

УДК 539.3, 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

М. В. Костащук*, А. В. Сясев**

* *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, Днепропетровск, 49010, e-mail: savtmf@yandex.ru*

** *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, Днепропетровск, 49010, e-mail: costashuk@gmail.com*

Решена задача об определении закона движения фронта кристаллизации и термомеханического состояния двухфазного стержня в случае взаимного влияния температурных и механических полей. Применен приближенный аналитический метод в совокупности с методом последовательных интервалов и вариационным принципом Гиббса (который должен указать, что "выгоднее" природе при заданных внешних воздействиях — изменить температуру фиксированного элемента тела или перевести этот элемент из одного агрегатного состояния в другое). Получены соотношения для определения закона движения границы раздела фаз, температурного поля и напряженно-деформированного состояния в стержне. Результаты представлены в виде графиков зависимости температуры и напряжений от времени и координаты. Анализ полученных результатов показывает, что изменение условий теплообмена с окружающей средой и геометрических размеров оказывает определяющее влияние на процесс кристаллизации, а следовательно, и на температурные и механические поля. Разработаны приближенный аналитический метод и алгоритм решения задачи термовязкоупругости для растущих тел при наличии фазового перехода с учетом теплообмена с окружающей средой; на основании данного метода, в результате решения так называемой связанной задачи термовязкоупругости, определены закон движения границы раздела фаз, температурное поле и напряженно-деформированное состояние; получены приближенные аналитические решения задач, позволяющие моделировать различные технологические процессы.

Ключевые слова: термомеханическое состояние, вариационный принцип Гиббса, фронт кристаллизации.

1. Введение

В последнее время линейная теория теплопроводности уже не может отвечать требованиям как новых направлений техники, так и традиционных

областей промышленности, таких как теплоэнергетика, машиностроение и особенно металлургия. Необходимо решение и исследование новых задач, в которых учтены существенная нестационарность, неоднородность, нелинейность и другие особенности, и к которым разработанные в классической (линейной) теории теплопроводности математические методы малоприменимы. Достижение требуемого технического прогресса возможно лишь в результате применения нелинейного математического моделирования.

Известно, что термомеханические процессы по своей природе сугубо нелинейны. Это радиационный нагрев в металлургических печах и колодцах, плавление и затвердевание металла (фазовые переходы), существенное изменение теплофизических характеристик при широких интервалах изменения температур. Это нелинейности I, II и III рода, без учета которых невозможно дальнейшее совершенствование металлургического производства, удовлетворяющего требованиям экономики, экологии, термостойкости, качества, себестоимости и др. Однако математические трудности, возникающие в ходе решения данных проблем, часто вынуждают исследователя применять прямую линеаризацию уравнений термомеханики (теплопроводности и термоупругости). Следует также отметить, что нелинейные краевые задачи теплопроводности точных решений до сих пор еще не имеют. Для их решения преимущественно применяются численные методы, которые в инженерной практике не всегда применимы. Возникает необходимость в более простых методиках, которые позволяли бы получать результаты требуемой практической точности аналитическим путем.

Исследованию упомянутой выше проблемы уделяется большое внимание. Так, работа [1] посвящена разработке методов исследования только лишь контактных задач элементов конструкций для литья с учетом фазовых переходов. Связанная задача термоупругости рассмотрена в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных и неравенств, которая сведена к вариационным неравенствам. В статье [2] предложена физическая модель, которая позволяет применять результаты исследований особенностей теплопередачи при управлении тепловыми потоками, определяющими условия образования двумерных кристаллов олова на подложке из определённого материала. Задача о полупространстве с микроструктурными преобразованиями, которое находится под действием теплового и механического импульсов, рассмотрена в работе [3]. Предложено ее численное решение методом пошагового неявного интегрирования по времени. Приведены количественные оценки температурных эффектов термоструктурно-механической связанности. В работе [4] речь идет о численной методике решения задачи деформирования полимерной кристаллизующейся среды с учетом значительных деформаций. В статье [5] представлены результаты компьютерного моделирования кристаллизации отливок. В работах [6, 7] рассмотрены некоторые вопросы, связанные с проблемами нелинейности в металлургической термомеханике, изложены подходы к их решению, а также отмечена необходимость в развитии и создании аналитических методик исследования нелинейных тепловых

процессов.

В настоящей работе на примере растущего двухфазного стержня предложены алгоритм и метод решения задачи об определении закона движения фронта кристаллизации и термомеханического состояния тела с учетом взаимного влияния температурных и механических полей (своего рода связанной задачи термовязкоупругости).

2. Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень длиной l . Введем в недеформированной конфигурации декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) , ось $x_3 = x$ которой направлена по оси стержня. Один конец стержня ($x = 0$) жестко зашпемлен, а другой ($x = l$) — свободен. Предположим, что вещество стержня может находиться в двух фазах — высокотемпературной и низкотемпературной. Поведение материала стержня в обеих фазах описывается уравнением состояния неоднородно стареющего вязкоупругого тела. Обозначим через θ^0 температуру фазового перехода: при $\theta_2 < \theta^0$ элемент материала находится в низкотемпературной фазе, а при $\theta_1 > \theta^0$ — в высокотемпературной. Для определенности будем считать, что до деформации вещество стержня в низкотемпературной фазе занимает область $\omega_2(t) = \{l_0 \leq x \leq l\}$, а вещество в высокотемпературной фазе — область $\omega_1(t) = \{0 \leq x \leq l_0\}$. Тепловое взаимодействие боковой и торцевой поверхностей низкотемпературной фазы стержня с окружающей средой характеризуется конвективными коэффициентами теплоотдачи $\alpha_{1,\text{кон}}$, $\alpha_{2,\text{кон}}$ соответственно и излучением. При этом высокотемпературная фаза предполагается теплоизолированной.

В момент времени $t = 0$ к стержню прикладывается продольная распределенная сжимающая нагрузка интенсивности $P(t)$ и начинается отток тепла в окружающую среду со стороны свободного конца стержня $x = l$. После этого часть вещества стержня переходит в низкотемпературную фазу (наращивание материала) так, что ее длина изменяется по закону $x = a = a(t)$.

Требуется при заданном законе изменения внешней нагрузки $P = P(t)$ определить закон движения границы раздела фаз $a = a(t)$ температуру $\theta_i = \theta_i(t, x)$, ($i = 1, 2$) и напряженно-деформированное состояние в стержне в случае одноосного напряженного состояния.

Математическая постановка сформулированной задачи термовязкоупругости для растущего в условиях фазового перехода стержня заключается в нахождении перечисленных неизвестных из совместного решения следующих уравнений:

$$\epsilon_i(t, x) = \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_i(t, x)}{\partial x} = \rho_i \cdot P(t), \quad (2.2)$$

$$\sigma_i(t, x) = E_i \cdot (t - \tau^*(x)) \cdot \epsilon_i(t, x) - \int_{\tau^*(x)}^t \epsilon_i(\tau, x) \cdot R(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x)) d\tau, \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial x} \right), \quad (2.4)$$

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \right) + \Phi(\theta_2, \alpha_2). \quad (2.5)$$

В соотношениях (2.1)–(2.5) и в дальнейшем индекс «1» относится к параметрам вещества в высокотемпературной, а индекс «2» – в низкотемпературной фазе; $E_i(t - \tau^*(x))$ – упругомгновенный модуль деформации; $R(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x))$ – ядро релаксации вязкоупругого материала; $\tau^*(x)$ – момент перехода элемента тела в твердое агрегатное состояние; $\rho_i, c_i, \lambda_i = \lambda_i(\theta_i), \alpha_i = \alpha_i(\theta_i)$ – плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности материала, приведенный коэффициент теплоотдачи [8], характеризующий интенсивность конвективного и лучистого теплообмена со средой; $\theta_i(t, x)$ – распределение температуры в соответствующей фазе стержня;

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_2, \alpha_2) &= -\frac{\alpha_{2, \text{кон}}}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}] - \frac{\epsilon_{12}\sigma_0}{h\lambda_2} [\theta_2^4(t_k, x) - \theta_{cp}^4] = \\ &= -\frac{\alpha_2}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}] \end{aligned}$$

– мощность внутренних источников (стоков) тепла в низкотемпературной фазе, учитывающая также конвективный и лучистый теплообмен боковой поверхности стержня с окружающей средой; ϵ_{12} – степень черноты материала в твердой фазе; σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана; $h = \frac{s}{p}$; s – площадь поперечного сечения стержня; p – периметр; μ – теплота фазового перехода.

