астероїди масово утворювалися з пилу та газів туманності на ранньому етапі формування Сонячної системи, потім деякі з них шляхом співударянь та злипання виростили у планети, планетоїди та супутники планет, а частина й досі має параметри малих тіл з розмірами від 1 м до 1 км. Найбільші астероїди, названі планетоїдами, мають значні розміри, їх діаметри становлять: Церери — 700 км, Еріді — 2320 км, Седни — 1500 км. Два останні разом з десятком інших (Орк, Іксіон, Куаоар, Варуна, Харон, Хаумеа і т.д.) знаходяться у зовнішньому астероїдному поясі Койпера, який лежить за межами Плутона ($a = 40$ а.о.) і простягається до 100 а.о. Більше половини цих тіл відкрито тільки в ХХІ ст.

Хоч більшість періодичних астероїдів у зонах ближніх та середніх планет Сонячної системи добре вивчені й описані [2], астрономи часто спостерігають непередбачувані тіла, які рухаються по складних траєкторіях під впливом Сонця та кількох сусідніх планет і становлять загрозу зіткнення з планетами, зокрема із Землею. Це, наприклад, астероїд 3753 та астероїди груп Амура, Атона й Аполлона. Геологічна та біологічна історія Землі переконливо свідчать про кілька катастрофічних зіткнень Землі з великими астероїдами, які спричинили різючі зміни у її геології, флорі й фауні. Тому вивчення астероїдів, а також створення теорії їх руху були і є актуальними завданнями учених–астрономів протягом останніх століть. На основі класифікації й аналізу експериментальних даних параметрів еліптичних орбіт астероїдів у проміжках між планетами середнього ряду Венера–Юпітер [2] можна зробити кілька висновків про закономірності їх розподілу, що суттєво для формування теорії астероїдних поясів. Зокрема, було зроблено 2 вибірки астероїдів Головного поясу (перша — 62 одиниці, друга — 1055 одиниць) [2], розташованих у порядку збільшення їх перигеліїв. За відповідними таблицями побудовано діаграми розподілу їх ексцентриситетів (рис. 1) та нахилу орбіт (рис. 2). Оскільки дані демонструють великі розкиди, їх було інтерпольовано поліномами 6-го степеня (відповідні лінії зображено на рис. 1, 2).

Перше, що потрібно відзначити: графіки цих розподілів, очевидно, корелюють між собою з якістю пропорційності — орбіти з більшими ексцентриситетами мають і більші нахили своїх площин до площини екліптики.

По-друге, Головний пояс астероїдів охоплює 2 проміжки між трьома первинними планетами — Марсом, Церерою і Юпітером, яким у планетарному вихорі відповідають 3 сусідні вихрові кільця. Астероїдні ж групи між іншими планетами утворилися в проміжку між двома сусідніми кільцями–планетами. Тому й розподіл параметрів орбіт астероїдів у Головному поясі має дві виразні хвилі колювань (рис. 1), а, наприклад, у міжпланетній зоні Земля–Марс — одну хвилю (рис. 2).

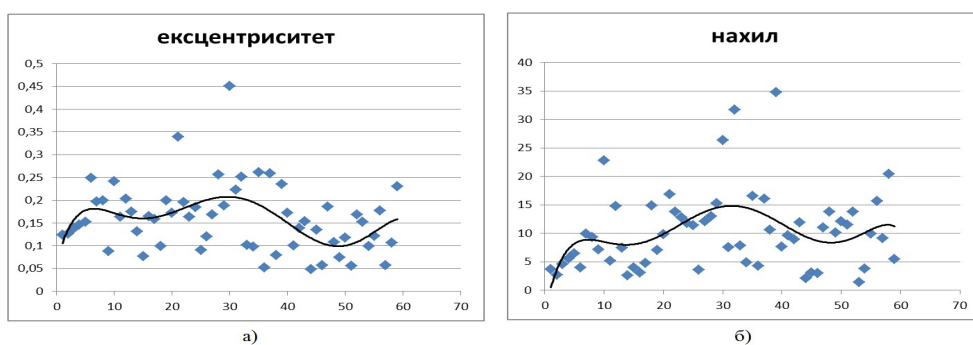


Рис. 1: Ексцентриситети:

