

УДК 517.9

## ГИДРОДИНАМИКА, КОСМОГОНИЯ И КОСМОЛОГИЯ В РАБОТАХ В. И. ПЕРЕХРЕСТА: ОТ ПЛАНЕТАРНЫХ ВИХРЕЙ ДО ГАЛАКТИК И ТЁМНОЙ ЭНЕРГИИ

В. Л. Борщ

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,  
механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,  
Днепропетровск, пр. Гагарина, 72, 49010. E-mail: bvl@dsu.dp.ua*

*Представлено проф. Когутом П. И.*

**Рассмотрены работы В. И. Перехреста, в которых даны многочисленные приложения одного класса точных вихревых решений уравнения Эйлера для несжимаемой среды к задачам небесной механики, космогонии и космологии.**

**Ключевые слова:** уравнение Эйлера, точное решение, вихревое движение.

*Ei incumbit probatio, qui digit, non qui negat.*

### Введение

... Решающий, всеокарушительный удар — опровержение атеизма в основе системы мира — должен был быть, по замыслу Бентли, нанесен противнику в заключительных, седьмой и восьмой, проповедях. И в предвкушении грядущей победы Бентли устремил свой проникающий взор на вышедшее в 1687 г. сочинение члена Тринити колледжа Исаака Ньютона "Математические начала натуральной философии". О "Началах" говорили разное, и Бентли с присущей ему добросовестностью вознамерился самостоятельно составить суждение о весомости ньютоновских аргументов. И тут его ожидало страшное разочарование: раскрыв "Начала", Бентли быстро понял, что подготовки филолога-классика для понимания этой книги явно недостаточно [19].

В 2002 г. В. И. Перехрест опубликовал работу [84], в которой получил класс точных вихревых решений уравнения Эйлера для несжимаемой среды (жидкости). В механике отношение к точным решениям уравнений — именно уравнений, а не краевых, в частности, граничных задач — двойное. С одной стороны, каждое новое точное решение открывает какие-то новые свойства уравнений. С другой — точные решения, как правило, очень сложно приспособить к решению краевых задач, поскольку точные решения определены

во всём пространстве событий, например, в  $\mathbf{R}^3$ , и, вообще говоря, не допускают сопряжения с другими решениями. Вот почему большой удачей считается возможность найти приложение для найденного точного решения и испытать последнее. Автор статьи, со времени выхода работы [84] и работ, её продолжающих, открыто высказывал на семинарах свою точку зрения, состоящую в том, что следует сосредоточить внимание на изучении свойств точных решений (к слову сказать, В. И. Перехрестом построены многие классы точных решений уравнения Эйлера для несжимаемой среды), воздерживаясь от широкого приложения таких решений к различным явлениям. Можно перечислить многие причины, порождающие сложность приложения точных решений. Для решения [84] достаточно указать его неограниченность при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . В. И. Перехрестом были выбраны достаточно сложные области приложения точного решения [84] — вначале небесная механика и космогония, а затем и космология. С 2002 г. по настоящее время В. И. Перехрест опубликовал достаточно большое число работ по приложениям точного решения [84] к указанным областям физики, что позволило выстроить цельное представление как о точном решении, так и об этих работах. Данная статья написана после внимательного, “с карандашом”, прочтения работ [84–98] В. И. Перехреста. Точка зрения автора статьи состоит в том, что классические разделы современной физики, в первую очередь, — механики, достаточно хорошо подогнаны друг к другу и согласованы между собой. Поэтому, предпринимая пересмотр устоявшихся точек зрения на известные задачи классических разделов физики, следует быть готовым к ответу на очень широкий круг вопросов. Тем более это касается нерешённых задач современных разделов физики.

Статья построена таким образом. В разделе 1 изложены основные методы классической механики в форме аксиом и основных теорем. Методы механики сплошной среды отличны от методов классической механики, но задача раздела 1 состоит в подчёркивании детерминизма механики вообще (чего, вообще говоря, нельзя сказать о работах [84–98]), и введении понятий, которые понадобятся при обсуждении орбитальных движений в планетных системах (разделы 2 и 4). Кроме того, обсуждение некоторых результатов работы [97] потребует применения теоремы о вириале, поэтому важно сразу же высказать понимание этой теоремы и условий её применимости, отличающееся от работы [97]. Применение этой теоремы в изложении раздела 1 допустимо к движению сплошной среды, если в известном решении рассматривать отдельные линии тока, которые становятся траекториями частиц сплошной среды. Для подобных траекторий силовое поле известно как из решения исходной задачи (точное решение), так и из решения соответствующей задачи кинематики.

В разделе 2 кратко приведены результаты классической небесной механики в части, касающейся классической задачи двух тел. На известном решении последней построено сравнение с результатами обобщения класса точных вихревых решений уравнения Эйлера на планетные движения (раздел 4).

В разделе 3 конспективно изложены методы работы [84] и работ [13, 17]. Это позволяет читателю статьи иметь „под рукой“ описания данных мето-

дов, а автору — упростить обсуждение результатов работ [84–98] и их истолкование и разъяснение в тех случаях, когда есть необходимость обращаться к методам получения последних.

Содержание разделов 4, 5 и 6 очевидно из их названий — здесь представлена точка зрения автора статьи на результаты работ [84–98], основанных на приложении класса точных вихревых решений уравнения Эйлера для несжимаемой среды, полученного в работе [84], к задачам небесной механики, космогонии и космологии.

Завершает статью раздел выводов, в котором обобщены результаты и наблюдения разделов 1–6. Все слова названия статьи взяты из работ [84–98]. К сожалению, и так немалый объём статьи не позволил включить результаты прочтения всех работ [84–98]. Обильные прибавления к тексту статьи извлечений из книг и статей — это не совсем цитаты или эпиграфы; их назначение — подчеркнуть согласованность, пусть и не всегда безупречную, разделов физики и непростой путь, каким это было достигнуто. Хотелось бы также обратить внимание читателя на изменение языка науки — безупречность классического периода, размытость и нечёткость современного.

## 1. Основные теоремы классической механики

Требование построения физико-математических дисциплин на аксиоматической основе было выдвинуто Гильбертом в конце прошлого века (шестая проблема Гильберта) и рассматривалось им как необходимое условие достижения абсолютной строгости.

Впервые основные аксиомы механики в систематическом виде были сформулированы в 1687 году Ньютоном. Их исследование . . . было предпринято уже в нашем веке. Это потребовало изменить форму представления аксиом механики для того, чтобы максимально приспособить ее к применению методов математической логики.

В настоящее время имеется несколько форм представления аксиом механики. Есть аксиоматические системы, основанные на рассмотрении дискретных совокупностей материальных точек. Есть системы, в которых уже в аксиоматике отражена идея континуума. Некоторые системы были созданы под влиянием идей Маха, который утверждал, что в науку нельзя вводить понятие, не допускающее конструктивной проверки на практике. Поэтому все понятия такой метааксиоматической системы строятся так, чтобы ими можно было воспользоваться для выполнения конкретных измерений. В системах этого типа неперенным является требование соответствия между первоначальными понятиями на формальном, аксиоматическом уровне и наблюдаемыми величинами на эмпирическом уровне.

Наконец, известна аксиоматизация в чисто гильбертовском духе, когда первичные категории просто перечисляются и их содержание определяется лишь вводимыми аксиомами [23].

Следуя книге Журавлёва [23] изложим аксиомы классической механики (механики системы материальных точек) с небольшими изменениями и прибавлениями, которые сопроводим соответствующими ссылками.

**Аксиома 1.1.** Справедливы определение евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  и отношения между геометрическими объектами пространства (точками, прямыми, плоскостями).

Описание геометрических объектов подразумевает декартову систему координат. Например, указателем точки служит вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

**Аксиома 1.2.** Все объекты в  $\mathbb{R}^3$  зависят от параметра  $t \in \mathbb{R}$  (времени).

Это значит, что в механике рассматриваются отображения  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (движения). Система координат и способ параметризации по  $t$  называется системой отсчёта.

**Аксиома 1.3.** Материальная точка  $(\mathbf{x}, m)$  — геометрическая точка  $\mathbf{x}$ , которой поставлен в соответствие параметр  $m = \text{const} \in \mathbb{R}_+$  (масса).

**Аксиома 1.4.** Каждой паре материальных точек  $(\mathbf{x}_1, m_1)$  и  $(\mathbf{x}_2, m_2)$  может быть поставлена в соответствие пара векторов  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  (сил):  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  (третий закон Ньютона).

Сила  $\mathbf{F}$  приложена к материальной точке или действует на материальную точку. Материальные точки, которым поставлены в соответствие удовлетворяющие приведённому условию силы — взаимодействующие. К одной материальной точке из системы таких может быть приложено несколько сил — их векторная сумма называется равнодействующей.

**Аксиома 1.5.** В евклидовом пространстве существует инерциальная система отсчёта (первый закон Ньютона):  $m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$  (второй закон Ньютона).

Для удобства дальнейшего изложения немного изменим привычные названия, заменив материальную точку (материальной) частицей; точкой же будем называть геометрическую точку (положение частицы). Это позволит единообразно описывать также и движение сплошной среды.

Движение частицы задано, если известна функция  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in [t', t'']$ . Траекторией частицы называется образ отображения  $[t', t''] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , скоростью и ускорением — соответственно векторы  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$  и  $\mathbf{a}(t) := \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$  (фазовых пространств).

В механике, как правило, рассматривают силы, зависящие от положения частиц и времени и не зависящие от скорости частиц:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ . Количеством движения (импульсом) частицы называется векторная функция  $\mathbf{p}(t) := m\dot{\mathbf{x}}(t) = m\mathbf{v}(t)$ . Моментом количества движения (кинетическим моментом) частицы относительно точки  $\mathbf{x}_*$  называется векторная функция  $\mathbf{K}(t) := (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)) \times \mathbf{p}(t)$ . Кинетической энергией частицы называется скалярная функция  $T(t) := \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2(t) = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2(t)$ . Моментом силы  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  (действующей на частицу в точке  $\mathbf{x}$ ) относительно точки  $\mathbf{x}_*$  называется векторная

функция  $\mathbf{R}(t) := (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$ . Импульсом силы  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  на траектории частицы  $\mathbf{x}(t), t \in [t', t'']$ , называется векторная величина

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F} dt = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) dt.$$

Работой силы на траектории  $\mathbf{x}(t), t \in [t', t'']$  называется скалярная величина

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt.$$

Силовое поле  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  называется *потенциальным*, если существует скалярная функция — *потенциал*  $V(\mathbf{x}, t): \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\nabla V(\mathbf{x}, t)$ . Стационарное потенциальное силовое поле называется *консервативным*. Для консервативного силового поля работа по перемещению частицы из точки  $\mathbf{x}'$  в точку  $\mathbf{x}''$  равна  $-(V(\mathbf{x}'') - V(\mathbf{x}'))$ , то есть не зависит от траектории движения, а только от крайних точек траектории. Тодхантер [59] изложил историю появления в механике понятия потенциала (§§ 779, 789) и названия потенциала (§ 790).