Граничные и начальные условия задачи имеют вид

$$\sigma_2(t, l) = 0, u_1(t, 0) = 0, \sigma_1(t, a(t)) = \sigma_2(t, a(t)), u_1(t, a(t)) = u_2(t, a(t)), \quad (2.6)$$

$$\theta_1(t, 0) = f, \theta_2(t, a(t)) = \theta_1(t, a(t) - \Delta) = \theta^0,$$

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= \alpha_{1, \text{кон}} (\theta_2(t, x) - \theta_{cp}) \Big|_{x=l} + \epsilon_{12} \sigma_0 \theta_2^4(t, l) = \alpha_1 [\theta_2(t, l) - \theta_{cp}], \\ -\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} &= -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} + \rho_1 \mu \frac{da(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\theta_1(t, x) \Big|_{t=0} = \theta_1(0, x), \theta_2(t, x) \Big|_{t=0} = \theta_2(0, x). \quad (2.8)$$

3. Метод и алгоритм решения поставленной задачи

Соотношения (2.1)–(2.8) представляют собой постановку задачи термоупругости для растущего двухфазного стержня в замкнутой форме. Отличие этой постановки от задач, рассмотренных в публикациях [9, 10], заключается в том, что в задаче теплопроводности (2.5), (2.7), (2.8) учтена нелинейность первого рода ввиду зависимости теплофизических характеристик материала от температуры. Одним из подходов к решению нелинейных задач теплопроводности является метод последовательных интервалов [11], заключающийся в разбиении всего процесса на конечные интервалы, в каждом из которых характеристики материала и внутренние источники тепла постоянны. В такой постановке нелинейная задача теплопроводности сводится к совокупности решений линейных задач с различными начальными и граничными условиями для каждого интервала времени. Поэтому для решения задачи (2.1)–(2.8) предлагается применить приближенный аналитический метод, предложенный в работе [12], вместе с методом последовательных интервалов и вариационным принципом Гиббса (который должен указать, что «выгоднее» природе при заданных внешних воздействиях – изменить температуру фиксированного элемента тела или перевести этот элемент из одного агрегатного состояния в другое) в нижеподанной трактовке.

Интервал времени $[0, t_{\text{кон}}]$, на котором исследуется напряженно-деформированное состояние в теле Ω , разбивается точками $t_k = k\Delta$, $\Delta = t_{\text{кон}}/N$, $k = 0, 1, \dots, N$ на подинтервалы, так что процесс непрерывного наращивания заменяется следующим дискретным процессом. В момент времени t_k к телу Ω прилагаются поверхностные усилия $f^{(k)}$, массовые силы $F^{(k)}$, а от тела отводится количество тепловой энергии, равное $\omega^{(k)}$. Пусть величины u^* (вектор перемещений), θ_* (температурное поле) и $a = a(t_k)$ (положение границы раздела фаз) полностью описывают истинное состояние тела на каждом временном промежутке. При изменении внешних условий тело выходит из состояния термодинамического равновесия $(u_*^{(k-1)}, \theta_*^{(k-1)}, a_*^{(k-1)})$, в котором оно находилось в момент времени t_k , и мгновенно переходит в новое равновесное состояние $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$. На интервале времени (t_k, t_{k+1}) тело Ω находится в состоянии термодинамического равновесия $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$. Состояние $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ является кинематически возможным равновесным состоянием тела Ω в момент времени $t_k + 0$ (то есть при $t > t_k$). Истинное (которое реализуется в действительности) состояние тела Ω в момент времени $t_k + 0$ обозначим через $(u_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$.

Внутренняя энергия тела Ω в состояниях $(u_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$ и $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ равна соответственно $V_*^{(k)}$ и $V^{(k)}$. Эти величины связаны законом сохранения энергии

$$V^{(k)} = V_*^{(k-1)} + A^{(k)} - \omega^{(k)}, \quad (3.1)$$

где $A^{(k)}$ – работа внешних поверхностных и массовых сил

$$A^{(k)} = \int_{\partial\omega} \rho^0 F^{(k)}(u^{(k)} - u_*^{(k-1)})d\omega + \int_{\partial\omega} f^{(k)}(u^{(k)} - u_*^{(k-1)})d\partial\omega.$$

Истинное равновесное состояние $(u_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$ характеризуется тем, что оно доставляет максимальное значение энтропии тела среди всех возможных равновесных состояний, определяемых равенством (3.1).

Для выполнения сформулированного выше принципа и обеспечения тем самым связности механических и температурных полей необходимо сначала в каждый момент времени t_k решить задачу теплопроводности (2.5), (2.7), (2.8). Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_1(t_k, x) &= \frac{1}{\lambda_1} B(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}) \left[\frac{\alpha_1 - B}{\alpha_1 - B - e^{2B_1(l-a(t_k))}(B + \alpha_1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_1 + B}{\alpha_1 + B - e^{-2B_1(l-a(t_k))}(\alpha_1 - B)} \right] x + f, \\ \theta_2(t_k, x) &= \frac{(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{\text{ср}})e^{B_1x}}{e^{B_1a(t_k)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2l-a(t_k))}(B + \alpha_1)} - \\ &\quad - \frac{(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{\text{ср}})e^{-B_1x}}{e^{-B_1(2l-a(t_k))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1a(t_k)}(\alpha_1 + B)} + \theta_{\text{ср}}, \end{aligned}$$

где $B = \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}$, $B_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda_2h}}$ [9, 12].

Теперь определим поле перемещений из решения упругой контактной задачи двух тел $\omega_1(t_k)$ и $\omega_2(t_k)$. При этом будем считать, что вещество в жидкой фазе занимает область $\omega_1(t_k) = \{0 \leq x \leq a(t_k)\}$, в твердой фазе — $\omega_2(t_k) = \{a(t_k) \leq x \leq l\}$.