а) — астероїдів Головного поясу; б) — кути нахилу орбіт як функції їх перигеліїв

Ще одна особливість експериментального розподілу параметрів астероїдів — це їх великий розкид як результат численних зіткнень у початковий період формування Сонячної системи й тривалої еволюції малих тіл за їх суттєвих гравітаційних та резонансних взаємодій між собою та з великими сусідніми планетами. Тому годі чекати поелементного збігу теоретичних параметрів руху, які будуть неперервними функціями своїх змінних, з даними експериментальних таблиць. За таких умов найбільш коректним буде порівняння середніх величин цих параметрів по групах чи поясах астероїдів, що ми й будемо робити далі. Цей підхід відображено у структурі табл. 2, у якій наведено середні значення основних параметрів груп і поясів астероїдів у міжпланетних зонах перших шести планет.

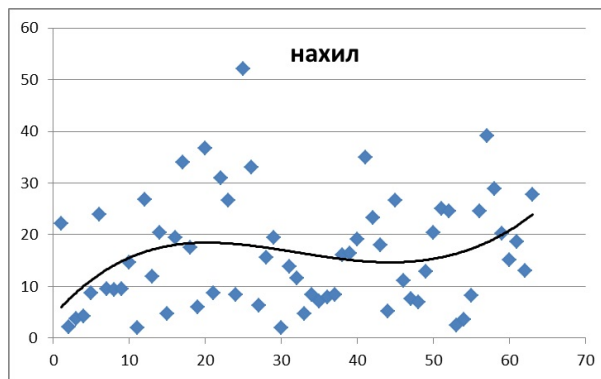


Рис. 2: Нахили орбіт астероїдів зони Земля – Марс

Далі у нашій статті теорію планетарного вихору [3] застосуємо до створення теоретичних основ розрахунку і дослідження параметрів руху астероїдів.

2. Загальні співвідношення теорії планетарного вихору

Планетарним вихором називають окремих точний розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихроутворень [3]. Вихрову течію будують за допомогою отриманої у [2] функції течії:

$$\Psi = C_2 \Phi(y) \sin^2 \theta, \quad \Phi(y) = \alpha y^2 + \left(\cos y - \frac{\sin y}{y} \right), \quad (2.1)$$

де r , θ , φ — сферичні координати; $y = C_0 r$ — безрозмірний радіус; C_0 , C_2 , α — параметри. Відповідне поле швидкостей знайдемо у вигляді (див. [4])

$$V_r = -2B \frac{\Phi(y)}{y^2} \cos \theta, \quad V_\theta = B \frac{\Phi'(y)}{y} \sin \theta, \quad V_\varphi = B \frac{\Phi(y)}{y} \sin \theta, \quad (2.2)$$

де $B = C_2 C_0^2$ — розмірний параметр швидкості (м/с).

Розв'язок (2.1)–(2.2) описує складну систему осесиметричних тороїдних вихорів, центральна частина (n) яких знаходяться у замкнутих непроникних

сферах, а зовнішні (m) вільно висять у просторі і їх обтікають незамкнуті лінії течії. Цю систему називають планетарним вихором структури (n, m) (рис. 1). Центри (центральні кола) зовнішніх тороїдних вихрових кілець лежать у екваторіальній площині й разом зі своїми кільцями обертаються у один бік, як і всі планетні системи зірок. Нижче буде розглянуто вихор структури $(2, 11)$, що наближено моделює Сонячну систему і має параметри, наведені у табл. 1.

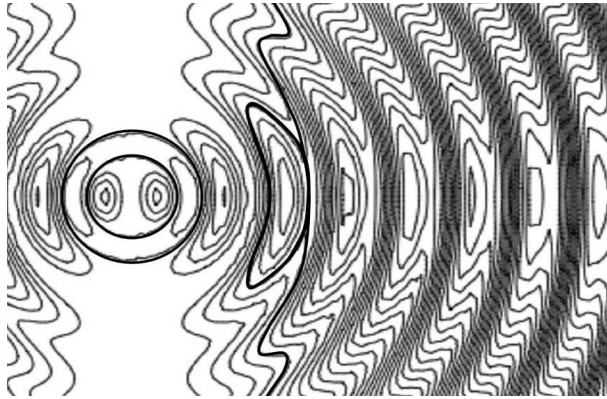


Рис. 3: Загальний вигляд планетарного вихору структури $(2, 11)$; (напівжирною лінією виділено сепаратрису, яка виокремлює вихрове кільце)

У попередніх наших роботах [5, 7] основну увагу було приділено руху і еволюції тіл — зародків планет, що утворювалися на центральних колах вихрових кілець і акумулювали сконденсовані маси цих кілець. Логічно буде припустити, що осесиметрична структура первинного вихору під дією осесиметричної сили тяжіння не зруйнується і не перейде в несиметричну.