*Вириалом* частицы называется скалярная величина (разъяснения о вириале см. далее в теореме 1.5 на с. 124)

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t). \quad (1.1)$$

Приведённые определения числовых мер для частицы допускают обобщение для системы из  $N$  частиц, как соответствующие аддитивные функции системы частиц.

*Центром инерции* (*центром масс*, или *барицентром* [5]) системы частиц называется точка  $\mathbf{x}_c$ :

$$\left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{x}_c = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i. \quad (1.2)$$

Согласно Лагранжу [5], силы взаимодействия в системе из  $N$  частиц потенциальны, если зависят только от взаимных расстояний. Утверждение о существовании потенциала верно также для стационарного центрального (относительно неподвижного центра  $\mathbf{x}_*$ ) силового поля, независимо от числа частиц. Силовое поле называется *центральной*, если действующая на частицу сила направлена вдоль прямой, соединяющей частицу с центром  $\mathbf{x}_*$ , а величина силы зависит только от расстояния частицы до центра.

Теперь напомним основные теоремы механики системы частиц.

**Теорема 1.1.** *Производная по времени от количества движения системы частиц равна сумме всех внешних сил, действующих на систему*

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (1.3)$$

Сумма всех внутренних сил  $\mathbf{F}_i^{(i)}$  равна нулю согласно аксиоме 1.5. В отсутствие внешних сил  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  (замкнутой системы) количество движения системы не меняется (скорость движения центра масс системы постоянна)

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \dot{\mathbf{x}}_c = \text{const}. \quad (1.4)$$

**Теорема 1.2.** Производная по времени от кинетического момента системы частиц относительно неподвижной точки равна моменту всех внешних сил, вычисленному относительно той же точки

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*) \times \mathbf{p}_i \right) = -\dot{\mathbf{x}}_* \times \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*) \times \dot{\mathbf{p}}_i = \\ &= \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{x}}_* + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{x}}_* + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*) \times \mathbf{F}_i^{(e)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кинетический момент замкнутой системы частиц относительно любой неподвижной точки ( $\dot{\mathbf{x}}_* = \mathbf{0}$ ) не меняется:  $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \text{const}$ .

**Теорема 1.3.** Производная по времени от кинетической энергии системы частиц равна мощности всех сил

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i. \quad (1.6)$$

Эту теорему иногда называют *теоремой живой сил*.

Во времена Ньютона «силой» (лат. vis) назывались многие объекты, например, ускорение точки. Произведение массы точки на квадрат ее скорости Лейбниц (G. W. Leibnitz) назвал vis viva (живая сила). Современный термин «сила» соответствует vis motrix (ускоряющая сила) у Ньютона [5].

... Лейбницу принадлежит введение в механику живой силы или, как стали говорить в XIX столетии, меры кинетической энергии в ее механической форме. Это было ... результатом целенаправленного поиска. Материя должна была быть наделена активностью, чем-то таким, что, как выражался Лейбниц, находится на полпути между способностью действовать и самим действием [52].

... Лейбниц вел длительную полемику со сторонниками Декарта, настаивая на том, что произведение массы тела на квадрат его скорости (живая сила по Лейбницу) является истинной мерой движения, а не произведение массы на скорость (импульс), как считал Декарт [27].

... Лейбниц живой силой называл произведение  $m\mathbf{v}^2$  без делителя 2. Такое определение живой силы встречается и до сих пор у французских авторов, но его следует признать неудачным, так как это определение влечёт за собой необходимость при формулировании закона изменения кинетической энергии, или живой силы, говорить о «половине живой силы» [46].

В старых учебниках эта величина называлась «живой силой»; этой величиной воспользовались впервые Х. Гюйгенс и Г. Лейбниц; термин «живая сила» ввел впервые Бернулли И. [9], стр. 72): «Живая сила есть та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле. Наоборот, мертвая сила — та, которую получает тело без движения, если оно побуждается и принуждается к движению, или же которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении» [14].

**Теорема 1.4.** *Если система частиц консервативна (находится в консервативном силовом поле), то энергия системы сохраняется*

$$\dot{T} - \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i = \dot{T} + \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} = \dot{T} + \dot{V} = 0 \Rightarrow E := T + V = \text{const},$$

где  $V$  называется ещё *потенциальной энергией*.

**Теорема 1.5.** *Если система частиц совершает финитное движение, то среднее значение кинетической энергии системы частиц равно среднему значению вириала системы*

$$\langle T \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \right\rangle. \quad (1.7)$$

Для доказательства теоремы, называемой теоремой Клаузиса [74] о вириале (1.1), запишем выражение для кинетической энергии системы из  $N$  частиц, которое преобразуем с применением правила Лейбница для производной по времени от произведения двух функций и аксиомы 1.5

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \frac{dG}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i, \quad G(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i. \quad (1.8)$$

Далее вычислим среднее значение по времени от каждого слагаемого

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} + \left\langle -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \right\rangle, \quad (1.9)$$

где осреднение определено так

$$\langle (\cdot) \rangle := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\cdot)(t) dt.$$

Первое слагаемое в правой части (1.9) обращается в нуль, если выполняется одно из условий *финитности* движения: 1)  $\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{x}_i(0) \Rightarrow G(\tau) = G(0)$ , что означает периодичность движения; 2) при  $\tau \rightarrow \infty$  функция  $G(\tau)$  ограничена, тогда осреднение следует понимать в предельном смысле. (Let there be any system whatever of material points in stationary motion. By stationary motion I mean one in which the points do not continually remove further and further from their original position, and the velocities do not alter continuously in the same direction, but the points move within a limited space, and the velocities only fluctuate within certain limits. Of this nature are all periodic motions — such as those of the planets about the sun, and the vibrations of elastic bodies, — further, such irregular motions as are attributed to the atoms and molecules of a body in order to explain its heat [74]).

Теорема Клаузиуса о вириале выводима методами механики, но имеет статистическую природу, поскольку вводит осреднение по времени, но не по системе частиц. Это означает, что теорема сохраняет силу и для одной частицы. (Hence our theorem is demonstrated; and at the same time it is evident that it is not merely valid for the whole system of material points, and for the three directions of coordinates together; but also for each material point and for each direction separately [74]). Другими словами, вириал есть аддитивная функция системы частиц. Статистическая суть теоремы Клаузиуса о вириале, по-видимому, одна из причин, по которым эта теорема отсутствует в учебных и справочных руководствах по теоретической механике для механико-математических факультетов и присутствует в изданиях для физических факультетов и вузов, например, [2, 15, 23, 33, 51].

Пуанкаре [79] принадлежит иная формулировка теоремы о вириале.

**Теорема 1.6.** *Момент инерции  $I$  системы частиц относительно начала инерциальной системы отсчёта (например, центра инерции системы) удовлетворяет следующему динамическому уравнению*

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i^2 \right) = 2 \left( T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \right). \quad (1.10)$$

Действительно, умножим уравнения движения (см. аксиому 1.5 на с. 121) системы из  $N$  частиц скалярно на положения  $\mathbf{x}_i$ , сложим и преобразуем очевидным образом к виду уравнения (1.10).



**Теорема 1.7.** *Если система частиц консервативна, то утверждение (1.7) теоремы Клаузиуса о вириале принимает вид*

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i \right\rangle. \quad (1.11)$$

**Теорема 1.8.** *Если консервативная система частиц совершает финитное движение, то утверждение (1.10) теоремы Пуанкаре о вириале принимает вид (1.11).*

Если потенциал  $V$  есть однородная функция степени  $s$  от переменных  $\mathbf{x}_i$ , то, в силу формулы Эйлера для однородных функций [64], равенство (1.11) принимает вид следующего

$$\langle T \rangle = \frac{s}{2} \langle V \rangle, \quad (1.12)$$

которое примем за утверждение теоремы о вириале для консервативной системы, совершающей финитное движение. Для системы частиц, потенциал взаимодействия которых зависит от величин, обратных взаимным расстояниям ( $s = -1$ ), утверждение теоремы о вириале сводится к равенству

$$2 \langle T \rangle + \langle V \rangle = 0, \quad (1.13)$$

а для системы частиц, потенциал взаимодействия которых зависит от квадратов взаимных расстояний ( $s = +2$ ), соответственно имеем

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle. \quad (1.14)$$

Отметим следующее. Под утверждением теоремы о вириале Пуанкаре [79] понимает равенство (1.13) (§ 74. Théorème du viriel, с. 90–91), при выводе которого левая часть (1.10) записана так

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{p}_i \right).$$

Уравнение (1.10) впервые записал Эддингтон [75], который при выводе равенства (1.13) рассматривал поведение левой части (1.10), то есть второй производной момента инерции системы частиц. (This evidently vanishes in a steady state, because the moment of inertia cannot be altering [75]). Для нестационарных или неустойчивых движений системы частиц, потенциал взаимодействия которых зависит от величин, обратных взаимным расстояниям ( $s = -1$ ), (1.10) принимает вид уравнения (Пуанкаре – Эддингтона [30])

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + V,$$

в которое входят только мгновенные значения величин  $I$ ,  $T$  и  $V$ .

Для сплошной среды соответствующие средние значения в вириальных теоремах должны быть заменены осреднёнными по конечному или бесконечному промежутку времени (см. выше условия финитности движения) интегралами по траекториям частиц, пучков частиц или по области движения, непрерывно заполненной траекториями частиц. Другими словами, вириал есть функционал от движения сплошной среды, вычисляемый по соответствующим многообразиям. Локальные значения состояния сплошной среды не входят в формулировки теорем Клаузиуса и Пуанкаре о вириале.