В этом случае контактная задача для двух тел $\omega_1(t_k)$ и $\omega_2(t_k)$ в момент времени t_k сводится к решению следующей системы уравнений (штрих означает производную по координате x):

$$\begin{aligned} \sigma_1(t_k, x) &= E_1 u_1'(t_k, x), \\ \sigma_2(t_k, x) &= E_2 u_2'(t_k, x), \\ \sigma_1'(t_k, x) - \rho_1 P(t_k) &= 0, \\ \sigma_2'(t_k, x) - \rho_2 P(t_k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \sigma_2(t_k, l) &= 0, u_1(t_k, 0) = 0, \\ \sigma_1(t_k, a(t_k)) &= \sigma_2(t_k, a(t_k)), u_1(t_k, a(t_k)) = u_2(t_k, a(t_k)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.2), (3.3) имеет вид (см. [9])

$$\sigma_2(t_k, x) = -\rho_2 P(t_k)(l - x), \tag{3.4}$$

$$\sigma_1(t_k, x) = -P(t_k) [\rho_2(l - a(t_k)) + \rho_1(a(t_k) - x)], \quad (3.5)$$

$$u_1(t_k, x) = -\frac{P(t_k)}{E_1} \left[\rho_2(l - a(t_k))x - \frac{\rho_1}{2} ((a(t_k) - x)^2 - a^2(t_k)) \right], \quad (3.6)$$

$$u_2(t_k, x) = \frac{\rho_2 P(t_k)}{2E_2} ((l - x)^2 - (l - a(t_k))^2) - \frac{P(t_k)a(t_k)}{E_1} \left(\rho_2(l - a(t_k)) + \frac{\rho_1 a(t_k)}{2} \right). \quad (3.7)$$

Определим работу внешних сил A^{k+1} при переходе из термодинамически равновесного состояния $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ в момент времени t_k в термодинамически равновесное состояние $(u^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, a^{(k+1)})$ в момент времени t_{k+1} :

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} = & \int_0^{a(t_k)} \rho_1 P(t_{k+1}) (u_1(t_{k+1}, x) - u_1(t_k, x)) dx + \\ & + \int_{a(t_k)}^{a(t_{k+1})} \rho_2 P(t_{k+1}) u_2(t_{k+1}, x) dx - \int_{a(t_k)}^{a(t_{k+1})} \rho_1 P(t_{k+1}) u_1(t_{k+1}, x) dx + \\ & + \int_{a(t_{k+1})}^l \rho_2 P(t_{k+1}) (u_2(t_{k+1}, x) - u_2(t_k, x)) dx. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Подставив выражения (3.6), (3.7) в соотношение (3.8) и выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} = & \frac{\rho_1 P(t_{k+1})}{2E_1} \left\{ \rho_2 a^2(t_k) [P(t_k)(l - a(t_k)) - P(t_{k+1})(l - a(t_{k+1}))] + \right. \\ & + \rho_1 a^2(t_k) \left[\frac{2}{3} P(t_k) a(t_k) + P(t_{k+1}) \left(\frac{a(t_k)}{3} - a(t_{k+1}) \right) \right] + \\ & + P(t_k) (a(t_{k+1}) - a(t_k)) [\rho_2(l - a(t_k))(a(t_{k+1}) + a(t_k)) - \\ & \left. - \frac{\rho_1}{6} (a^2(t_{k+1}) - 2a^2(t_k) - 2a(t_k)a(t_{k+1}))] \right\} + \\ & + \rho_2 P(t_{k+1}) \left\{ (l - a(t_{k+1}))(a(t_k) - a(t_{k+1})) - \frac{P(t_{k+1})a(t_{k+1})}{E_1} (\rho_2(l - a(t_{k+1}))) + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_1 a(t_{k+1})}{2} \right) + \frac{\rho_2 P(t_{k+1})}{6E_1} ((l - a(t_k))^3 - (l - a(t_{k+1}))^3) + \\ & + (l - a(t_{k+1})) \left[-\frac{\rho_2}{E_2} \left(\frac{P(t_{k+1})}{3} (l - a(t_{k+1}))^2 + \frac{P(t_k)}{2} \left[\frac{(l - a(t_{k+1}))^2}{3} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (l - a(t_k))^2 \right] \right) - \frac{1}{E_1} \left(P(t_k) a(t_k) \left[\frac{\rho_1 a(t_k)}{2} + \rho_2(l - a(t_k)) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - P(t_{k+1}) a(t_{k+1}) \left[\frac{\rho_1 a(t_{k+1})}{2} + \rho_2(l - a(t_{k+1})) \right] \right) \right] \right\}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Найдем внутреннюю энергию $V^{(k)}$ стержня в термодинамически равновесном состоянии в момент времени t_k , $(k = 1, 2, \dots, N)$. Для этого введем следующие предположения:

1. при перегревании в жидкой фазе за счет конвекции возникают интенсивные потоки тепла, и перепады температур в ней практически отсутствуют. Поэтому, следуя рекомендациям работы [13], перепад температур по длине жидкой части стержня примем $\Delta\theta_1$;
2. по закону сохранения энергии разница между количеством тепла, которое отдается боковой поверхностью и торцом стержня конвекцией и излучением в окружающую среду, равна теплу, аккумулированному данным телом:

$$c_2 s(l - a(t))\rho_2 \dot{\theta}_2^{\text{CP}}(t) = sq - p\alpha_2 \int_{a(t)}^l (\theta_2(t, x) - \theta_{\text{CP}}) dx, \quad (3.10)$$

где s — площадь поперечного сечения стержня; p — периметр; $\dot{\theta}_2^{\text{CP}}(t)$ — приращение температуры в единицу времени в теле; $q = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t_k)} + \mu\rho_1 \dot{a}(t) - \alpha_1 (\theta_2(t, x) - \theta_{\text{CP}})$ — количество тепла, аккумулированного в теле при распространении тепла в осевом направлении; $p\alpha_2 \int_{a(t)}^l (\theta_2(t, x) - \theta_{\text{CP}}) dx$ — количество тепла, которое отдает в окружающую среду боковая поверхность стержня.

Уравнение (3.10), с учетом решения для $\theta_2(t, x)$, можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \rho_2 c_2 (l - a(t)) \dot{\theta}_2^{\text{CP}}(t) = \mu\rho_1 \dot{a}(t) - \frac{(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{\text{CP}})e^{B_1 l}}{e^{B_1 a(t)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2l-a(t))}(\alpha_1 + B)} + \\ + \frac{(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{\text{CP}})e^{-B_1 l}}{e^{-B_1(2l-a(t))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1 a(t)}(\alpha_1 + B)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда при принятых предположениях внутреннюю энергию будем вычислять по формуле

$$\begin{aligned} V^{(k)} = V_*^{(0)} + \int_0^{a(t_k)} \left(\rho_1 c_1 \Delta\theta_1 + \frac{\sigma_1^2(t_k, x)}{2E_1} \right) dx + \\ + \int_{a(t_k)}^l \left(\rho_2 c_2 (\theta_2(t_k, x) - \theta_2^{\text{CP}}(t_k)) + \frac{\sigma_2^2(t_k, x)}{2E_2} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $V_*^{(0)} = \rho_1 l_0 \psi_1^0 + \rho_2 (l - l_0) \psi_2^0$ — внутренняя энергия тела в естественном состоянии [12]; ψ_i^0 , ($i = 1, 2$) — удельная внутренняя энергия вещества в жидкой и твердой фазах соответственно в естественном состоянии. В данном примере положим $\psi_1^0 = 0$.

Подставив выражения (3.4), (3.5) в соотношение (3.12), выполним инте-

гирование по переменной x . Имеем

$$\begin{aligned}
 V^{(k)} = & \frac{P^2(t_k)a(t_k)}{E_1} \left\{ \rho_2^2(l - a(t_k))^2 - \rho_1\rho_2(l - a(t_k))a(t_k) + \frac{\rho_1^2 a^2(t_k)}{3} \right\} - \\
 & - \rho_2 c_2 \left\{ \theta_2^{\text{cp}}(t_k)(l - a(t_k)) - \frac{(e^{B_1 l} - e^{B_1 a(t_k)})(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{\text{cp}})}{B_1(e^{B_1 a(t_k)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2la(t_k))}(\alpha_1 + B))} \right\} + \\
 & + \rho_2 c_2 \left\{ \frac{(e^{-B_1 l} - e^{-B_1 a(t_k)})(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{\text{cp}})}{B_1(e^{-B_1(2l-a(t_k))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1 a(t_k)}(\alpha_1 + B))} + \theta_{\text{cp}}(l - a(t_k)) \right\} + \\
 & + \rho_2^2 P(t_k) \frac{(l - a(t_k))^3}{6E_2} + \rho_1 c_1 \Delta\theta_1 a(\rho_2^2 P(t_k) \frac{(l - a(t_k))^3}{6E_2}). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Определим энтропию $S^{(k)}$ в термодинамически равновесном состоянии в момент времени t_k

$$\begin{aligned}
 S^{(k)} = & \frac{V^{(k)} - A^{(k)} + \mu\rho_1 a(t_k) + \alpha_1(\theta_2(t_k, l) - \theta_{\text{cp}})}{\theta^0} + \\
 & + \frac{\alpha_2 h^{-1}(l - a(t_k))(\theta_2^{\text{cp}}(t_k) - \theta_{\text{cp}})}{\theta^0}.
 \end{aligned}$$