Усі точки первинного кола з радіусом y^* мають однаковий кутовий момент I^* , якому в полі тяжіння зірки M відповідає сталий радіус R^* , тобто коло. В областях вихрових кілець частинки рухаються по спіралях, навитих на тори. Такі тори є поверхнями з однаковим кутовим моментом і за подальшої еволюції їх захоплює центральне тіло планети [7]. Тому перехідний процес еволюції первинної осьової симетрії переводить первинну симетричну систему кіл у нову, також симетричну за законом планетних відстаней [4]. Це саме можна стверджувати щодо частинок вихору, які рухалися по наскрізних спіральних траєкторіях і в площині $\theta = \pi/2$ лежали на колі певного радіуса r з однаковими параметрами руху. Вони перейдуть на однакові еліптичні траєкторії, але якщо такі траєкторії пустити з кожної точки цього кола, то відповідна сім'я буде також осесиметрична. Справа в тому, що лише один або кілька зародків на цьому колі виростають у астероїд і тому остаточно вказана симетрія ніби порушується. Але рух по колах відбувається лише у центрах кілець та у точках самоперетину сепаратрис (рис. 3); астероїди ж утворюються у проміжках між вихровими кільцями, де лінії течії наскрізні (рис. 3). Цим зонам відповідають затемнені смуги згущень ліній течії.

У горизонтальній площині $\theta = \pi/2$ у цих проміжках відповідні частинки мають крім колової швидкості V_φ ще й суттєву меридіональну складову V_θ , що змінює суто коловий рух частинок на еліптичний.

3. Визначення ексцентриситетів орбіт астероїдів

На другому етапі утворення планетної системи зірки, коли сама зірка вже існує, а в області вихору утворилися сконденсовані й акреційовані маси, відбувається захоплення рухомих частинок силою тяжіння зірки. За положенням цього захоплення доцільно визначити найближче до зірки положення частинки у горизонтальній площині вихору $\theta = \pi/2$. Припускаємо, що такі частинки рухаються, як частинки вихрової течії з швидкостями (2.2).

За формулами небесної механіки [6], коли в полі тяжіння тіла масою M на відстані r від нього тіло m має швидкість V , перпендикулярну до радіуса, воно буде рухатися по орбіті одного з конічних перерізів з ексцентриситетом

$$e = |1 - 2\delta|, \quad (3.1)$$

де

$$\delta = \frac{V^2 r}{2\mu} \quad \text{або} \quad 2\delta = \frac{V^2 r}{\mu}, \quad (3.2)$$

$\mu = GM$ — масова характеристика зірки; G — універсальна гравітаційна стала.

При цьому точка захоплення стає перигелієм або апогелієм еліптичної орбіти залежно від знака величини $(1 - 2\delta)$, точніше, за умови $V^2 r < \mu$ маємо апогелій, а за $V^2 r > \mu$ — перигелій. Швидкість у вихорі зростає з радіусом (рис. 3); тому якщо відповідно до [6] припустити, що точка рівноваги вихору, у якій $V^2 r = \mu$, знаходиться в околі Церери (5-те кільце), то початкова точка буде апогелієм для орбіт усіх астероїдів від Меркурія до Церери і перигелієм для астероїдних зон Юпітера та інших планет. Ця закономірність у цілому виконується: навколосемні астероїди груп Атона й Аполлона мають свої апогелії між Землею і Марсом.

Розглянемо первинний стан вихору, у центрі якого знаходиться маса M і для рухомих частинок вихору має місце ефект захоплення їх гравітацією зірки. У планетарному вихорі в горизонтальній площині $\theta = \pi/2$ за (2.2)

$$V_r = 0, \quad V_\theta = B \frac{\Phi'(y)}{y}, \quad V_\varphi = B \frac{\Phi(y)}{y}, \quad (3.3)$$

тому повна швидкість дорівнює

$$V = \frac{B}{y} \sqrt{\Phi^2 + \Phi'^2}; \quad (3.4)$$

її залежність від радіуса зображено далі (рис. 4), причому $V \perp r$, як покладено в основу формул (3.1), (3.2).