Отметим также аксиоматику классической механики, изложенную в обзоре Арнольда [5]. В последней введены также и принципы. На один принцип — детерминированности — обращаем особое внимание, по сути — это подчёркивание особой роли в механике аксиомы 1.4.

## 2. Классическая небесная механика

Кеплер, обрабатывая наблюдения за движением планет Солнечной системы, обратил внимание на то, что для них имеют место следующие три закона, впоследствии названные законами Кеплера.

1. Каждая из планет Солнечной системы совершает плоское движение с постоянной секториальной скоростью.
2. Траекториями всех планет служат эллипсы, в общем фокусе которых расположено Солнце.
3. Отношение квадратов времен  $T$  обращения планет к кубам больших полуосей их эллиптических траекторий одинаково для всех планет [60].

Как известно, основные принципы динамики изложены Ньютоном в его знаменитом сочинении «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*», изданном в 1687 году на средства его друга астронома Галлея. По существу, эта книга написана с единственной целью — доказать эквивалентность законов Кеплера и предположения (подсказанного Ньютоном Гуком), что ускорение планеты направлено к центру Солнца и что величина ускорения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между планетой и Солнцем. Для этого Ньютоном потребовалось систематизировать принципы динамики (так появились знаменитые законы Ньютона) и изложить основы «теории флюксий» (математический анализ функций одной переменной). Соединение принципа равенства действия и противодействия и закона обратных квадратов привело Ньютона к теории гравитации — взаимодействию на расстоянии [27].

... классическая механика не интересуется физической сущностью явлений, обуславливающих возникновение взаимодействия объектов через поля. Механика конста-

тирует лишь тот факт, что при наличии в пространстве материального объекта массы  $M$  непосредственно не связанная с этим объектом материальная точка  $m$  при отсутствии каких-либо иных воздействий не будет двигаться по отношению к системе, принятой за инерциальную, прямолинейно и равномерно, т.е. производная  $d\mathbf{q}/dt$  будет отлична от нуля. Тогда в соответствии с общим методом классической механики ... совокупность физических факторов, которые обусловили появление  $d\mathbf{q}/dt$ , называют силой и представляют ее вектором  $d\mathbf{q}/dt$ . Вводимые так силы называются силами всемирного тяготения.

Ньютон, исходя из открытых к этому времени трех законов Кеплера о движении планет Солнечной системы, дедуктивно установил, что для того чтобы могло возникнуть видимое движение планет, на них должна действовать сила, направленная к Солнцу и равная [2]

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.1)$$

где  $m$  и  $M$  — массы планеты и Солнца,  $\mathbf{x}$  — вектор, проведенный от Солнца к планете, знак минус указывает, что сила направлена от планеты к Солнцу,  $\gamma = 6,6745 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$  — коэффициент всемирного тяготения.

Рассмотрим простейшую задачу небесной механики — *прямую* задачу двух тел (частиц), сила взаимного действия которых дана формулой (2.1). Возникающие при этом движения называются кеплеровыми. Постановка этой задачи (задачи Коши) включает уравнения движения

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \end{cases} \quad t > 0, \quad (2.2)$$

и начальные условия  $\mathbf{x}_{1,2}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{1,2}(0)$ , где  $\mathbf{x}_{1,2}(t)$  — положения частиц в инерциальной системе отсчёта,  $m_{1,2}$  — массы частиц.

Задача (2.2) допускает приведение к задаче о движении одной частицы в поле тяготения неподвижного центра (см. раздел 1) двумя способами [58].

Согласно *первому* способу, вычтем из второго уравнения задачи (2.2), разделённого на  $m_2$ , первое, разделённое на  $m_1$ , и получим уравнение движения частицы единичной массы в поле тяготения частицы массы  $m_1 + m_2$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1. \quad (2.3)$$

Согласно *второму* способу, сложим первое и второе уравнения задачи (2.2), получим уравнение  $m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$  и дважды проинтегрируем его

$$m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{a} t + \mathbf{b}, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — постоянные векторы, которые можно выразить через начальные условия задачи (2.2). Интеграл (2.4) представляет частный случай (1.4) теоремы 1.1 на с. 122 о движении центра масс для системы двух частиц, внутренние силы которой суть ньютоновские (2.1). Если начало инерциальной системы отсчёта, в которой поставлена задача (2.2), поместить в барицентр, то есть принять, что [14, 33]:  $m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , тогда  $m_1 \mathbf{x}_1 = -m \mathbf{x}$ ,  $m_2 \mathbf{x}_2 = +m \mathbf{x}$ , тогда вместо двух уравнений задачи (2.2) будем иметь одно (поскольку в барицентрической системе отсчёта траектории материальных точек суть плоские подобные кривые, с коэффициентом подобия  $m_1/m_2$ )

$$m \ddot{\mathbf{x}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.5)$$

где  $m$  — приведённая масса. После умножения обеих частей последнего уравнения на величину, обратную  $m$ , снова получим уравнение (2.3).

Итак, вместо задачи (2.2) для двух уравнений имеем задачу для одного уравнения (2.3); начальные условия новой задачи могут быть получены из начальных условий задачи (2.2). Отметим, что для силы в правой части уравнения (2.3) существует очевидный ньютонов потенциал (см. также раздел 1, с. 122)

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r} = -\frac{\sigma}{r}, \quad r := |\mathbf{x}|. \quad (2.6)$$

Новая задача о кеплеровом движении может быть решена с помощью одних только интегралов уравнения (2.3), число которых равно двум.

*Первый* интеграл (кинетического момента, см. определение в разделе 1 на с. 121) получим умножив уравнение (2.5) векторно на  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , и проинтегрировав один раз:  $\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c} = \text{const}$ . В действительности, этот интеграл выражает сохранение удельного кинетического момента (интеграл для „полного“ кинетического момента таков:  $\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{p}} = m \mathbf{c} =: \mathbf{K}_0 = \text{const}$ , см. теорему 1.2 в разделе 1 на с. 123). Как следствие теоремы 1.2, верно утверждение о том, что кеплерово движение происходит: 1) в плоскости (Лапласа), перпендикулярной постоянному вектору кинетического момента, если  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ; 2) вдоль прямой, если  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Интеграл удельного кинетического момента, записанный в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  плоскости Лапласа

$$r^2 \dot{\varphi} = c = |\mathbf{c}| = \text{const}, \quad (2.7)$$

показывает, что вектор  $\mathbf{x}$  положения частицы поворачивается в одну и ту же сторону ( $\dot{\varphi} > 0$ ), замечая равные площади за равные промежутки времени

$$S(t'') - S(t') = \frac{c}{2} (t'' - t'), \quad S(t) := \frac{1}{2} \int_0^t r^2(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \frac{ct}{2}. \quad (2.8)$$

Это значит, что в кеплеровом движении секториальная (секторная) скорость движения частицы  $\dot{S} = \frac{c}{2}$  постоянна (первый закон Кеплера).

*Второй* интеграл (энергии, см. теорему 1.4 в разделе 1 на с. 124) сразу запишем в полярной системе координат

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = h = \text{const} \quad (2.9)$$

и преобразуем с помощью первого интеграла (2.7)

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} + V(r) = h. \quad (2.10)$$

Вычислим производную  $\dot{r}$  в (2.10), полагая, что  $r$  есть сложная функция  $t$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = \left\{ \delta = \frac{1}{r} \right\} = -c \frac{d\delta}{d\varphi},$$

тогда интеграл (2.10) примет вид

$$\left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 = 2 \left( \frac{h}{c^2} + \frac{\sigma\delta}{c^2} - \frac{\delta^2}{2} \right). \quad (2.11)$$

Интегрирование уравнения (2.11) первого порядка с разделяющимися переменными сводится к табличному интегралу [58]

$$\frac{c^2}{\sigma} \delta = 1 + \left( 1 + \frac{2hc^2}{\sigma^2} \right) \cos(\varphi - \varphi_0)$$

или, после возвращения к зависимой переменной  $r$ , к интегралу

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{c^2}{\sigma}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{\sigma^2}}, \quad (2.12)$$

который есть (фокальное) уравнение конического сечения в полярных координатах  $(r, \varphi)$ ;  $e$  — эксцентриситет,  $p$  — фокальный параметр (semilactus rectum [45], с. лат. — половина прямой стороны). При  $e = 0$  получаем окружность,  $p = a$ ; при  $0 < e < 1$  — эллипс,  $p = a(1 - e^2)$ ; при  $e = 1$  — параболу,  $p = 2q$  ( $q$  — наименьшее расстояние траектории до фокуса); при  $e > 1$  — гиперболу,  $p = a(e^2 - 1)$ .

Типы траекторий следует рассматривать с учётом начальных условий задачи о кеплеровом движении [2]. Для дальнейшего изложения будет достаточно того, в кеплеровом движении для планет выполняется второй закон Кеплера, поскольку замкнутые траектории финитных движений (орбиты планет) суть эллипсы, для которых

$$pa = b^2, \quad ea = c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (2.13)$$

Поскольку площадь эллипса, равная  $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ , замечается с постоянной секториальной скоростью  $\dot{S} = \frac{c}{2}$ , то для периода обращения имеем зависимость  $2S = cT$ , откуда

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \stackrel{(2.13)}{=} \frac{\sigma}{2h}, \quad T = \frac{2\pi}{c} a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\sigma}}. \quad (2.14)$$

Если вокруг центрального тела (Солнца) с массой  $M$  движутся планеты с массами  $m_1$  и  $m_2$ , то из (2.14) будем иметь третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} : \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \approx 1. \quad (2.15)$$

Постановка прямой задачи двух тел в общем случае, то есть не для кеплеровых движений, основана на уравнении

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(r), \quad r = |\mathbf{x}|, \quad (2.16)$$

которое получено заменой в правой части уравнения (2.3) ньютоновского потенциала потенциалом произвольного центрального поля (см. раздел 1, с. 122). Все источники, на которые сделаны ссылки в данном разделе, рассматривают те или иные обобщения прямой задачи двух тел. В книге Уиттекера [61] приведены результаты решения прямой задачи для потенциалов, зависящих от  $r$  в целой или рациональной степени, причём указаны случаи интегрируемости. Добавим, что для движения в произвольном центральном поле выполняется первый закон Кеплера, что доказывается точно так же, как и для ньютоновского потенциала. Нас, однако, будет интересовать обратная задача.

*Обратная* задача двух тел ставится как задача о виде потенциала в уравнении (2.16), при котором движения будут кеплеровыми, то есть при котором будут выполнены все законы Кеплера.