При переходе из термодинамически равновесного состояния $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ в момент времени t_k в термодинамически равновесное состояние $(u^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, a^{(k+1)})$ в момент времени t_{k+1} энтропия $S^{(k+1)}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 S^{(k+1)} = & \frac{V^{(k+1)} - A^{(k+1)} + \mu\rho_1 a(t_{k+1}) + \alpha_1(\theta_2(t_{k+1}, l) - \theta_{\text{cp}})}{\theta^0} + \\
 & + \frac{\alpha_2 h^{-1}(l - a(t_{k+1}))(\theta_2^{\text{cp}}(t_{k+1}) - \theta_{\text{cp}})}{\theta^0}.
 \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с вариационным принципом Гиббса точка $a^{(k+1)} = a(t_k)$, характеризующая положение границы раздела фаз в момент времени t_{k+1} , доставляет максимальное значение функции $F(a^{(k+1)}) = S^{(k+1)} - S^{(k)}$.

Из условия экстремума функции следует

$$\frac{dF(a^{(k+1)})}{da^{(k+1)}} = 0. \quad (3.14)$$

Подставив в (3.14) соотношения (3.9), (3.13) и функцию $\theta_2(t, x)$, получим

$$\begin{aligned}
 \mu\rho_1 + \frac{\alpha_2}{h}(\theta_{\text{cp}} - \theta_2^{\text{cp}}(t_k)) + \rho_1 c_1 \Delta\theta_1 - \frac{\rho_2^2 P(t_k)}{2E_2}(l - a^{(k+1)})^2 + \rho_2 c_2 \theta_2^{\text{cp}}(t_k) + \\
 + \frac{P^2(t_{k+1})}{E_1} \left\{ \rho_2^2(l - a^{(k+1)})^2 - \rho_1\rho_2 a^{(k+1)}(l - a^{(k+1)}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a^{(k+1)} \left[-2\rho_2^2(l - a^{(k+1)}) - \rho_1\rho_2a(l - 2a^{(k+1)}) + \frac{2\rho_1^2a^{(k+1)}}{3} \right] + \frac{\rho_1^2(a^{(k+1)})^2}{3} \Big\} + \\
& +\alpha_1(\theta^0 - \theta_{\text{cp}})B_1 \left\{ \frac{(B - \alpha_1)e^{B_1l}F_3(a^{(k+1)})}{F_1^2(a^{(k+1)})} + \frac{(\alpha_1 + B)e^{-B_1l}F_4(a^{(k+1)})}{F_2^2(a^{(k+1)})} \right\} - \\
& -\rho_2c_2 \left[\theta_{\text{cp}} + \frac{(\alpha_1 - B)F_5(a^{(k+1)})}{F_1^2(a^{(k+1)})} - \frac{(\alpha_1 + B)F_6(a^{(k+1)})}{F_2^2(a^{(k+1)})} \right] - \\
& -\frac{\rho_1P(t_{k+1})}{2E_1} \left\{ (a^{(k+1)})^2P(t_{k+1})(\rho_2 - \rho_1) + P(t_k) \left[\rho_2(l - a^{(k)})(a^{(k+1)} + a^{(k)}) - \right. \right. \\
& -\frac{\rho_1}{6} \left. \left. \left((a^{(k+1)})^2 - 2(a^{(k)})^2 - 2a^{(k)}a^{(k+1)} \right) \right] + P(t_k)(a^{(k+1)} - a^{(k)}) \left[\rho_2(l - a^{(k)}) - \right. \right. \\
& -\frac{\rho_1}{3} \left. \left. (a^{(k+1)} - a^{(k)}) \right] \right\} - \rho_2P(t_{k+1}) \left\{ 2a^{(k+1)} - \frac{P(t_{k+1})\rho_2l}{E_1} + \frac{2P(t_{k+1})\rho_2a^{(k+1)}}{E_1} - \right. \\
& -l - a^{(k)} - \frac{P(t_{k+1})\rho_1a^{(k+1)}}{E_1} - \frac{\rho_2P(t_{k+1})}{2E_2} (l - a^{(k+1)})^2 + \left[\frac{\rho_2}{E_2} \left(\frac{P(t_{k+1})}{3} (l - a^{(k+1)})^2 \right. \right. \\
& + \frac{P(t_k)}{2} \left. \left. \left[\frac{(l - a^{(k+1)})^2}{3} - (l - a^{(k)})^2 \right] \right) \right] + \frac{1}{E_1} \left(P(t_k)a^{(k)} \left[\frac{\rho_1a^{(k)}}{2} + \rho_2(l - a^{(k)}) \right] - \right. \\
& -P(t_{k+1})a^{(k+1)} \left. \left[\frac{\rho_1a^{(k+1)}}{2} + \rho_2(l - a^{(k+1)}) \right] \right) \right] + (l - a^{(k+1)}) \left[\frac{\rho_2(l - a^{(k+1)})}{3E_2} \times \right. \\
& \left. \times (2P(t_{k+1}) + P(t_k)) + \frac{1}{E_1} \left(P(t_{k+1})l\rho_2 + P(t_{k+1})a^{(k+1)}(\rho_1 - 2\rho_2) \right) \right] \Big\} = 0, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(a^{(k+1)}) &= e^{B_1a^{(k+1)}}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 + B), \\
F_2(a^{(k+1)}) &= e^{-B_1(2l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1a^{(k+1)}}(\alpha_1 + B), \\
F_3(a^{(k+1)}) &= e^{B_1a^{(k+1)}}(\alpha_1 - B) + e^{B_1(2l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 + B), \\
F_4(a^{(k+1)}) &= e^{-B_1(2l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 - B) + e^{-B_1a^{(k+1)}}(\alpha_1 + B), \\
F_5(a^{(k+1)}) &= -2e^{2B_1l}(B + \alpha_1) + e^{B_1(l + a^{(k+1)})}(\alpha_1 - B) + e^{B_1(3l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 + B), \\
F_6(a^{(k+1)}) &= 2e^{-2B_1l}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1(3l - a^{(k+1)})}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1(l + a^{(k+1)})}(\alpha_1 + B).
\end{aligned}$$

Предполагая, что функции $a(t)$, $P(t)$, $\theta_i(t, x)$ непрерывны и дифференцируемы по t в рассматриваемом промежутке времени, положим

$$\begin{aligned}
a(t_{k+1}) &= a(t_k) + \dot{a}(t_k)\Delta + \dots, \\
P(t_{k+1}) &= P(t_k) + \dot{P}(t_k)\Delta + \dots,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где многоточие обозначает члены порядка Δ^2 .