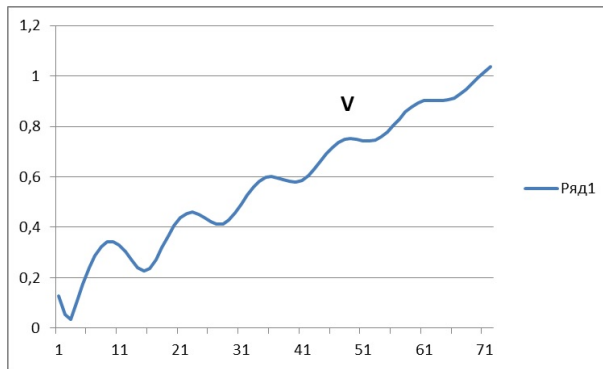


Рис. 4: Модуль швидкості у вихорі в горизонтальній площині як функція радіуса

Врахуємо, що $B = \beta C_0$, де $\beta = C_0 C_2$ — параметр кутового момента і позначимо

$$k_\mu = \frac{\beta^2 C_0}{\mu}. \quad (3.5)$$

Таблиця 1: Геометричні параметри кілець вихору структури (2, 11)

№ кільця	y_1	y^*	y_2	θ^* рад.
1-Сфера	0	2,790261	4,638225	0
2-Сфера	4,638225	6,034193	7,359705	0
3 (1)	7,364163	9,442798	12,322191	0,053788
4 (2)	14,054792	15,854359	18,549720	0,773685
5 (3)	20,651323	22,242096	24,761679	1,025749
6 (4)	27,209576	28,623985	30,965688	1,176713
7 (5)	33,749232	35,005535	37,163518	1,278034
8 (6)	40,281229	41,389783	43,355026	1,351129
9 (7)	46,813972	47,779428	49,538901	1,406816
10 (8)	53,356269	54,177900	55,712465	1,451239
11 (9)	59,92070	60,590865	61,870496	1,488292
12 (10)	66,532530	67,030608	68,000987	1,520926
13 (11)	73,283037	73,542814	74,058441	1,552969

Обчислимо величину 2δ за (3.2) і (3.4) і подамо її у вигляді

$$2\delta = k_\mu \left(\frac{\Phi^2(y)}{y} + \frac{\Phi'^2(y)}{y} \right) = k_\mu \frac{\Phi^2(y)}{y} \left(1 + \left(\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \right)^2 \right). \quad (3.6)$$

Оскільки особливі точки y^* (центри кілець) та y_2 (вузли сепаратрис) рухаються по колах радіусами y^* та y_2 , для яких $\Phi'(y_2) = \Phi'(y^*) = 0$ і $e = 0$ або

$2\delta = 1$, то з (3.6) маємо

$$k_\mu \frac{\Phi^2(y^*)}{y^*} = k_\mu \frac{\Phi^2(y_2)}{y_2} = 1. \quad (3.7)$$

Нехай коло y^* є рівноважним колом у полі тяжіння зірки. Існування такого кола доведено в праці [5]. Тоді у формулах (3.6), (3.7) треба покласти

$$Y^* = y^*, \quad y = y^* + \Delta y. \quad (3.8)$$

Розкладемо функцію (3.6) у ряд Тейлора у околі точки $y = y^*$. Для цього обчислимо похідні складових функцій $f(y) \equiv \Phi^2(y)/y$ та $g(y) \equiv \Phi'^2(y)/y$:

$$f_1(y) \equiv \left(\frac{\Phi^2}{y}\right)' = \frac{2\Phi\Phi'}{y} - \frac{\Phi^2}{y^2}, \quad (3.9)$$

$$g_1(y) \equiv \left(\frac{\Phi'^2}{y}\right)' = \frac{2\Phi'\Phi''}{y} - \frac{\Phi'^2}{y^2}, \quad (3.10)$$

$$f_2(y) \equiv \left(\frac{\Phi^2}{y}\right)'' = \frac{2}{y}(\Phi'^2 + \Phi\Phi'') - \frac{4\Phi\Phi'}{y^2} + \frac{2\Phi^2}{y^3}, \quad (3.11)$$

