ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2015. Вип. 7, № 8. С. 3–8

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9:519.6

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ БЕЛЬТРАМИ

Н. Н. Ясько

Днепропетровский национальный университет, кафедра компьютерных технологий, пр. К.Маркса, 35, Днепропетровск, 49010,
e-mail: yasko@olymp.dp.ua

Получено граничное интегральное представление для линейных векторных полей Бельтрами, позволяющее вичислить значение вектора в любой точке области с помощью его касательных компонент на границе. Приведены два интегральных представления, отличающихся порядком производных касательных компонент на границе. Показана связь полученного решения с решениями уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: фундаментальное решение, векторное поле Бельтрами, ротор, уравнения Максвелла, уравнение Гельмгольца.

1. Введение

Векторное поле называется векторным полем Бельтрами, если в любой точке области D $\quad \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}) = 0$. Часто к этому условию добавляют также условие соленоидальности

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \tag{1.1}$$

Векторные поля Бельтрами встречаются во многих задачах математической физики, в частности в гидродинамике несжимаемой жидкости, электромагнетизме и т.п. В последнее время изучению таких полей посвящено значительное количество работ [1–7]. Большинство из них посвящено изучению свойств таких полей, в том числе топологии и классификации. Одной из задач, которой также посвящено значительное количество работ, является построение таких полей по известным краевым условиям. Их подробный обзор можно найти в диссертации [10]. Одним из частных случаев являются линейные поля Бельтрами, когда

$$\nabla\times\mathbf{V} = k\,\mathbf{V},$$

где k является некоторой константой. Такие поля часто называют Тркалианскими векторными полями [7] по имени чешского математика Виктора Тркала, который исследовал гидродинамические задачи, описываемые этими полями. Статья посвящена построению решений краевых задач для данного уравнения, а также изучению связи этих решений с решениями других уравнений в частных производных.

2. Постановка задачи и основные обозначения

Пусть в области D, ограниченной кусочно-гладкой границей (поверхностью) S, задано векторное поле Бельтрами $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, удовлетворяющее условию

$$\nabla\times\mathbf{V} = k\,\mathbf{V}, \tag{2.1}$$

где k является некоторой константой, отличной от нуля, а V_x, V_y, V_z — действительными или комплексными функциями, имеющими непрерывные производные по крайней мере первого порядка. Хотя уравнение (2.1) формально является уравнением в частных производных первого порядка, в действительности оно есть уравнение второго порядка, так как из него следует условие соленоидальности (1.1).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1, \qquad \mathbf{V}_2 = \nabla\times\mathbf{V}_1, \tag{2.2}$$

т.е. $\mathbf{V}_2$ является ротором векторного поля $\mathbf{V}_1$. Это определение можно расширить, введя ротор векторного поля $\mathbf{V}_i$ произвольного порядка

$$\mathbf{V}_{i+1} = \nabla\times\mathbf{V}_i = 0, \qquad i = 1, 2, ...N. \tag{2.3}$$

Рассмотрим семейство функций F_i, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^i F_i + \delta(P - M) = 0, \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{2.4}$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа; $M(x_0, y_0, z_0) \in D$ — некоторая фиксированная точка; $P(x, y, z)$ — текущая точка, а $\delta(P-M)$ — дельта-функция Дирака. В качестве функций F_i можно выбрать

$$F_i = \frac{1}{4\pi}\frac{r^{2i-3}}{(2i-2)!}, \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{2.5}$$

где r есть расстояние между точками P и M. При $i = 1$ функция F_1 является фундаментальным решением трехмерного уравнения Лапласа, а функция F_2 — фундаментальным решением трехмерного бигармонического уравнения и т.д.

Целью данной статьи является вывод граничного интегрального представления для уравнения (2.1) и его последующий анализ.