Ключом к решению обратной задачи служит теорема (иногда — задача) Бертрана, которая обычно приводится в кратком изложении без обоснования.

Существуют лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия пропорциональна  $\frac{1}{r}$  или  $r^2$  [33].

**Теорема 1** (Бертран (I. L. F. Bertrand)). Пусть при некотором  $c \neq 0$  имеется устойчивое относительное равновесие и потенциал  $V$  аналитичен при  $r > 0$ . Если все орбиты, достаточно близкие к круговой, замкнуты, то  $V$  есть либо  $-\sigma r^2$ , либо  $-\alpha/r$  ( $\sigma > 0$ ) [5].

В теореме Бертрана под относительным равновесием понимается движение по окружности  $r = \text{const}$ . Добавим ещё ссылки на книгу Субботина [57], где кратко говорится о задаче Бертрана, и книгу Геронимуса [14], где приведено обсуждение обратной задачи в более общей постановке, сопровождаемой формулировкой и доказательством теоремы Гамильтона.

Отметим также книгу Арнольда [6], в которой изложена история обратной задачи от Ньютона до наших дней. В книге приведены доводы в пользу того, что Ньютон, вопреки частным мнениям, например [82], решил как прямую, так и обратную задачи двух тел.

Следовательно, при движении с потенциалом  $V(r) = -\alpha r^2$  эллиптическая орбита допустима, но центр силы находится не в фокусе, а в центре эллипса. Кроме того, третий закон Кеплера в этом случае не выполняется, в чём проще всего удостовериться на примере круговой орбиты. В самом деле, скорость обращения  $v(r)$  для орбиты любого радиуса  $r$  пропорциональна радиусу, что означает изохронность орбит (кваситвёрдое вращение). Это результат был хорошо известен Ньютону и Лагранжу.

Отдел X. О движении тел по заданным поверхностям и о колебательном движении подвешенных тел.

Предложение XLVII. Теорема XV. Если центростремительная сила пропорциональна расстоянию тела до центра, то все тела, обращающиеся по каким угодно плоскостям, описывают эллипсы, причем времена обращения одинаковы, тела же, движущиеся прямолинейно, колеблясь взад и вперед, совершают каждое полное колебание в продолжение того же периода [50].

Существует еще одна гипотеза о силах притяжения, которая также приводит к эллиптической орбите, а именно — допущение, что сила притяжения прямо пропорциональна расстоянию; но так как это допущение совершенно неприменимо к планетам, то мы на нем дальше не задержимся. По этому вопросу можно посмотреть “Principia” Ньютона, а также работы, в которых его теории даны в аналитическом изложении [32].

Итак, любая теория описывающая планетные движения должна включать, по крайней мере, в главном члене потенциал тяготения  $rV(r) = -\sigma$ , то есть обратно пропорциональный взаимному расстоянию тяготеющих тел.

### 3. Построение одного класса вихревых движений и становление вихревой небесной механики

Гидродинамика относится к небольшому числу фундаментальных проблем математики, успехи в которых могут служить мериллом действительного прогресса математики в целом. Много удивительных достижений в этой области основывается не столько на эксперименте, сколько на глубоких теориях, стимулировавших, в свою очередь,

развитие таких областей математики как теория функций комплексного переменного, топология, теория устойчивости, теория бифуркаций, теория вполне интегрируемых динамических систем.

Несмотря на все эти успехи, гидродинамика с ее поразительными эмпирическими законами остается вызовом для математиков. Такие явления как турбулентность еще не имеют строгой математической теории, и даже вопросы существования решений основных уравнений гидродинамики трехмерной жидкости остаются открытыми.

Простейшей, но уже очень содержательной математической моделью гидродинамики является динамика идеальной (несжимаемой и невязкой) однородной жидкости. С математической точки зрения теория такой жидкости есть ни что иное, как изучение геодезических на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов области течения, где группа снабжена правоинвариантной римановой метрикой.

В 1765 году Л. Эйлер [Eul] опубликовал уравнения движения твердого тела, носящие его имя. Эйлеровские движения твердого тела являются геодезическими на группе вращений трехмерного евклидова пространства. Группа вращений при этом снабжена левоинвариантной римановой метрикой, и теория Эйлера, в сущности, использует только это одно обстоятельство. Уравнения Эйлера сохраняют силу для произвольной группы. Для других групп также получаются «уравнения Эйлера» — например, уравнения движения твердого тела в многомерном пространстве, уравнения Эйлера гидродинамики идеальной жидкости и т. д. [7].

Движение идеальной несжимаемой сплошной среды в потенциальном силовом поле подчиняется системе уравнений неразрывности (сохранения массы, см. аксиому 1.3 на с. 121) и Эйлера (сохранения количества движения, см. аксиому 1.5 на с. 121) [35, 56]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) - \rho \nabla V(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\rho = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$  — соответственно плотность, скорость и давление среды;  $(\mathbf{x}, t)$  — независимые переменные,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ ;  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\mathbf{v}, p)$  — зависимые переменные (распределения).

Необходимый для дальнейшего изложения интеграл системы (3.1) можно получить двумя способами. Согласно *первому*, умножим уравнение Эйлера скалярно на  $\mathbf{v}$ , тогда будем иметь  $\dot{B} = 0$ , что означает сохранение величины  $B$  вдоль траекторий  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$

$$B := \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P + V = \text{const}, \quad (3.2)$$

где  $B$  — трёхчлен [35] или функция [27] Бернулли,  $P := p/\rho$  — функция давления [35, 56]. Если движение стационарно (не зависит от  $t$ ), сохранение  $B$  имеет место вдоль линий тока  $\dot{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma))$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Согласно *второму* способу, применим тождество  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b}$  [29],



положив  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$ , к производной  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  в уравнении Эйлера, тогда получим уравнение Громеки–Ламба ( $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v}$ )

$$\nabla B(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

которое для стационарного движения не содержит производной  $\mathbf{v}_t$

$$\nabla B(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Трёхчлен Бернулли  $B$  служит потенциалом для правой части (3.3) и правой части (3.4). Умножая обе части (3.4) скалярно на  $\mathbf{v}$  или  $\boldsymbol{\omega}$  получим интеграл Бернулли  $B = \text{const}$  вдоль линий тока или вихревых линий стационарного движения, вообще говоря, с различными постоянными на разных линиях. Если  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  (при  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$  такие движения называются *винтовыми* [17]), то постоянная одна и та же в  $\mathcal{D}$ .

В работе [84] были построены вихревые движения ( $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ) в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ :  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , с осевой симметрией:  $v_r = v_r(r, \theta)$ ,  $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$ ,  $v_\varphi = v_\varphi(r, \theta)$ ,  $p = p(r, \theta)$ , как многопараметрический класс точных решений системы уравнений (3.1) (но не какой-либо граничной задачи для (3.1)). Метод работы [84] состоит в представлении компонентов вектора скорости через функцию тока  $\psi(r, \theta)$  и циркуляцию  $\Gamma(r, \theta)$ :

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = +\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{r \sin \theta}, \quad (3.5)$$

и подстановке в уравнение Эйлера (уравнение неразрывности для поля скорости (3.5) удовлетворяется тождественно)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) - r \Lambda \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \text{ctg} \theta \Lambda \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{array} \right.$$

где  $\Lambda := \Gamma^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2$ . Далее решение системы уравнений относительно  $\psi$  и  $\Gamma$  разыскивается методом разделения переменных [41]

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(r, \theta) = \phi(r) \sin^2 \theta, \\ p(r, \theta) = p_0 + \frac{\rho}{2} [p_1(r) + p_2(r) \sin^2 \theta], \end{array} \right.$$

который, если положить  $\Gamma = C_0\psi$ , приводит к линейному уравнению третьего порядка относительно функции  $\phi(r)$

$$r^3\phi''' - 2r^2\phi'' + r(C_0^2r^2 - 2)\phi' + 2(4 - C_0^2r^2)\phi = 0.$$

Решение последнего уравнения получено в работе [84] в таком виде

$$\Phi(R) = C_1R^2 + C_2\left(\cos R - \frac{\sin R}{R}\right) + C_3\left(\frac{\cos R}{R} + \sin R\right), \quad (3.6)$$

где  $R = C_0r$  — промежуточная переменная, тогда искомая функция тока

$$\Psi(R, \theta) = \Phi(R) \sin^2\theta, \quad (3.7)$$

а давление

$$p(R, \theta) = p_0 + \frac{\rho}{2} C_0^4 C_2^2 R^{-2} [-4R^{-2}\Phi^2 + (2\Phi\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi^2) \sin^2\theta]. \quad (3.8)$$

Запись давления через функцию тока  $\Psi(R, \theta)$  (или  $\psi(r, \theta)$ ) будет обсуждена в разделе 6. Отметим, что возможность записи решения  $(\mathbf{v}, p)$  системы уравнений (3.1) через промежуточную переменную  $\Psi(R, \theta)$  строго обоснована в методе построения двухпараметрических вихревых движений, изложенному в работе Громеки [17] и второй главе книги Васильева [13].

Кратко перескажем метод [13, 17], поскольку последний будет сопоставлен в разделе 6 с методом работы [84].

Введём в области движения  $\mathcal{D}$  криволинейную ортогональную систему координат  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ , сделаем замену независимых переменных:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ , и будем рассматривать двухпараметрические движения:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}) = \mathbf{v}(q_1, q_2)$ ,  $B = B(\mathbf{q}) = B(q_1, q_2)$ , и такие переменные  $\mathbf{q}$ , коэффициенты Ламе  $H_{1,2,3}$  [35] которых не зависят от  $q_3$ , тогда многообразия  $q_1 = \text{const}$  и  $q_2 = \text{const}$  суть поверхности вращения. Для двухпараметрических движений имеем

$$\frac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = 0,$$

откуда следуют: 1) функциональная зависимость  $v_3 = v_3(v_1, v_2)$ , 2) упрощённые выражения для компонентов  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_3} \right] = + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_2}, \\ \omega_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_1} \right] = - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_1}, \\ \omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_2} \right], \end{cases} \quad (3.9)$$

и 3) упрощённое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(H_2 H_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 v_2)}{\partial q_2} = 0. \quad (3.10)$$

Для уравнений линий тока на поверхности  $q_3 = \text{const}$ , которые запишем в виде уравнения Пфаффа:  $-H_1 v_2 dq_1 + H_2 v_1 dq_2 = 0$ , условие интегрируемости — уравнение неразрывности (3.10), а интегрирующий множитель — коэффициент  $H_3$ , умножение на который позволяет записать уравнение Пфаффа через функцию тока  $\psi(q_1, q_2)$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} dq_2 = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_1} = -H_3 H_1 v_2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = H_2 H_3 v_1. \quad (3.11)$$

Запишем теперь уравнение Громеки–Ламба (3.4) в переменных  $\mathbf{q}$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial B}{\partial q_1} = v_2 \omega_3 - \omega_2 v_3, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial B}{\partial q_2} = v_3 \omega_1 - \omega_3 v_1, \quad \frac{1}{H_3} \frac{\partial B}{\partial q_3} \equiv 0, \quad (3.12)$$

причём из последнего уравнения, в силу (3.9) и (3.11), имеем

$$\frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \frac{\partial(H_3 v_3)}{\partial q_2} = \frac{\partial(H_3 v_3, \psi)}{\partial(q_1, q_2)} = 0,$$

что влечёт функциональную зависимость  $H_3 v_3 = \Phi(\psi)$ .