$$g_2(y) \equiv \left(\frac{\Phi'^2}{y}\right)'' = \frac{2}{y}(\Phi''^2 + \Phi'\Phi''') - \frac{4\Phi'\Phi''}{y^2} + \frac{2\Phi'^2}{y^3}, \quad (3.12)$$

$$f_3(y) \equiv \left(\frac{\Phi^2}{y}\right)^{(3)} = \frac{2}{y}(3\Phi'\Phi'' + \Phi\Phi''') - \frac{6}{y^2}(\Phi'^2 + \Phi\Phi'') + \frac{12\Phi\Phi'}{y^3} - \frac{6}{y^4}\Phi^2, \quad (3.13)$$

$$g_3(y) \equiv \left(\frac{\Phi'^2}{y}\right)^{(3)} = \frac{2}{y}(3\Phi''\Phi''' + \Phi'\Phi^{(4)}) - \frac{6}{y^2}(\Phi''^2 + \Phi'\Phi''') + \frac{12\Phi'\Phi''}{y^3} - \frac{6\Phi'^2}{y^4}. \quad (3.14)$$

У формулах (3.9)–(3.14) виразимо вищі похідні через функцію $\Phi(y)$ за допомогою диференціального рівняння, яке вона задовольняє:

$$\Phi'' = \left(\frac{2}{y^2} - 1\right)\Phi + \alpha y^2 = \Phi \left[\frac{2}{y^2} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + u(y)} - 1\right)\right] = w(y)\Phi(y), \quad (3.15)$$

де функції $u(y)$ та $w(y)$ задано формулами

$$u(y) = \frac{1}{y^2} \left(\cos y - \frac{\sin y}{y}\right), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = 0, \quad (3.16)$$

$$w(y) = \frac{2}{y^2} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + u(y)} - 1\right), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} w(y) = 0. \quad (3.17)$$

З (3.15) диференціюванням знаходимо

$$\begin{aligned}\Phi''' &= w'\Phi + w\Phi', & \Phi'''(y^*) &= w'\Phi(y^*) \\ \Phi^{(4)} &= w''\Phi + 2w'\Phi' + w^2\Phi, & \Phi^{(4)}(y^*) &= (w'' + w^2)\Phi(y^*)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Остаточно підрахуємо значення всіх похідних (3.9)–(3.14) за умови, що $y = y^*$, $\Phi'(y^*) = 0$ з урахуванням (3.15), (3.18). Маємо

$$\begin{aligned}f_1(y^*) &= -\frac{\Phi^2(y^*)}{y^{*2}}, & g_1(y^*) &= 0, \\ f_2(y^*) &= \frac{2\Phi^2(y^*)}{y^*} \left(w + \frac{1}{y^{*2}} \right), & g_2(y^*) &= \frac{2\Phi^2(y^*)}{y^*} w^2, \\ f_3(y^*) &= \frac{6\Phi^2(y^*)}{y^*} \left(\frac{w'}{3} - \frac{w}{y^*} - \frac{1}{y^{*3}} \right), & g_3(y^*) &= \frac{6\Phi^2(y^*)}{y^*} \left(ww' - \frac{w^2}{y^*} \right).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Нарешті, запишемо розвинення функції (3.6) у ряд Тейлора з урахуванням чотирьох членів:

$$2\delta = k_\mu \left[\frac{\Phi^2(y^*)}{y^*} + (f_1(y^*) + g_1(y^*))\Delta y + \frac{1}{2!}(f_2(y^*) + g_2(y^*))\Delta y^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3!}(f_3(y^*) + g_3(y^*))\Delta y^3 + O(\Delta y^4), \right] \quad (3.20)$$

де $\Delta y = y - y^*$. Далі з урахуванням (3.20) винесемо спільний множник $\Phi^2(y^*)/y^*$ і застосуємо умову (3.7). Так отримаємо

$$\begin{aligned}2\delta &= 1 - \frac{\Delta y}{y^*} + \left(\frac{1}{y^{*2}} + w(y^*) + w^2(y^*) \right) \Delta y^2 + \\ &\quad + \left(ww' + \frac{w'}{3} - \frac{w + w^2}{y^*} - \frac{1}{y^{*3}} \right) \Delta y^3.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Звідси за формулою (3.1) для ексцентриситету маємо

$$e = |k_1\Delta y - k_2\Delta y^2 - k_3\Delta y^3|, \quad (3.22)$$

де

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{1}{y^*}, & k_2 &= \frac{1}{y^{*2}} + w(y^*) + w^2(y^*), \\ k_3 &= ww' + \frac{w'}{3} - \frac{w + w^2}{y^*} - \frac{1}{y^{*3}}\end{aligned}\quad (3.23)$$