3. Интегральное представление

В предыдущей работе автора [11] с помощью метода взвешенных невязок [8] было получено граничное интегральное представление для соленоидального векторного поля (1.1) в виде ряда

$$\mathbf{V}_1 = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int_S [(\mathbf{V}_{2i+1}\times\mathbf{n})\times\nabla F_{i+1} - (\mathbf{V}_{2i+1}\cdot\mathbf{n})\,\nabla F_{i+1} + F_{i+1}\,\mathbf{V}_{2i+2}\times\mathbf{n}]dS. \quad (3.1)$$

Учитывая соотношение (2.2), граничное интегральное представление (3.1) может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int_S [k^{2i}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla F_{i+1} - k^{2i}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla F_{i+1} + \\ + F_{i+1}\,k^{2i+1}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})]dS \quad (3.2)$$

или, поменяв местами суммирование и интегрирование,

$$\mathbf{V} = \int_S [(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i k^{2i}\,F_{i+1)} - \\ - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i k^{2i}\,F_{i+1}) + \\ + (\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i k^{2i+1}\,F_{i+1})(\mathbf{V}\times\mathbf{n})]dS. \quad (3.3)$$

Легко заметить, что полученный ряд представляет собой разложение косинуса

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i k^{2i}\,F_{i+1} = \frac{1}{4\pi r}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(kr)^{2i}}{(2i)!} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos kr}{r}.$$

Таким образом, результирующая формула принимает вид

$$\mathbf{V} = \int_S [(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla\,G - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla\,G + kG(\mathbf{V}\times\mathbf{n})]dS, \quad (3.4)$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos kr}{r}$$

является фундаментальным решением уравнения (2.1). Нетрудно также заметить, что интегральное представление (3.4) для векторного поля Бельтрами при $k = 0$ превращается в интегральное представление для потенциального потока несжимаемой жидкости [12].

Введем локальную ортогональную систему координат $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ в точке P на границе S таким образом, чтобы единичные векторы $\mathbf{s}, \mathbf{t}$ лежали в касательной плоскости, а вектор $\mathbf{n}$ был направлен вдоль внешней нормали. Тогда, учитывая уравнение (2.1), нормальную компоненту вектора $\mathbf{V}$ можно выразить через производные его касательных компонент

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{k}(\frac{\partial V_s}{\partial t} - \frac{\partial V_t}{\partial s}). \tag{3.5}$$

Граничное интегральное представление (3.4) приобретет вид:

$$\mathbf{V} = \int\limits_S [(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla G - \frac{1}{k}(\frac{\partial V_s}{\partial t} - \frac{\partial V_t}{\partial s})\nabla G + kG(\mathbf{V}\times\mathbf{n})]dS. \tag{3.6}$$

Этот результат может быть выражен с помощью такой теоремы.

Теорема 3.1. *Линейное векторное поле Бельтрами в произвольной точке области D может быть выражено с помощью его касательных компонент на границе S.*

Если взять ротор от уравнения (3.4), то в результате получим

$$\mathbf{V} = \frac{1}{k}(\nabla\times\mathbf{V}) = \int\limits_S [(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla G - \frac{1}{k}((\mathbf{V}\times\mathbf{n})\,\nabla)\,\nabla G + kG(\mathbf{V}\times\mathbf{n})]dS. \tag{3.7}$$

Сравнивая выражения (3.4), (3.6) и (3.7), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}\int\limits_S (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla G dS &= \frac{1}{k}\int\limits_S (\frac{\partial V_s}{\partial t} - \frac{\partial V_t}{\partial s})\,\nabla G dS = \\ &= \frac{1}{k}\int\limits_S ((\mathbf{V}\times\mathbf{n})\,\nabla)\,\nabla G dS\end{aligned}$$

Данные соотношения дают интегральную связь между нормальной и касательными компонентами векторного поля Бельтрами на границе области.