Умножив уравнения системы (3.12) на соответствующие компоненты вектора скорости и сложив, будем иметь

$$\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial B}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial B}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(B, \psi)}{\partial(q_1, q_2)} = 0,$$

то есть трёхчлен Бернулли также может быть представлен как сложная функция от  $\psi(q_1, q_2)$ :  $B = -F(\psi)$ .

Следовательно, задача построения двухпараметрического движения сведена в [13, 17] к решению следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + H_1 H_2 H_3 F'(\psi) = 0, \\ v_1 = + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad v_2 = - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \quad v_3 = \frac{\Phi(\psi)}{H_3}, \quad B = -F(\psi), \end{cases} \quad (3.13)$$

в которой дифференциальным является только первое, а остальные служат для нахождения компонентов вектора скорости и трёхчлена Бернулли (формулы). Васильев замечает, что первое ... уравнение связывает три функции: функцию тока  $\psi$ , функцию  $\Phi(\psi)$ , выражающую закон изменения компоненты  $v_3$ , и функцию  $F(\psi)$ , выражающую закон распределения энергии. Две из этих трех функций являются произвольными. Наиболее рациональным путем решения задачи будет следующий: назначить произвольно функции  $\Phi(\psi)$  и  $F(\psi)$  и искать функцию  $\psi$ ; тогда математически задача сведется к интегрированию одного уравнения в частных производных [13].

Вернёмся к решению, полученному в работе [84]. Компоненты скорости

$$\begin{cases} \dot{v}_r(r, \theta) = -2 C_1 C_0^2 \cos \theta, \\ \dot{v}_\theta(r, \theta) = +2 C_1 C_0^2 \sin \theta, \\ \dot{v}_\varphi(r, \theta) = r C_1 C_0^3 \sin \theta, \end{cases} \quad (3.14)$$

вычисленные по первому слагаемому  $C_1 R^2 \sin^2 \theta$  в выражении функции тока  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6), описывают поступательное движение среды со скоростью  $v_\infty := v_3 = -2 C_1 C_0^2$  и вращательное с угловой скоростью  $\omega_\infty = C_1 C_0^3$ . Величина  $2\pi v_\infty \omega_\infty^{-1}$  есть шаг траектории частицы (спирали, см. далее), то есть расстояние, на которое частица перемещается вдоль оси  $z$  за время одного оборота вокруг этой же оси. При истолковании же параметра  $C_0$

$$C_0 = -2\omega_\infty v_\infty^{-1}, \quad (3.15)$$

в работах [84,85] вращательное движение названо винтовым (о винтовом движении см. выше), что не согласуется со ссылкой на книгу Васильева [13], в которой подробно изучены винтовые и невинтовые вихревые движения, включая случаи из работы Громеки [17].

Запишем поле скорости  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  (3.14) в цилиндрической  $(\varrho, \varphi, z)$  и декартовой  $(x, y, z)$  системах координат

$$\begin{cases} \dot{v}_\varrho(\varrho) = 0, \\ \dot{v}_\varphi(\varrho) = \varrho \omega_\infty, \\ \dot{v}_z(\varrho) = v_\infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{v}_x(x, y) = -\omega_\infty y, \\ \dot{v}_y(x, y) = +\omega_\infty x, \\ \dot{v}_z(x, y) = v_\infty, \end{cases} \quad (3.16)$$

и поставим кинематическую задачу

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

об определении траектории (линии тока) и ускорения произвольной частицы, положение которой при  $t = 0$  задано. В такой постановке задача кинематики частицы сплошной среды ничем не отличается от задачи кинематики материальной точки теоретической механики (см. например, задачу 3.9 на с. 231 книги [8]), что объясняется тем, что поле скорости  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  (3.16) известно (то же верно и в отношении полного поля скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  (3.20)). Сходство постановок задач кинематики сплошной среды и теоретической механики позволяет применять здесь и далее определения, теоремы и выводы разделов 1 и 2).

Решение кинематической задачи (3.17) ( $\varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ )

$$\begin{cases} x(t) = \varrho_0 \cos(\omega_\infty t + \varphi_0), \\ y(t) = \varrho_0 \sin(\omega_\infty t + \varphi_0), \\ z(t) = v_\infty t + z_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega_\infty^2 x, \\ \ddot{y}(t) = -\omega_\infty^2 y, \\ \ddot{z}(t) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

сразу же указывает вид потенциала центрального силового поля (о существовании потенциала см. раздел 1, с. 122), в котором частица движется по спирали

$$\dot{V}(\varrho) = \frac{\omega_\infty^2}{2} \varrho^2 = \frac{1}{2} C_1^2 C_0^6 r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} C_1^2 C_0^4 R^2 \sin^2 \theta. \quad (3.19)$$

Компоненты скорости, вычисленные по второму и третьему слагаемым в выражении функции тока  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6), суть некоторые возмущения, накладываемые на основное движение (3.14) и убывающие при удалении от точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  как величины  $\mathcal{O}(R^{-1})$ ,  $\mathcal{O}(R^{-2})$ ,  $\mathcal{O}(R^{-3})$ . На квазитвёрдый тип движения с функцией тока  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6) указано в работе [85].

Полное поле скорости для функции тока  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6) рассмотрено в работе [98], а до того — по отдельности — при  $C_3 = 0$  (регулярный вихрь) в работах [84, 85, 87] и при  $C_2 = 0$  (сингулярный вихрь) в работе [94]. Итак, компоненты скорости регулярного вихревого движения суть

$$\begin{cases} v_r(R, \theta) = -2 C_2 C_0^2 [\alpha + F_1(R)] \cos \theta, \\ v_\theta(R, \theta) = +2 C_2 C_0^2 [\alpha + F_2(R)] \sin \theta, \\ v_\varphi(R, \theta) = R C_2 C_0^2 [\alpha + F_1(R)] \sin \theta, \end{cases} \quad (3.20)$$

для удобства записи которых введены функции [84, 85] (см. рис. 2, а)

$$\begin{cases} F_1(R) = + \frac{1}{R^2} \left( \cos R - \frac{\sin R}{R} \right), \\ F_2(R) = - \frac{1}{2R^2} \left( \cos R - \frac{\sin R}{R} \right) - \frac{\sin R}{2R}, \end{cases} \quad (3.21)$$

а параметр  $\alpha$  допускает следующее истолкование [85, 86]

$$\alpha = \frac{C_1}{C_2} = - \frac{v_\infty}{2 C_0^2 C_2}. \quad (3.22)$$

Представление о движении, задаваемом точным решением  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6), даёт рис. 1. Строение поля скорости (3.20), (3.21) регулярного вихря, а также поведение линий тока очевидным образом указывают на существование непроницаемых поверхностей раздела области движения на подобласти, а также множественных точек торможения (особых точек) в меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$ .

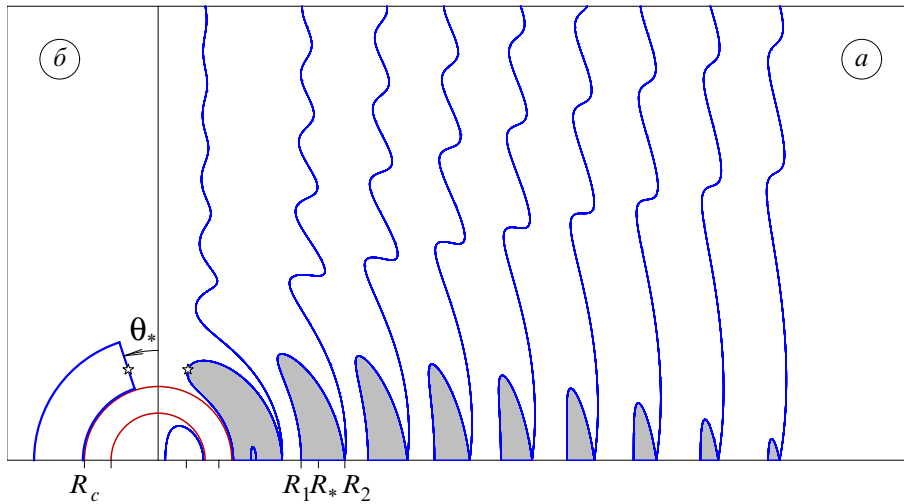


Рис. 1: Линии тока (траектории) поля скорости (3.20) регулярного вихря в меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$ , непроницаемые поверхности первого вида суть сферы, второго вида — границы вихревых торов  $Q_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 9$  (показаны серым цветом), обозначения особых точек  $R_1, R_*, R_2$  даны для тора  $Q_2$ ,  $\alpha = -0.0076$  (а); при вычислении кинетических моментов вихревые торы  $Q_\mu$  заменяются торами  $Q_\mu^*$  (показан тор  $Q_1^*$ ) (б). Пространственные линии тока построены в разделе 5

Уравнения непроницаемых поверхностей первого вида найдём, как в работах [84, 85], из условия  $v_r(R, \theta) = 0$ , которое сводится к трансцендентному однопараметрическому уравнению

$$\alpha + F_1(R) = 0, \quad (3.23)$$

способ нахождения корней которого понятен из рис. 2, б, в. Корни уравнения (3.23) существуют парами. Будем обозначать их  $R_I, R_{II}$ :  $R_I < R_{II}$ , и снабжать, если это необходимо, нижним индексом  $\beta$ ,  $\beta = 1, \dots, N_\beta$ , где  $N_\beta$  — число пар корней уравнения (3.23). Непроницаемые поверхности суть сферы  $R = \text{const}$ , где множество допустимых значений  $R$  суть корни  $R_{I,\beta}$  и  $R_{II,\beta}$ .