Подставив (3.16) в $\theta_i(t, x)$ и (3.15) и перейдя к пределу при $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow t$, получим

$$\theta_1(t, x) = \frac{1}{\lambda_1} B(\theta^0 - \theta_{cp}) \left[\frac{\alpha_1 - B}{\alpha_1 - B - e^{2B_1(l-a(t))}(B + \alpha_1)} - \frac{\alpha_1 + B}{\alpha_1 + B - e^{-2B_1(l-a(t))}(\alpha_1 - B)} \right] x + f, \quad (3.17)$$

$$\theta_2(t, x) = \frac{(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{cp})e^{B_1x}}{e^{B_1a(t)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2l-a(t))}(B + \alpha_1)} - \frac{(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{cp})e^{-B_1x}}{e^{-B_1(2l-a(t))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1a(t)}(\alpha_1 + B)}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mu\rho_1 + \frac{\alpha_2}{h}(\theta_{cp} - \theta_2^{cp}(t)) + \rho_1 c_1 \Delta \theta_1 - \frac{\rho_2^2 P(t)}{2E_2} (l - a(t))^2 + \frac{P^2(t)}{E_1} \{ \rho_2^2 (l - a(t))^2 - \\ - \rho_1 \rho_2 a(t)(l - a(t)) + \frac{\rho_1^2 (a(t))^2}{3} + a(t) [-2\rho_2^2 (l - a(t)) - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) \\ \frac{2\rho_1^2 a(t)}{3}] \} + \alpha_1 (\theta^0 - \theta_{cp}) B_1 \left\{ \frac{(B - \alpha_1) e^{B_1 l} F_3(a(t))}{F_1^2(a(t))} + \frac{(\alpha_1 + B) e^{-B_1 l} F_4(a(t))}{F_2^2(a(t))} \right\} - \\ \rho_2 c_2 \left\{ -\theta_2^{cp}(t) + \theta_{cp} + \frac{(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{cp}) F_5(a(t))}{F_1^2(a(t))} - \frac{(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{cp}) F_6(a(t))}{F_2^2(a(t))} \right\} - \\ - \frac{\rho_1 P^2(t) a(t)}{2E_1} \left\{ \rho_2 (2l - a(t)) - \frac{3}{2} \rho_1 a(t) \right\} - \rho_2 P(t) (a(t) - l) = 0, \quad (3.19) \end{aligned}$$

где функции $F_i(a(t)) = \lim_{t_k \rightarrow t} F_i(a^{(k+1)})$.

Соотношения (3.11), (3.17) – (3.19) представляют собой систему нелинейных уравнений для определения температурного поля в стержне и положения границы раздела фаз.

Преобразуем уравнения (3.11), (3.19). Для этого продифференцируем по t уравнение (3.19) и в результат подставим $\dot{\theta}_2^{cp}(t)$ из (3.11). Будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений для определения закона движения фронта кристаллизации и средней температуры в стержне:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) B_1^2 (\theta^0 - \theta_{cp}) \alpha_1 \frac{e^{B_1 l} (e^{2B_1 a(t)} (\alpha_1 - B)^2 + e^{2B_1 (2l-a(t))} (\alpha_1^2 - B^2))}{F_1^3(a(t))} + \\ + \dot{a}(t) B_1^2 (\theta^0 - \theta_{cp}) \alpha_1 \frac{e^{-B_1 l} (e^{-2B_1 a(t)} (\alpha_1 + B)^2 - e^{-2B_1 (2l-a(t))} (\alpha_1^2 - B^2))}{F_2^3(a(t))} + \\ + 6\dot{a}(t) B_1^2 (\theta^0 - \theta_{cp}) \alpha_1 (\alpha_1^2 - B^2) \left(\frac{e^{3B_1 l} (\alpha_1 - B)}{F_1^3(a(t))} - \frac{e^{-3B_1 l} (\alpha_1 + B)}{F_2^3(a(t))} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{a}(t)B_1(\theta^0 - \theta_{cp})\rho_2c_2 \frac{e^{B_1(l+a(t))}(\alpha_1 - B)^2 - e^{B_1(3l-a(t))}(\alpha_1^2 - B^2)}{F_1^2(a(t))} - \\
& -\dot{a}(t)B_1(\theta^0 - \theta_{cp})\rho_2c_2 \frac{e^{-B_1(3l-a(t))}(\alpha_1^2 - B^2) - e^{-B_1(l+a(t))}(\alpha_1 + B)^2}{F_2^2(a(t))} - \\
& -2\dot{a}(t)B_1(\theta^0 - \theta_{cp})\rho_2c_2 \frac{F_5(a(t))F_3(a(t))(\alpha_1 - B)}{F_1^3(a(t))} + \\
& +2\dot{a}(t)B_1(\theta^0 - \theta_{cp})\rho_2c_2 \frac{F_6(a(t))F_4(a(t))(\alpha_1 + B)}{F_2^3(a(t))} + \\
& +\dot{a}(t) \left\{ \frac{\rho_2^2 P(t)(l-a(t))}{E_2} - \frac{\mu\rho_1(\lambda_2 B_1^2 - \rho_2 c_2)}{\rho_2 c - 2(l-a(t))} \right\} + \\
& +\frac{\dot{a}(t)P^2(t)}{E_1} \left\{ \frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} - 2\rho_2^2(l-a(t)) - \rho_1\rho_2(l-2a(t)) \right\} + \\
& +\dot{a}(t) \left\{ \left(\frac{P^2(t)}{E_1} 2a(t)(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \frac{\rho_1^2}{3}) - \rho_1\rho_2(l-a(t)) \right) - \rho_2 P(t) \right\} = \\
& = \dot{P}(t) \left\{ \rho_2(a(t) - l) - \frac{\rho_2^2(l-a(t))^2}{2E_2} + \frac{P(t)\rho_1^2 a^2(t)}{2E_1} + \rho_2^2(l-a(t))^2 \right\} + \\
& + \frac{4\rho_2 a(t)P(t)\dot{P}(t)}{E_1} \left\{ \frac{1}{4}\rho_1(2l-a(t)) - \rho_1(l-a(t)) - \rho_2(l-a(t)) \right\} + \\
& + \frac{(\lambda_2 B_1^2 - \rho_2 c_2)(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{cp})}{\rho_2 c_2(l-a(t))} \left\{ \frac{e^{-B_1 l}}{F_2(a(t))} - \frac{e^{B_1 l}}{F_1(a(t))} \right\}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2^{cp}(t) = \frac{\mu\rho_1\dot{a}(t)}{\rho_2c_2(l-a(t))} + \frac{(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{cp})}{\rho_2c_2(l-a(t))} \left\{ \frac{e^{-B_1 l}}{F_2(a(t))} - \frac{e^{B_1 l}}{F_1(a(t))} \right\}. \quad (3.21)$$

После того как функция $a = a(t)$ определена, температурное поле в стержне определяется по формулам (3.17), (3.18), а напряженно-деформированное состояние — по формулам (3.4), (3.5)–(3.7).

Таким образом, можно построить следующий алгоритм определения напряженно-деформированного состояния в теле Ω при фазовом переходе [14]. В момент времени t_k :

- (1) фиксируем поверхность раздела фаз $a(t_k)$ и из решения стационарной задачи теплопроводности определяем температуру $\theta_i^{(k)}(x)$, ($i = 1, 2$) в теле Ω ;
- (2) решаем контактную задачу для двух тел, занимающих области $\omega_1(t_k)$ и $\omega_2(t_k)$, и вычисляем поле перемещений $u^{(k)}$;
- (3) для имеющихся значений $(u^{(k)}, \theta^{(k)}, \gamma^{(k)})$ определяем внутреннюю энергию $V^{(k)}$ и энтропию $S^{(k)}$ тела Ω ;

- (4) из первого закона термодинамики и условия максимума энтропии $S^{(k)}$ тела Ω определяем истинное положение границы раздела фаз $a_*^{(k)}$;
- (5) при найденном положении поверхности раздела фаз $a_*^{(k)}$ определяем истинную температуру $\theta_*^{(k)}$ и истинное поле перемещений $u_*^{(k)}$;
- (6) в следующий момент времени t_{k+1} начальная температура и положение границы раздела фаз должна соответствовать найденным в момент времени t_k , то есть

$$\theta^{(k+1)} = \theta_*^{(k)}, a^{(k+1)} = a_*^{(k)}.$$

При этом предложенный алгоритм решения связанной задачи термовязкоупругости учитывает предысторию всего процесса в каждый момент времени t_k в законе движения границы раздела фаз, определяемом из вариационного принципа Гиббса.