— коефіцієнти, обчислювані в центрах y^* вихрових кілець або у вузлах y_2 сепаратрис. Похідну w' можна за (3.17) остаточно виразити у вигляді

$$w' = \frac{1}{y^{*3}} \left[\frac{4u}{\alpha + u} + \frac{2\alpha}{(\alpha + u)^2} \left(3u + \frac{\sin y^*}{y^*} \right) \right] \quad (3.24)$$

і разом з (3.21) застосувати до обчислення коефіцієнтів (3.23).

Із (3.22) випливає, що $e = 0$ за умови, що $\Delta y = 0$. Тобто планети, які утворюються на центральних колах вихрових кілець, мають колові орбіти, що відповідає дійсності.

У першому наближенні $e \approx \Delta y / y^*$, звідки робимо висновок, що астероїди в зонах ближніх планет (Венери, Землі, Марса) мають більші ексцентриситети, ніж у околах дальніх. Ця закономірність справді має місце, що видно з табл. 2, у якій порівняно теоретичні значення ексцентриситетів (3.22) з реальними.

За формулами (3.22)–(3.24) було проведено обчислення ексцентриситетів астероїдів зони Головного поясу, якому у вихорі відповідає проміжок радіусів, виділений жирним шрифтом у табл. 1, — це $30,9656885 \leq y \leq 40,2812291$. При цьому центр 5-го кільця, що відповідає Церері, має радіус $y_5^* = 35,00553$. Обчислення здійснено на околах кількох точок колових траєкторій в околі 5-го центра, при цьому прирости Δy змінювались у таких межах:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } y_{51} - y_5^* \leq \Delta y \leq y_{5c} - y_5^*, \text{ тобто } -1,25630 \leq \Delta y \leq 2,15798 \\
 & \hspace{15em} \text{— окіл Церери;} \\
 & \text{б) } 0 \leq \Delta y \leq 2,7835 \text{ при } y_{4c} = 30,965 \text{— сідло 4-го кільця (Марс);} \\
 & \text{в) } 0 \leq \Delta y \leq 3,11771 \text{ при } y_{5c} = 37,163 \text{— сідло 5-го кільця (Церера);} \\
 & \text{г) } -2,108 \leq \Delta y \leq 0 \text{ при } y_6^* = 41,389 \text{— центр 6-го кільця (Юпітер)}
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Визначені на околах (3.25) ексцентриситети астероїдів Головного поясу дають кусково-неперервну функцію (пунктирна лінія з маркерами на рис. 5,а); спряження цих ліній виконано у околах максимумів з умови рівності їх значень справа і зліва. Далі (рис. 5,б) наведено теоретичну криву розподілу ексцентриситетів астероїдів зони Земля–Марс. Очевидно, що подвійна хвиля коливання теоретичних розподілів (рис. 5, а) якісно подібна до експериментальних розподілів (рис. 1) для Головного поясу. Графіки розподілу в зонах між сусідніми планетами-кільцями (рис. 5, б і рис. 2) також узгоджені між собою.

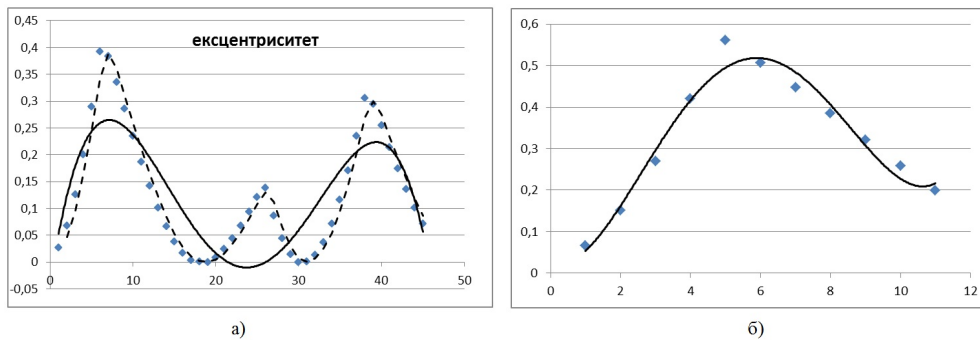


Рис. 5: Теоретичний розподіл ексцентриситетів астероїдів: а — Головний пояс (суцільна лінія є наближення поліномом 4-го степеня; пунктирна — ковзне середнє); б — зона Земля–Марс, наближення поліномом 4-го степеня

Усереднене по околах (3.25) значення $e = 0,138507$ (табл. 2) на 10% менше за експериментальне значення середніх Головного поясу. Обчислені за

такою ж методикою розподіли ексцентриситетів зон Венера–Земля та Земля–Марс (табл. 2) досить близькі до експериментальних значень.