Изолированные точки торможения найдём, как в работах [84, 85], из условий:  $v_r(R, \theta) = 0$ ,  $v_\theta(R, \theta) = 0$ . Первое из них выполняется тождественно по  $R$  в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ , а второе позволяет найти соответствующие значения  $R$  из трансцендентного однопараметрического уравнения

$$\alpha + F_2(R) = 0, \quad (3.24)$$

структуру решений которого разъясняют рис. 2, б, в.

Точки торможения регулярного вихревого движения (3.20) в меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$  на экваторе объединены в пары, в которых первая точка  $(R_*, \frac{\pi}{2})$  есть особенность вида *центр*, а вторая —  $(R_2, \frac{\pi}{2})$  — *седло* ( $R_* < R_2$ ). С этими точками связаны непроницаемые поверхности второго вида. В меридиональных плоскостях эти поверхности представлены сепаратрисами, выходящими из седла  $(R_*, \frac{\pi}{2})$  на экваторе в верхнюю полуплоскость, возвращающимися на экватор в точке  $(R_1, \frac{\pi}{2})$  и повторяющими симметрично своё движение в нижней полуплоскости. В подобластях, отделённых от основного движения сепаратрисами, находятся замкнутые линии тока, охватывающие центр. Метод построения сепаратрисы, без интегрирования дифференциального уравнения линий тока, описан в работе [89]. В седловой точке сепаратрисы имеем  $\Psi(R_2, \frac{\pi}{2}) = \Phi(R_2)$ , тогда для точек сепаратрисы угол  $\theta$  есть функция радиуса  $R$ :  $\sin^2\theta(R) = \Phi(R_2)\Phi^{-1}(R)$ . Наиболее удалённая от экватора точка сепаратрисы удовлетворяет условию экстремума  $\theta'(R) = 0$ , откуда  $\Phi'(R) = 0$ , то есть эта точка  $(R_*, \theta_*)$  расположена на одной сфере  $R = R_*$  с центром  $(R_*, \frac{\pi}{2})$ . Точка возвращения сепаратрисы на экватор может быть найдена из условия  $\Phi(R_1) = \Phi(R_2)$ , то есть как корень уравнения  $\Phi(R) = \Phi(R_2)$ , ближайший снизу к значению  $R_2$ .

Области снаружи от внешней непроницаемой сферы, отделённые сепаратрисами от основного движения, будем называть, следуя работе [85], *вихревыми торами* и обозначать номером  $\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, N_\mu$ . Этим же номером, в виде нижнего индекса, будем указывать точки  $R_1, R_*, R_2$  экваториальной плоскости и точку  $(R_*, \theta_*)$  меридиональной плоскости.

Остановимся на выборе значений параметра  $\alpha$ , которые, по мнению автора работы [85], позволяют сопоставить решение  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6) Солнечной системе в том смысле, что каждый вихревой тор соответствует орбите одной из планет (порядковые номера планет указаны в табл. 2 раздела 4 на с. 148).

В работе [85] выбрано значение  $\alpha = -0,0076$ , при котором  $N_\mu = 9$ , а в работе [89] — значение  $\alpha = -0,00655$ , при котором  $N_\mu = 11$  (к девяти планетам Солнечной системы прибавлены Плутон и планетоид Эрида из пояса Койпера). В обоих случаях число непроницаемых сфер равно  $N_\beta = 2$ . Шар, ограниченный непроницаемой сферой бóльшего радиуса ( $R_{II,\beta=2} =: R_c$ ) сопоставлен в работе [85] Солнцу. Графики на рис. 2, б, в показывают, что внутри непроницаемой сферы радиуса  $R_{II,\beta=1}$  и в сферическом слое между непроницаемыми сферами ( $R_{I,\beta=2} < R < R_c$ ) находятся особые точки поля скорости (3.20) (корни уравнения (3.24)), то есть #Солнце имеет сложное внутреннее строение. Современные данные [31] подтверждают сложность строения Солнца, хотя эта сложность несколько иная, чем в работе [85].

Выражение для угловой скорости движения в экваториальной плоскости содержит два слагаемых:

$$\omega(R) = \frac{v_\varphi(R, \frac{\pi}{2})}{R} \stackrel{(3.20)}{=} C_2 C_0^3 [\alpha + F_1(R)]. \quad (3.25)$$

Первое слагаемое соответствует вращению с постоянной угловой скоростью  $\omega_\infty$  (см. (3.26)), второе — возмущению, убывающему при  $R \rightarrow \infty$  (см. рис. 6, б в разделе 5 на с. 177). Вычисленный в работах [85, 87] предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \omega(R) = C_2 C_0^3 \alpha \stackrel{(3.22)}{=} C_2 C_0^3 \frac{C_1}{C_2} = C_1 C_0^3 = \omega_\infty \quad (3.26)$$

показывает, что при удалении от оси вращения регулярного вихря (оси  $z$  цилиндрической системы координат) величина угловой скорости приближается к значению  $\omega_\infty$ . Далее в работах [85, 87] было замечено, что в особых точках  $R_*$  и  $R_2$  выполняется уравнение (3.24) или, в другой записи,

$$2(\alpha + F_2(R)) = 2\alpha + 2F_2(R) = 2\alpha - F_1(R) - \frac{\sin R}{R} = 0, \quad (3.27)$$

откуда

$$F_1(R) = 2\alpha - \frac{\sin R}{R}. \quad (3.28)$$

Подстановка выражения (3.28) для  $F_1(R)$  в выражение угловой скорости (3.25) приводит последнее к виду

$$\omega(R_*) = C_2 C_0^3 \left( 3\alpha - \frac{\sin R_*}{R_*} \right), \quad (3.29)$$

а предельный переход



$$\lim_{R_* \rightarrow \infty} \omega(R_*) = 3 C_2 C_0^3 \alpha = 3 \omega_\infty \quad (3.30)$$

даєт величину углової швидкості обертання осей вихревих торів, отличную от углової швидкості  $\omega_\infty$  на величину  $2\omega_\infty$ . Различие в величинах углових швидкостей (3.26) и (3.30) объяснено так. Цікавим є також порівняння поведінки кутових швидкостей обертання середовища  $\omega_\infty$  {13} центрів вихорів  $\omega^*$  {14} на нескінченності:  $\omega^* - \omega_\infty = 2\omega_\infty$ , тобто віддалені вихори обертаються відносно закрученого простору в 2 рази швидше, ніж цей простір [85]. . . . напрям обертання зовнішніх вихорів завжди збігається з напрямом обертання простору, інтенсивність якого визначається параметром  $C_0$  . . . віддалені вихори обертаються у три рази швидше, ніж сам простір [87]. Как следствие приведённого объяснения, в последующих работах постоянная  $C_0$  размерности длины приобрела название параметра закручивания пространства [86, 87, 92] и параметра поворота [94], а движение среды при  $z = \mp\infty$  — движение закрученного пространства.

Выскажем иную точку зрения на предел (3.30). Выражение (3.28), замещающее функцию  $F_1(R)$  в выражении (3.25) для угловой скорости  $\omega(R)$  при  $R = R_*$ , справедливо только для конечных значений  $R_*$ , которые удовлетворяют уравнению (3.24). Число таких значений равно  $N_\mu < \infty$ , следовательно, 1) предельный переход  $R_* \rightarrow \infty$  невозможен; 2) нет необходимости вводить понятие закрученного пространства.

В работе [85] образование планет Солнечной системы в вихревых торах увязано с гипотезой Вайцзеккера [83], обсуждение которой отложим до раздела 4. Сейчас же сосредоточимся на возможных причинах образования планет в протопланетном облаке, к числу которых в работе [85] отнесено действие силы Архимеда на твёрдые частицы, совершающие движение в среде с полем скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  (3.20).

В работе [85] приведены поле тиску . . . та поле вектора  $\vec{G}^* = -grad p$ , який є виштовханою об'ємною силою Архімеда, що діє на всі тіла, поміщені у течію. Согласно [85], локальные минимумы давления расположены на осях вихревых торів (в меридиональных плоскостях это точки  $(R_*, \frac{\pi}{2})$ ), к которым сила Архимеда будет стягивать твёрдые частицы, действуя как сила тяготения. . . . точки-центры вихорів є притягальними для сили Архімеда у деякому їх околі . . . Саме це поле могло з часом зігнати всі частинки і маси в горизонтальну площину — площину Лапласа, а в ній — в околі центрів.

Выводы о свойствах и возможностях силы Архимеда усилены в работе [97]. Ми вже відзначали [20], що у фізиці окрім сили гравітації існує ще одна класична об'ємна сила — градієнтна сила Архімеда, дія якої повністю еквівалентна гравітації. Дуже дивно, що цю просту істину, яка відома з часів Архімеда, обійшли фізики ХХ століття при пошуках причин утворення невідомих силових полів у космосі. Очевидно, причиною цьому є складність вимірювання полів тиску та градієнтів тиску в космосі; виявилось набагато простіше оцінювати світні маси та вимірювати їх гравітаційні й електромагнітні поля.

< . . . >

Проведений вище аналіз градієнтних полів тиску дає реальне пояснення таких важ-

ливих властивостей Сонячної системи як: а) утворення масивного центрального тіла — Сонця; б) формування планет навколо центрів притягання торових вихорів завдяки силі Архімеда; в) стягування частинок і мас до однієї площини — площини Лапласа. . . . Навіть при відсутності точкової маси у центрі вихору градієнтна сила Архімеда буде притягувати тіла й затягувати їх до центра; це відповідає поширеному серед людей твердженню, що «вихори затягують». . . . Саме градієнтна сила є однією з класичних масових сил, дія якої еквівалентна гравітації. . . . диференціюванням визначається силове поле градієнта тиску та градієнтної сили Архімеда, яка є об'ємною доцентровою силою і діє на усі зважені маси подібно до сили тяжіння.

По поводу точки зрения на планетообразование (в работе [85]), роли в этом явлении силы Архимеда и её свойствах (в работах [85, 97]) приведём следующие соображения.