4. Анализ полученных результатов

Для иллюстрации работоспособности предложенного метода рассмотрим конкретные примеры: кристаллизация (наращивание) стержня с теплоизолированной боковой поверхностью; задача о наращивании стержня при тепловом взаимодействии с окружающей средой с учетом фазового перехода.

В случае кристаллизации стержня с теплоизолированной боковой поверхностью ($\alpha_2 = \alpha_2 = 0$) в задаче (2.1)–(2.8) выражения, определяющие закон движения границы раздела фаз и температурное поле в твердой фазе, упрощаются и имеют вид

$$\begin{aligned} & \dot{a}(t) \left\{ 2\rho_2^2 P(t)(l - a(t)) \left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right] + \frac{P(t)}{E_1} \left[\frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) \right] + \right. \\ & + \frac{P^2(t)}{E_1} \left[-2\rho_2^2 (l - a(t)) - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) + \frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} + a(t)(2\rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 + \frac{2\rho_1^2}{3}) \right] + \\ & \left. + \rho_2 c_2 \frac{\lambda_2}{\alpha_1 (l + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} - a(t))^2} \left\{ \theta^0 + \theta_{cp} - \frac{1}{l + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} - a(t)} \left[\theta^0 (l + \frac{2\lambda_2}{\alpha_1} - a(t)) + \theta^{cp} (l - a(t)) \right] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda_2 (\theta^0 - \theta^{cp})}{(l + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} - a(t))^3} + \frac{\mu \rho_1}{l - a(t)} \right\} = \\ & = \dot{P}(t) \left\{ \rho_2^2 (l - a(t))^2 \left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right] - \frac{1}{E_1} \left[\frac{\rho_1^2 a^2(t)}{3} - \rho_1 \rho_2 (l - a(t)) a(t) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2P(t)a(t)}{E_1} \left[-2\rho_2^2 (l - a(t)) - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) + \frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} \right] \right\}, \\ & \theta_2(a(t), x) = \frac{(\theta^0 - \theta_{cp})(l + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} - x)}{l + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} - a(t)} + \theta_{cp}, \end{aligned}$$

$$\theta_2^{cp}(a(t)) = -\frac{\mu\rho_1}{\rho_2 c_2} \ln \frac{l-a(t)}{l-l_0} + 1700,$$

а напряженно-деформированное состояние определяется по формулам (3.4), (3.5)–(3.7).

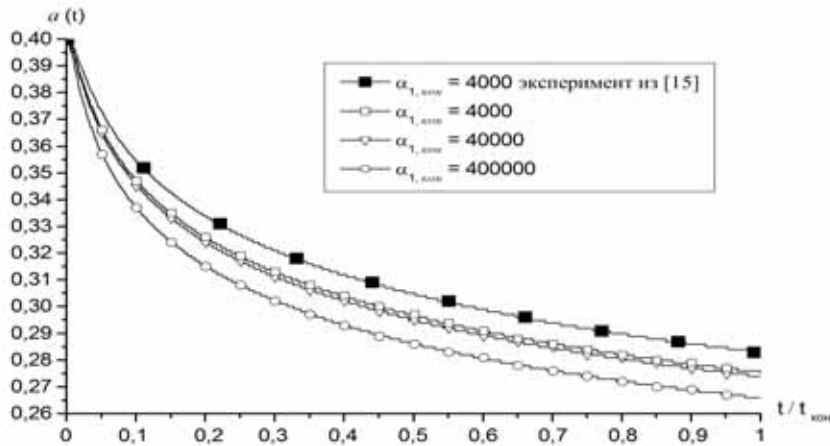


Рис. 1: Влияние интенсивности охлаждения поверхности стержня на закон движения границы раздела фаз

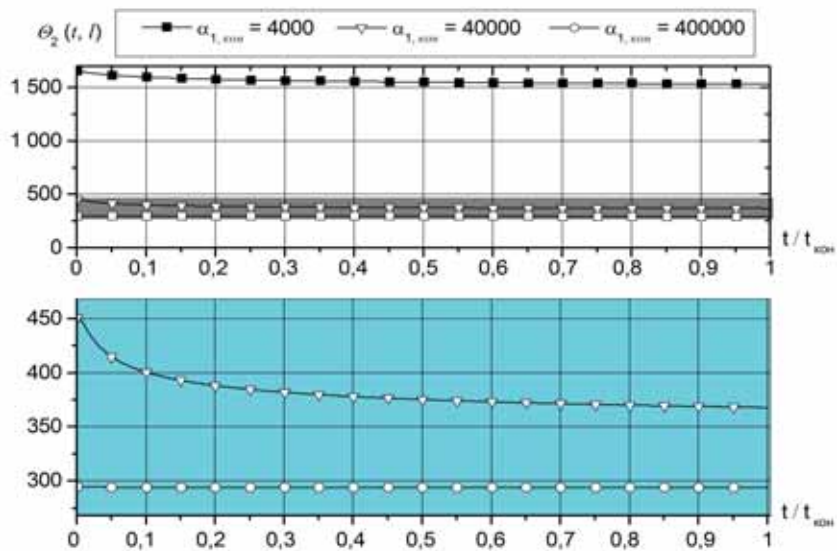


Рис. 2: Влияние интенсивности охлаждения на температуру торцевой поверхности стержня

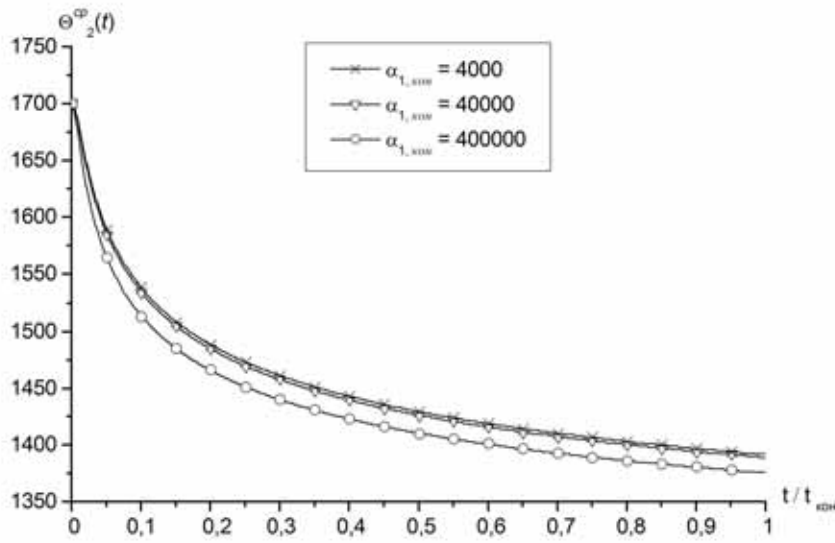


Рис. 3: Временная зависимость среднemasовой температуры твердой фазы для стержня длиной $l = 0,5$ м ($l_0 = 0,4$ м) при различных значениях коэффициента теплоотдачи