4. Кути нахилу орбіт астероїдів

Частинки течії, які перетинають екваторну площину вихору $\theta = \pi/2$ у проміжках наскрізних ліній течії, мають швидкості (2.2) і очевидно, що вектор сумарної швидкості V величиною (3.4) утворює з цією площиною кут γ , для якого

$$tg\gamma = \frac{V_\theta}{V_\varphi} = \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}. \quad (4.1)$$

Якщо при цьому частинка перебуває в полі центральної сили тяжіння, яка не створює додаткового кінетичного моменту відносно центра системи, то її кінетичний момент зберігається, тобто

$$I = r \times V = const. \quad (4.2)$$

Напрямок цього вектора визначається кутом (4.1), а його величина відповідно до (3.4)

$$I = \beta \sqrt{\Phi^2 + \Phi'^2} = \beta \Phi \sqrt{1 + \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2} \quad (4.3)$$

є функцією радіусів y на горизонтальній осі.

Звернемо увагу на те, що коефіцієнт

$$k_\gamma = tg\gamma = (\Phi'(y) / \Phi(y)) \quad (4.4)$$

за (3.6) є мірою відхилення еліптичних орбіт від кіл (ексцентриситетів), а також за (4.1) — мірою відхилення площин орбіт від площини екліптики. Те, що між цими характеристиками орбіт є очевидна кореляція, демонструють графіки на рис. 1, де наведено експериментальні дані ексцентриситетів та нахилів орбіт 60 астероїдів Головного поясу.

Таблиця 2: Порівняння теоретичних та експериментальних значень параметрів орбіт астероїдів міжпланетних зон

Зона	Кільк.	Ексцентриситет			Нахил ^o		
		експ.	теор.	$\Delta\%$	експ.	теор.	$\Delta\%$
До Меркурія	116	0,8120			21,485		
Мерк.– Венера	28	0,5466			15,119	62,574	314
Венера – Земля	42	0,4887	0,4940	1,1	20,737	21,730	4,8
Земля – Марс	63	0,3977	0,3257	-18,1	16,227	15,4231	-5
Головний пояс	60	0,1589	0,1385	-12,9	10,426	9,159	-12
Головний пояс	1057	0,1534	0,1385	-9,75	8,3281	9,1598	10
Юпітер	71	0,0783	0,1158	47,7	11,883	4,4420	-62,6

Оскільки головні закономірності найкраще проявляються на середніх значеннях ексцентриситетів та кутів нахилу (табл. 2), було визначено середні арифметичні та середні інтегральні значення кутів нахилу (4.1) на проміжках між 1-м і 2-м, 2-м і 3-м і тощо вихровими кільцями з допомогою інтеграла

$$(tg\gamma)_c = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} dy = \frac{1}{\Delta y} \ln \left| \frac{\Phi(y_2)}{\Phi(y_1)} \right| \quad (4.5)$$

Розраховані за формулою (4.5) кути нахилу орбіт астероїдних потоків наведено в табл. 2; для зон середніх планет та Головного поясу вони досить близькі до реальних значень.

5. Висновки

Аналіз умов утворення астероїдних поясів на основі теорії планетарного вихору показав, що модель планетарного вихору, ефективно застосована до проблеми утворення зірок і планет, може бути також основною математичною моделлю для розв'язання задач про утворення астероїдів та астероїдних поясів у планетарних системах.

Ми висвітлили кілька основних аспектів щодо стосуються утворення і характеристик різних груп астероїдів. По-перше, групи астероїдів дійсно породжуються у проміжках між планетами, у зоні наскрізних ліній течії між вихровими кільцями, де суттєво збільшуються меридіональні швидкості. Так, є групи між Землею та Венерою, між Землею та Марсом, далі між Марсом та Юпітером, Юпітером і Сатурном і т.д. (табл. 2).