*Во-первых*, при записи уравнения Эйлера в интегральной форме для конечной области  $\mathcal{B}$  среды ( $\partial\mathcal{B} = \mathcal{S}$ ) главный вектор сил давления равен поверхностному интегралу в левой части следующего равенства

$$-\oint_{\mathcal{S}} p \boldsymbol{\nu} d\mathcal{S} = -\iiint_{\mathcal{B}} \nabla p d\mathcal{B}. \quad (3.31)$$

Переход к дифференциальной форме уравнения Эйлера с помощью (3.31) (и последующего применения теоремы о среднем значении интеграла по  $\mathcal{B}$ ) возможен потому, что внутри области  $\mathcal{B}$  находится та же среда, что и вовне, и функция  $p(\mathbf{x})$  определена в  $\mathcal{B}$ . Если область  $\mathcal{B}$  — твёрдая частица, то преобразование левой части (3.31) (силы Архимеда) к правой невозможно, поскольку внутри  $\mathcal{B}$  не определена функция  $p(\mathbf{x})$ . Это значит, что сила Архимеда, как главный вектор сил давления, действующих на твёрдую частицу — поверхностная. Сила тяготения, напротив, — объёмная, и не может быть сведена к действию поверхностных сил. Обсуждение поверхностной природы силы Архимеда продолжено в разделе 6 на с. 165.

*Во-вторых*, движение твёрдых частиц в направлении локальных минимумов давления представляется необоснованным. В самом деле, для решения задачи о движении твёрдой частицы необходимо знать главный вектор сил давления, действующих на ее поверхности. Этот вектор задает не направление движения частицы, согласно [85], а направление и величину ускорения (см. аксиому 1.5 в разделе 1 на с. 121). Вычисление главного вектора требует знания давления на поверхности частицы, что представляет самостоятельную задачу о совместном движении среды и твёрдого тела в ней. Уровень сложности здесь не ниже задачи о движении твёрдого тела в идеальной безграничной среде, когда движение последней потенциально [28].

*В-третьих*, при большом количестве частиц неизбежен переход на язык описания совместного движения среды и частиц, принятый в теории многофазных сред [47, 48]. Простейшая модель бесстолкновительной монодисперсной смеси частиц, помимо обычных предположений теории [47, 48], включает следующие дополнительные [47]: 1) смесь монодисперсная, то есть вто-

рая, или дисперсная фаза в каждом элементарном макрообъёме присутствует в виде сферических включений одинакового радиуса (частиц, капель, пузырьков), причём объёмная концентрация дисперсной фазы не очень велика; 2) можно пренебречь энергией и другими эффектами хаотического (в том числе и броуновского) и внутреннего (вращение и деформация) движений дисперсных частиц; 3) можно пренебречь непосредственным взаимодействием и столкновениями между частицами; 4) отсутствуют процессы дробления, слипания (коагуляции) и образования новых дисперсных частиц. Модель включает систему уравнений для несущей (сплошной среды) и несомой (твёрдые частицы) фаз, причём система уравнений для несущей фазы отличается от системы уравнений (3.1), а значит точное решение (3.7), (3.6) становится неприменимым. Модели многофазных сред, учитывающие столкновение и слипание частиц, ещё дальше уводят от системы уравнений (3.1) и точного решения (3.7), (3.6).

Завершая данный раздел, отметим следующее.

*Во-первых*, поле скорости  $\mathbf{v}(R, \theta)$  (3.20) регулярного вихря  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6) содержит ядро  $\dot{\mathbf{v}}(\varrho)$  (3.14), силовым потенциалом для которого служит квадратичная функция координат  $\dot{V}$  (3.19), что, в силу результатов раздела 2, несовместимо с кеплеровым движением.

*Во-вторых*, расстояние между вихревыми торами примерно постоянно (рис. 1, 2, б, в), тогда как в Солнечной системе изменение радиусов орбит планет можно вычислить по формуле Тициуса – Боде [49], которая указывает на увеличение радиусов орбит в геометрической прогрессии. В Солнечной системе отношение радиуса орбиты Меркурия к радиусу Солнца равно  $\approx 84$ , тогда как вихревой тор #Меркурия почти без зазора примыкает к #Солнцу.

*В-третьих*, рассуждения автора работы [85] о формировании планет путём „стягивания“ твёрдых частиц в плоскость Лапласа, а затем к осям вихревых торов, под действием силы Архимеда, которой в вихревой небесной механике отведена роль силы тяготения, не подкреплены результатами динамического моделирования (см. аксиому 1.5 на с. 121).

#### 4. Вихревая небесная механика

Кеплер пользовался правильными телами, чтобы в смелом полете фантазии связать друг с другом размеры планетных орбит [26].

Небесная механика за неполных три века существования блестяще справилась со своей задачей — задачей объяснения видимого движения небесных тел. Субботин с законной гордостью писал: “В 1950 удалось показать, что закон всемирного тяготения позволяет представить наблюдения (с 1780 по 1940) пяти планет юпитеровой группы (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона) со всей той точностью, которую имеют эти наблюдения” [9]. В движении планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля и Марс) главная невязка — знаменитое годичное перемещение перигелия Меркурия 5,75 секунды дуги вместо теоретического 5,34 секунды дуги — была объяснена Эйнштейном

на основе релятивистского уточнения закона всемирного тяготения [10]. Другие невязки, несравненно более мелкие, устранены после открытия неравномерности вращения Земли.

<...>

Эти исследования завершают, в существенном, внутреннее изучение свойств математической модели и позволяют тем самым поставить кардинальный вопрос о том, насколько сама модель соответствует изучаемому объекту — реальной планетарной системе [42].

В данном разделе обсудим решение задач об орбитах и движении планет в Солнечной системе методами вихревой небесной механики. Результаты решения задач будем сравнивать с известными результатами классической небесной механики (см. раздел 2).

В работе [85], после небольшого обзора теорий образования Солнечной системы, указано, что в большинстве из них возникают радикальные трудности у пояснения существующего распределения кинетического момента между Солнцем и планетами, а самое того факту, что масса Солнца составляет 99% массы Солнечной системы, а его кинетический момент содержит лишь 2% кинетического момента всей системы.

Определение кинетического момента (момента количества движения) частицы массы  $m$  в положении  $\mathbf{x}$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , дано в разделе 1:  $\mathbf{K} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$ . В небесной механике принято работать с приведёнными, то есть отнесёнными к массе частицы, кинетическими моментами:  $\mathbf{k} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ . При орбитальном движении вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен плоскости Лапласа, в которой расположена орбита (в первом приближении, то есть приближении задачи двух тел), или, что то же самое, параллелен оси  $z$ , поэтому будем рассматривать величину  $k := k_z$ , вообще говоря, осреднённую по орбите. Для планетарного регулярного вихря (3.20) вместо орбит планет имеем множество траекторий частиц в соответствующих шаровых слоях  $Q_\beta$  и вихревых торах  $Q_\mu$ , для которых за кинетические моменты примем, согласно работам [85, 89], соответственно величины

$$\mathbf{k}_\beta = \frac{1}{|Q_\beta|} \int_{Q_\beta} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \beta = 1, \dots, N_\beta, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{k}_\mu = \frac{1}{|Q_\mu|} \int_{Q_\mu} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \mu = 1, \dots, N_\mu, \quad (4.2)$$

где  $|Q_\beta|$  и  $|Q_\mu|$  суть объёмы шаровых слоёв  $Q_\beta$  и вихревых торов  $Q_\mu$ .

В планетарном вихре движение симметрично относительно оси  $z$  цилиндрической системы координат, поэтому под кинетическими моментами будем понимать проекции векторов  $\mathbf{k}_\beta$  и  $\mathbf{k}_\mu$  на ось  $z$ . Для различения кинетического момента вихревого движения и кинетического момента орбитального движения, последний будем называть *орбитальным* моментом.

В работе [85] для кинетических моментов шаровых слоёв регулярного планетарного вихря получено выражение

$$k'_{\beta} = \frac{k_{\beta}}{M} = \left[ \frac{\alpha}{5} R^5 + R^2 \sin R + 3R^2 F_1(R) \right] \Big|_{R_{I,\beta}}^{R_{II,\beta}}, \quad M = \frac{8\pi\rho C_2}{3C_0^2}, \quad (4.3)$$

с помощью которого были вычислены кинетические моменты шаровых слоёв для двух случаев:  $\alpha = -0,0076$  [85] и  $\alpha = -0,00655$  [89]. Результаты вычислений, приведённые в указанных работах, поместим для наглядности в табл. 1.

Таблица 1: Кинетические моменты шаровых слоёв  $Q_{\beta}$

	$\alpha = -0,00655$ [89]	$\alpha = -0,0076$ [85]
$R_{1,\beta=1}$	0	0
$R_{2,\beta=1}$	4,63822496	4,663479
$k'_{\beta=1}$	-44,61072	-22,76231
$R_{1,\beta=2}$	4,63822496	4,663479
$R_{2,\beta=2}$	7,3590513	7,304492
$k'_{\beta=2}$	+99,06972	+45,54172
$k'_{\beta=1} + k'_{\beta=2}$	+44,459	+22,77941

Авторы работ [85, 89] отметили противоречивость этих результатов.

Внутрішні 2 тори обертаються у протилежних напрямках, причому центральний — у той же бік, що і всі зовнішні. Оскільки і Сонце, і планети обертаються в один бік, то залишається допустити, що момент кількості руху центрального вихора був більшим, ніж другого, який попав у другу сферу. Але принаймні ясно, що наявність двох протилежно закручених вихорів усередині двох замкнутих сфер може звести сумарний кінетичний момент близьким до нуля або додатним чи від'ємним — усе залежить від густин первинної туманності в цих областях та подальшого перебігу еволюційних процесів формування Сонця [85].

Звернемо увагу на характеристики 2-х внутрішніх вихорів, які можна асоціювати з формуванням центральної зірки — Сонця. Центральний дипольний вихор обертається у тому ж напрямі, що і всі зовнішні тороїди, а 2-й — у протилежному напрямі. Кінетичний момент об'єму центрального дипольного вихора  $M_z^{(1)} = -44,61072 K_m$ , а другого  $M_z^{(2)} = 99,06972 K_m$ , що у 2,22 рази більше. При однакових густинах їх сума  $M_z^{(1)} + M_z^{(2)} = 44,459 K_m > 0$ , тобто за цих початкових умов таке теоретичне Сонце і планети оберталися б у протилежних напрямках [89].