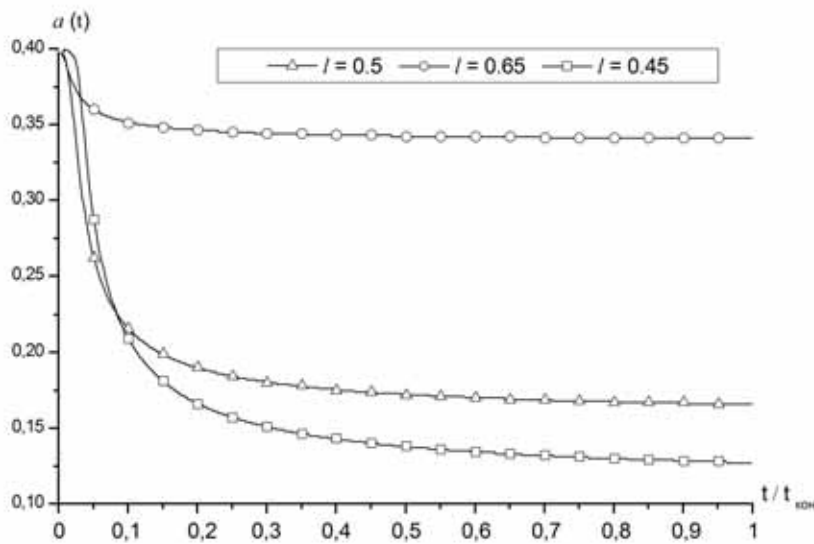


Рис. 4: Влияние длины стержня на закон движения границы раздела фаз

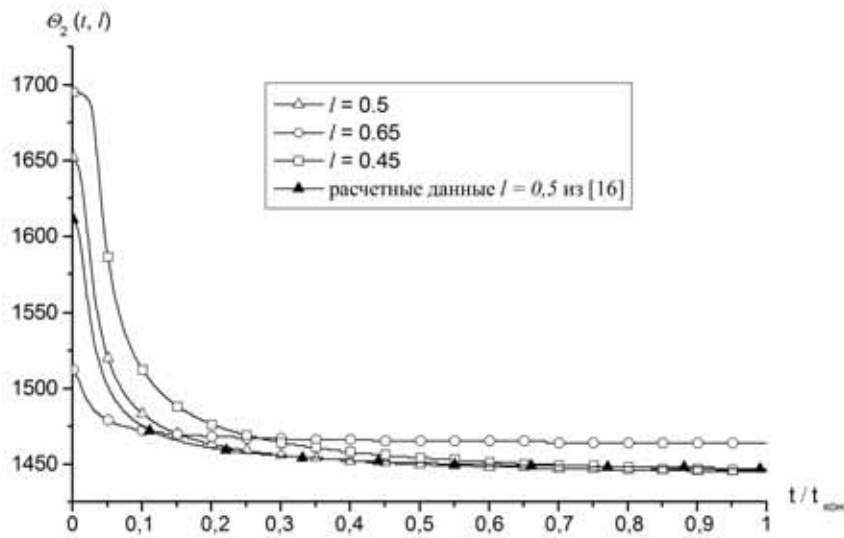


Рис. 5: Влияние длины стержня на температуру его торцевой поверхности

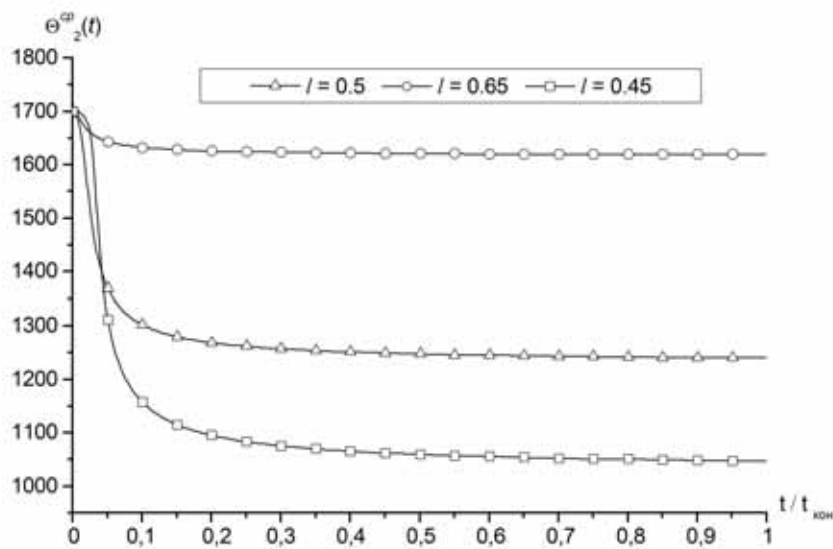


Рис. 6: Временная зависимость среднемассовой температуры твердой фазы стержня при $\alpha_{1,кон} = 40 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) для различных значений его длины

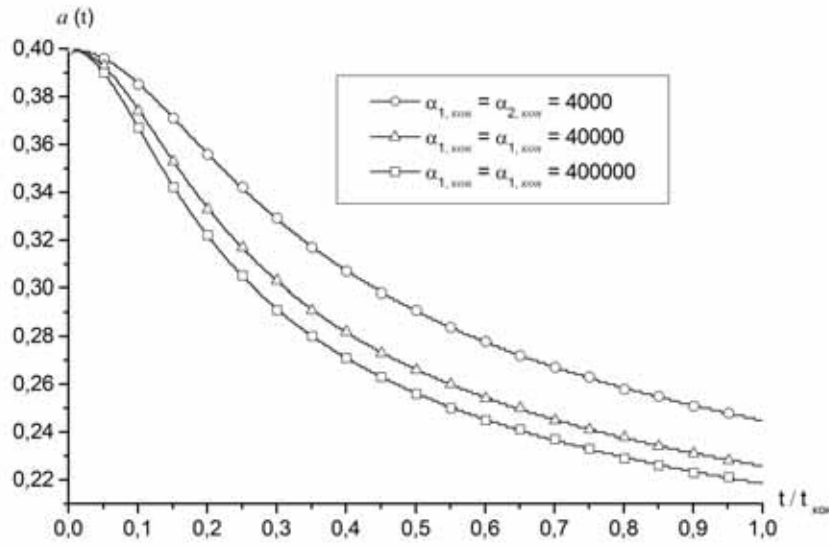


Рис. 7: Закон движения фронта кристаллизации растущего стержня при различных значениях коэффициента теплоотдачи

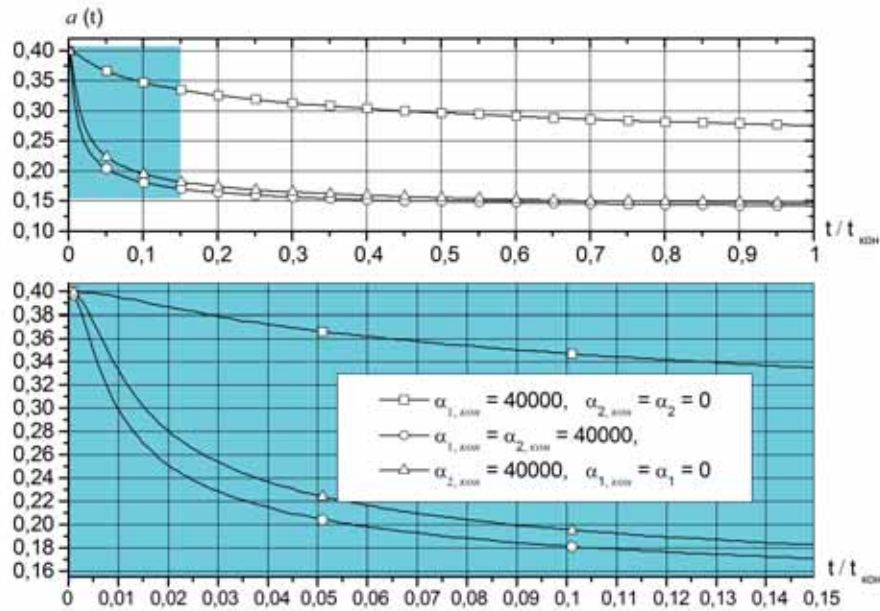


Рис. 8: Влияние условий теплообмена с окружающей средой на процесс кристаллизации в стержне