4. Уравнение Гельмгольца

Если векторное поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению (2.1), то оно также удовлетворяет уравнению

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{V} - k^2\,\mathbf{V} = 0. \tag{4.1}$$

Так как векторное поле $\mathbf{V}$ соленоидальное, то уравнение (4.1) может быть записано в виде

$$\Delta\,\mathbf{V} + k^2\,\mathbf{V} = 0. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1), (4.2) часто называют векторным уравнением Гельмгольца [9]. Декартовы компоненты векторного поля $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца, например

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Пусть в области D задана первая краевая задача для уравнения Гельмгольца. Более того, можно предположить, что на границе S области D заданы функции u and v. Тогда достаточно найти функцию w, удовлетворяющую условию (3.5), чтобы получить решение краевых задач для функций u and v в квадратурах. Уравнение для функции w может быть записано в виде

$$\frac{\partial w}{\partial s}\,t_z - \frac{\partial w}{\partial t}\,s_z + w(\frac{\partial t_z}{\partial s} - \frac{\partial s_z}{\partial t} - kn_z) = \\ = k(un_x + vn_y) - (\frac{\partial u}{\partial s}\,t_x + \frac{\partial v}{\partial s}\,t_y + u\,\frac{\partial t_x}{\partial s} + v\,\frac{\partial t_y}{\partial s}) + \\ + \frac{\partial u}{\partial t}\,s_x + \frac{\partial v}{\partial t}\,s_y + u\,\frac{\partial s_x}{\partial t} + v\,\frac{\partial s_y}{\partial t}\,. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) представлет собой уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. В случае границы простой формы или простых функций u and v его решение может быть получено аналитически. Тогда решение краевой задачи можно получить с помощью интегрального представления (3.6) или (3.7).

5. Выводы

Предложенный подход может быть применен при решении многих задач математической физики, которые описываются соленоидальными векторными полями. Выведенные формулы позволяют получить новые граничные интегральные уравнения для известных линейных задач математической физики. Также их можно применять при построении новых численных методов для нелинейных уравнений.

Библиографические ссылки

1. *Reed, D. The Beltrami field as archetypal vortex topology* / D. Reed // Proceedings of the 2nd International Symposium on New Energy. — 1994. — P. 585–608.
2. *Baldwin, P. R. Complex Trkalian fields and solutions to Euler's equations for the ideal fluid* / P. R. Baldwin, G. M. Townsend // Phys. Rev. E. — 1995. — P. 2059–2068.
3. *Saygili, K., Trkalian fileds and Radon transformation* / K. Saygili // J. Math. Physics. — 2010. — Vol. 51, No. 3. — P. 89–96.
4. *Dritschel, D. G. Ceneralized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics* / D. G. Dritschel // J. Fluid Mech. — 1991. — Vol. 222. — P. 525–541.
5. *Labropulu, F. Generalized Beltrami flows and other closed-form solutions of an unsteady viscoelastic fluid* / F. Labropulu // IJMMS. — 2002. — Vol. 30, No. 5. — P. 271-–282.

6. *Etnyre, J. An index for closed orbits in Beltrami fields* / J. Etnyre, R. Ghrist // Physica D. — 2001. — Vol. 159. — P. 180–189.
7. *Lakhtakia, A. Viktor Trkal, Beltrami fields and Trkalian flows* / A. Lakhtakia // Chechoslovac J. Physics. — 2002. — Vol.44, No. 2. — P. 89–96.
8. *Finlayson, B. A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*/ B. A. Finlayson. — N.Y. : Academic Press, 1972. — 412 p.
9. *Arfken, G. Mathematical Methods for Physicists* / G. Arfken, H. Weber. — N.Y. : Academic Press, 2000. — 994 p.
10. *Vanska, S. Direct and inverse scattering for Beltrami fields* / S. Vanska // Dissertationes, Helsinki, 2006. — 103 p.
11. *Ясько, Н. Н. Граничное интегральное представление соленоидальных векторных полей* / Н.Н. Ясько // Вісн. ДНУ. Сер. "Моделювання". — 2012. — Вип. 4, № 8. — С. 139–146.
12. *Chernyshenko, S.V. Vortex-source method for the 3D incompressible irrotational flow* / S.V. Chernyshenko, M. Yas'ko // J. Mathematics and System Science. — 2012. — Vol. 2. — P. 315–319.

Надійшла до редколегії 03.02.2015