Теоретично пояснено існування кореляційного зв'язку між ексцентриситетами та кутами нахилу орбіт астероїдів (рис. 1 та формули (3.6) і (4.3)).

Теоретичні закономірності розподілу ексцентриситетів та кутів нахилу орбіт по групах астероїдів та їх величини в цілому свідчать про тенденцію до зменшення від зон перших до дальніх планет; вони узгоджуються з експериментальними даними, особливо для середньої частини Сонячної системи, де середні нахили становлять $10^\circ - 20^\circ$, а похибки теорії мають порядок близь 5–10% (табл. 2). Для ближніх і дальніх планетних зон теоретична модель дає значні відхилення: кути нахилу орбіт ближніх астероїдів менші за теоретичні значення, а в зонах дальніх планет вони більші. Це ж стосується і розподілу та величин ексцентриситетів орбіт астероїдів — їх експериментальні значення для ближніх планет найбільші — близько 0,8, а потім монотонно зменшуються до 0,1 (табл. 2). Для Головного поясу теоретичні та експериментальні значення відрізняються до 12%. Суттєвим чинником відповідності теоретичних і експериментальних даних астероїдів Головного поясу є доведене раніше твердження [5], що в околі 5-го кільця знаходиться точка рівноваги первинного вихору, яка залишається нерухомою в разі появи гравітаційної маси зірки в центрі вихору. Тому ця зона еволюціонує відповідно до законів збереження з найменшими сторонніми впливами. Зони ж ближніх і дальніх планет зазнають значної міграції разом з цими планетами [5]. Для цих зон наша модель потребує розвитку й уточнення.

Для зон дальніх планет і поясу Койпера теоретичні значення кутів нахилу лежать у межах $2^\circ - 4^\circ$, а ексцентриситети в межах $0,02 - 0,05$, що підтверджується недавніми дослідженнями європейських астрофізиків [8].

У нашій моделі не враховано ефекти впливу на рух астероїдів ближніх до них планет, особливо Юпітера і Сатурна, та загальновизнані ефекти встановлення резонансних співвідношень обертань планет і ближніх астероїдів [8], особливо у зоні досяжності тяжіння Юпітера. Вказані взаємодії теж можуть суттєво впливати на параметри руху астероїдів, що призводить до ще більшого розкиду цих параметрів порівняно із середніми значеннями. Саме це ми і спостерігаємо у всіх групах астероїдів.

Суттєвою причиною значних розкидів у розподілі кутів нахилу та ексцентриситетів орбіт є також обґрунтований на основі теорії планетарного вихору процес інтенсивних зіткнень планет і астероїдів на ранньому етапі формування Сонячної системи [5]. Але за таких зіткнень сумарні енергії та кінетичні моменти контактних груп тіл зберігаються, тому методика застосування середніх величин, якою ми послуговуємося, обґрунтована.

Бібліографічні посилання

1. *Альфвен, Х.* Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х. Альфвен, Г. Аррениус. — К. : Наук. думка, 1981. — 332 с.
2. *JPL Small-Body Database Browser* [Electronic resources]. — Available from: <http://nasa.gov.sbdb.cdi>
3. *Перехрест, В. І.* Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В. І. Перехрест, Р. В. Іванов // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. — Д., 2002. — Вип. 6, т. 1. — С. 60–64.
4. *Милн-Томпсон* Теоретическая гидродинамика / Милн-Томпсон. — М. : ИЛ, 1964. — 655 с.
5. *Перехрест, В. І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем / В. І. Перехрест // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. — Д., 2011. — Вип. 15, т. 1. — С. 21–33.
6. *Охоцимский, Д. Е.* Динамика космических полетов / Д. Е. Охоцимский. — М. : МГУ, 1968. — 257 с.
7. *Перехрест, В. І.* Інваріантні властивості вихрових кілець планетарного вихору та їх вплив на еволюцію вихору / В. І. Перехрест, Л. В. Ключинська // Вісн. ДНУ. Сер.: Моделювання. — Д., 2013. — Моделювання, Вип. 5, № 8. — С. 107–117.
8. *Malhotra, R.* Dynamics of the Kuiper belt / R. Malhotra, M. J. Duncan, H. F. Levison // Protostars&Planets IV, Arizona Press. — 2000. — P. 1231–1254.

Надійшла до редколегії 30.01.2015