Численные результаты представлены для следующих значения основных параметров: $l = 0,5$ м; $l_0 = 0,4$ м; $E_2 = 1,4 \cdot 10^{10}$ кг/м²; $\theta^0 = 1765$ К; $\theta_{cp} = 293$ К; $f = 1800$ К; $\mu = 2,4$ МДж/кг; $\rho_1 = 7000$ кг/м³; $\rho_2 = 7800$ кг/м³; $c_1 = 837$ Дж/(кг·К); $c_2 = 565$ Дж/(кг·К); $\lambda_1 = 23,3$ Вт/(м·К); $\lambda_2 = 48,1$ Вт/(м·К); $\epsilon_{12} = 0,8$ (рис. 1–6).

На рис. 1 – 3 приведены границы раздела фаз, изменение во времени температуры торцевой поверхности стержня и временная зависимость среднemasсовой температуры твердой фазы для стержня длиной $l = 0,5$ м ($l_0 = 0,4$ м) при различных значениях коэффициента теплоотдачи.

Анализ полученных результатов показывает, что интенсификация охлаждения, во-первых, снижает время затвердевания, а во-вторых, увеличивает размеры твердой фазы при фиксированном значении времени (рис. 1). Увеличение коэффициента теплоотдачи приводит к резкому снижению температуры $\theta_2(t, l)$ в начальный момент времени (рис. 2). В дальнейшем эта температура изменяется не столь резко и на протяжении всего процесса затвердевания является монотонно убывающей функцией, а при больших значениях коэффициента теплоотдачи торцевая поверхность мгновенно охлаждается до температуры, близкой к температуре окружающей среды, которая до конца процесса остается постоянной.

На рис. 4 – 6 представлены зависимости $a(t)$, $\theta_2(t, l)$, $\theta_2^{cp}(t)$ при коэффициенте теплоотдачи $\alpha_{1,кон} = 40 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) для стержня различной длины, но при $l_0 = 0,4$ м. На графиках (см. рис. 4) показано, что изменение начальной длины твердой фазы оказывает значительное влияние на процесс кристаллизации. Это подтверждают полученные результаты (см. рис. 5,6). Таким образом, установлено, что на затвердевания значительное влияние оказывают как геометрические размеры тела, так и условия теплообмена с окружающей средой, что согласуется с известными экспериментальными и расчетными данными [15, 16]. В случае наращивания стержня при тепловом взаимодействии боковой и торцевой поверхностей с окружающей средой с учетом фазового перехода результаты решения уравнений (3.20), (3.21) представлены на рис. 7,8.

Как видим (рис. 7), при наличии теплообмена боковой поверхности с окружающей средой существенно уменьшается время затвердевания материала. Более того, как следует из графиков (рис. 8), теплообмен с боковой поверхности стержня оказывает большее влияние на процесс кристаллизации, чем с торцевой, что подтверждается известными расчетными и экспериментальными данными [15, 16].

5. Выводы

Анализ полученных результатов показывает, что изменение условий теплообмена с окружающей средой и геометрических размеров оказывает определяющее влияние на процесс кристаллизации (закон движения фронта кристаллизации), а следовательно, и на температурные и механические поля.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- разработан приближенный аналитический метод и алгоритм решения задачи термовязкоупругости для растущих тел при наличии фазового перехода с учетом теплообмена с окружающей средой;
- на основании полученного метода закон движения границы раздела фаз, температурное поле и напряженно-деформированное состояние определяются в ходе решения так называемой связанной задачи термовязкоупругости;
- полученное приближенное аналитическое решение задачи позволяет моделировать различные технологические процессы.

Библиографические ссылки

1. *Ткачук, А.Н.* Исследования термоупругих контактных задач элементов прессформ для литья под давлением с учетом фазовых превращений в отливке/ А.Н. Ткачук // Вестн. НТУ «ХПИ». Сер.: Машинознавство і САПР. — 2008. — №2. — С. 144–158.
2. *Наумик, В.В.* Физическое моделирование процессов управляемой кристаллизации отливок/ В.В. Наумик // Матеріали VII Міжнар. наук.-техн. конф. «Литво-2011». — Запоріжжя, 2011. — С. 139–140.
3. *Сенченко, І.К.* Оцінка ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності при імпульсному навантаженні півпростору [Текст] / І.К. Сенченко, Н.Д. Оксенчук // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки, 2013. — № 3. — С. 217–219.
4. *Куликов, Р.Г.* Численная методика решения задачи деформирования полимерной кристаллизующейся среды с учетом больших деформаций/ Р. Г. Куликов, Т.Г. Куликова // Вычислит. механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 172–180.
5. *Кульбовский, И.К.* Компьютерное моделирование процесса кристаллизации массивных отливок втулок цилиндров судовых дизелей/ И.К. Кульбовский, С.В. Карелин, Д.А. Илюшкин // Вестн. БГТУ. — 2008. — № 2 (18). — С. 16–19.
6. *Постольник, Ю.С.* Проблемы нелинейности в металлургической термомеханике/ Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов, В.И. Тимошпольский // Матеріали Всеукр. наук. конф. "Мат. пробл. техн. механіки". — Дніпродзержинськ, 2001. — С. 86.
7. *Постольник, Ю.С.* Комп'ютеризація методик розрахунку нелінійних теплових процесів металургійного виробництва [Текст] / Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов // Матеріали міждерж. наук.-метод. конф. Комп'ютерне моделювання". — Дніпродзержинськ, 2001. — С. 125–126.
8. *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности/ А.В. Лыков. — М.: Высш. шк., 1967. — 560 с.
9. *Веселовский, В.Б.* Решение связанной задачи термоупругости для растущего стержня при наличии фазового перехода/ В.Б. Веселовский, А.В. Сяев // Тр. ин-та прикл. математики и механики НАН Украины.— Донецк, 2001. — Т.6. — С. 20–25.

10. *Веселовский, В.Б.* Математическое моделирование и решение связанных задач термовязкоупругости для двухфазных тел / В.Б. Веселовский, А.В. Сясев // Теоретическая и прикладная механика. — Донецк, 2002. — Вып. 35. — С. 93–100.
11. *Карнаухов, В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости / В.Г. Карнаухов. — К.: Наук. думка, 1982. — 250 с.
12. *Сясев, А.В.* Приближенный аналитический метод расчета растущих тел с учетом фазового перехода / А.В. Сясев // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. — 2001. — Вип.5, Т.1. — С. 125–137.
13. *Любов, Б.Я.* Теория кристаллизации в больших объемах / Б.Я. Люб. — М.: Наука, 1975. — 256 с.
14. *Сясев, А.В.* Алгоритм решения задачи о кристаллизации стержня с учетом взаимодействия температурных и механических полей / А.В. Сясев, М.В. Костащук // Матеріали V Міжнар. наук. конф. "Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу". — Д., 2014. — С. 159–163.
15. *Никитенко, Н.И.* Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток / Н.И. Никитенко. — К.: Наук. думка, 1978. — 213 с.
16. *Арутюнян, Н. Х.* Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н.Х. Арутюнян, А.Д. Дроздов, В.Э. Наумов. — М.: Наука, 1987. — 472 с.

Надійшла до редколегії 10.02.2015