Посмотрим, как это противоречие преодолено в работах [85, 89].

Як видно, кінетичні моменти дійсно протилежного знаку, причому кінетичний момент шару в 2,00075 рази більший за кінетичний момент центральної кулі. Сумарний кінетичний момент і отже кутова швидкість за умови однакової густини мас у цих областях при об'єднанні були б додатними, і таке теоретичне Сонце оберталосся б проти напрямку обертання планет. Але варто лише взяти густину області центрального вихора в 2,5 рази

більшою, і обертання змінить свій напрям. Між тим, експериментальні оцінки густин у Сонці стверджують, що при середній густині Сонця  $1.4 \text{ г/см}^3$ ; густина в центральній частині — ядрі Сонця доходить до  $160 \text{ г/см}^3$ . Це дає підстави допускати, що і первинний розподіл густин був нерівномірним з подібною перевагою в центрі, що і спричинилося до сумарного обертання Сонця в один бік з планетами [85].

Але якщо взяти густину центрального вихора вже у 3 рази більшою, ніж 2-го, то сумарний кінетичний момент буде  $M_z^{(1)} + M_z^{(2)} = -34,7624 K_m < 0$ , що відповідає кутовій швидкості обертання одного напрямку з планетами. Між тим відомо [10], що зараз центральна частина Сонця — його ядро — має густину, у 150 разів більшу за середню густину маси Сонця. Логічно буде припустити, що і у початковому стані густина викинутої диполем маси була набагато більшою за густину газопилової хмари у зонах утворення 2-го та усіх зовнішніх вихорів [89].

Итак, полученные в работах [85, 89] значения кинетических моментов шаровых слоёв  $Q_\beta$  в стационарном вихревом регулярном решении (3.20) системы уравнений (3.1) не соответствуют данным наблюдательной астрономии даже качественно (не совпадают знаки соответствующих величин), поэтому авторам работ [85, 89] пришлось ввести поправочные (подгоночные) множители, что, однако, не помешало высказать следующие мнения.

Решение даёт хорошее приближение основных параметров геометрии и движения планет, а также преодолевает известные несоответствия гипотез Лапласа и Вайцзеккера относительно распределения кинетического момента между Солнцем и планетами. . . . Зокрема, позитивно вирішується і згадана вище проблема несумірності мас та кінетичних моментів Сонця і планет. . . Нарешті, запропонована теорія долає найрадикальнішу суперечність попередніх гіпотез, які не спроможні були пояснити існуюче співвідношення між кінетичними моментами Сонця та тіл планетної системи Сонця [85].

Таким чином, ці результати знімають проблему кінетичних моментів, яка була каменем спотикання усіх попередніх гіпотез і теорій утворення СС, — планетарний вихор уже при своєму зародженні мав сучасний розподіл кінетичних моментів, який у цілому зберігся [89].

Однако плата за введение подгоночного множителя оказывается неприемлемо высокой. Дело в том, что плотность — это динамическая величина (вычисляется по массе), поэтому её изменение хотя бы с одной стороны раздельной поверхности (в данном случае — непроницаемых сфер) повлечёт изменение величины давления и, как следствие, потерю равновесия и разрушение стационарного решения (3.20).

Теперь приступим к вычислению кинетических моментов вихревых торков  $Q_\mu$  регулярного движения (3.20) и орбитальных моментов.

Для движения частицы по круговой орбите в ньютоновом поле тяготения (частный случай кеплерова движения, см. раздел 2) имеем

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{\gamma M}{r^2}, \quad (4.4)$$

откуда для орбитального момента получаем зависимость

$$k(r) = r|\mathbf{v}(r)| = rv(r) = \sqrt{\gamma Mr}. \quad (4.5)$$

При движении частицы по эллиптической орбите с большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$  в ньютоновом поле тяготения (общий случай кеплерова движение) среднее по орбите значение орбитального момента вычислим по формуле из книги Альвена [3]

$$k(r) = r|\mathbf{v}(r)| = rv(r) = \sqrt{\gamma Ma(1 - e^2)}. \quad (4.6)$$

Для всех планет Солнечной системы  $e < 0,25$  (см. табл. 2), и, с погрешностью, не превышающей 3%, имеем вместо (4.6) приближённую формулу

$$k(a) \approx \sqrt{\gamma Ma}. \quad (4.7)$$

Таблица 2: Данные об орбитальном движении планет Солнечной системы по Альвену [3] ( $a$  — большая полуось орбиты;  $e$  — эксцентриситет орбиты;  $\bar{v}$  — средняя орбитальная скорость;  $T$  — сидерический период обращения;  $k$  — кинетический момент; КП — касающаяся планета, её орбита проходит по поверхности центрального тела (Солнца); СП — синхронная планета, движется по орбите с периодом обращения центрального тела)

$\mu$	планета	$a, 10^{11}$ м	$e$	$\bar{v}, 10^3$ м/с	$T, 10^8$ с	$k, 10^{15}$ м <sup>2</sup> /с
	КП	0,00696		437	0,0001	0,304
	СП	0,253		72,5	0,0219	1,83
1	Меркурий	0,579	0,2056	47,9	0,0759	2,72
2	Венера	1,08	0,0068	35,1	0,194	3,79
3	Земля	1,50	0,0168	29,8	0,317	4,47
4	Марс	2,28	0,0933	24,2	0,595	5,48
6	Юпитер	7,78	0,0483	13,1	3,75	10,2
7	Сатурн	14,3	0,0559	9,64	9,34	13,8
8	Уран	28,7	0,0471	6,81	26,5	19,5
9	Нептун	45,0	0,0085	5,44	52,1	24,5
10	Плутон	59,0	0,2494	4,75	78,1	27,1

Следовательно, величина кинетического момента в кеплеровом движении пропорциональна  $\sqrt{r}$  (для круговой орбиты) или  $\sqrt{a}$  (для эллиптической орбиты; в последнем случае можно ввести радиус  $r$  эквивалентной круговой орбиты,  $r^2 = a^2\sqrt{1 - e^2}$ , см. (2.13), (4.6)).

Для планетарного регулярного вихря (3.20) за кинетические моменты  $k_\mu$  вихревых торов  $Q_\mu$  примем, согласно работам [85, 89], величины

$$k_\mu \approx \frac{1}{|Q_\mu^*|} \int_{Q_\mu^*} \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \mu = 1, \dots, N_\mu, \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{i}_z$  — орт оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ ,  $Q_\mu^*$  — торы, приближённо заменяющие торы  $Q_\mu$  и имеющие в меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$  сечения в виде криволинейных четырёхугольников (показаны на рис. 1, б),  $|Q_\mu^*|$  суть объёмы торов  $Q_\mu^*$ .

В работе [89] интеграл (4.8) и объёмы торов  $Q_\mu^*$  вычислены точно, поэтому для кинетического момента имеем формулу

$$k_\mu = C_2 C_0^2 \frac{3 - \cos^2 \theta_{*,\mu}}{R_{2,\mu}^3 - R_{1,\mu}^3} \left[ \frac{\alpha}{5} R^5 + R^2 \sin R + 3R^3 F_1(R) \right] \Big|_{R_{1,\mu}}^{R_{2,\mu}}. \quad (4.9)$$

Значения кинетических моментов  $k_\mu$  вихревых торов  $Q_\mu$ , вычисленные по формуле (4.9), будем относить к точкам  $(R_*, \frac{\pi}{2})$  оси  $r$ .

Поскольку торы  $Q_\mu$ ,  $Q_\mu^*$  (как области) и подынтегральная функция в (4.8) симметричны относительно экваториальной плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , вычислим кинетические моменты также по приближённой формуле среднего значения (в этой формуле значения объёмов торов  $Q_\mu^*$  не нужны)

$$k_\mu \approx \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \Big|_{(R_{*,\mu}, \frac{\pi}{2})},$$

тогда вместо точной формулы (4.9) получим приближённую

$$k_\mu \approx R_{*,\mu} v_\varphi(R_{*,\mu}, \frac{\pi}{2}) = C_2 C_0^2 R_{*,\mu}^2 [\alpha + F_2(R_{*,\mu})]; \quad (4.10)$$

последнюю при больших значениях  $R_{*,\mu}$  можно также упростить

$$k_\mu \approx C_2 C_0^2 R_{*,\mu}^2 \alpha. \quad (4.11)$$

В табл. 3 приведены справочные данные по вихревым торам  $Q_\mu$  и результатам вычислений удельного кинетического момента  $k_\mu$ , из которых заключаем, что три формулы (4.9), (4.10), (4.11) дают близкие результаты, то есть зависимость кинетического момента вихревых торов планетарного вихря есть квадратичная относительно  $R$  (и  $r$ ), что свойственно движению с потенциалом  $V(r) \approx \text{const } r^2$ , а не  $rV(r) \approx \text{const}$ ; см. раздел 2).

Введём в рассмотрение ещё табл. 4, составленную из данных табл. 2 и результатов вычислений по формуле (4.9) в работе [89] (помещены в столбце  $-k_\mu$  (4.9) табл. 3). Данные по орбитальным моментам планет Солнечной



Таблица 3: Кинетические моменты вихревых торов планетарного вихря, определяемого параметром  $\alpha = -0,00655$  (в формулах (4.9), (4.10), (4.11) принято, что  $C_0 = 1, C_2 = 1$ )

$\mu$	$R_1$	$R_*$	$R_2$	$\theta^*$	$-k_\mu$ (4.9)	$-k_\mu$ (4.10)	$-k_\mu$ (4.11)
1	7,36	9,44	12,32	3,08	0,54	1,57	0,58
2	14,06	15,85	18,55	44,33	1,66	2,63	1,65
3	20,65	22,24	24,76	58,77	3,35	4,2	3,24
4	27,21	28,62	30,97	67,42	5,59	6,29	5,37
5	33,75	35,01	37,16	73,23	8,34	8,92	8,03
6	40,28	41,39	43,36	77,41	11,62	12,06	11,22
7	46,81	47,78	49,54	80,61	15,41	15,73	14,95
8	53,36	54,18	55,71	83,15	19,71	19,93	19,23
9	59,92	60,59	61,87	85,27	24,53	24,66	24,05
10	66,53	67,03	68,00	87,14	29,85	29,91	29,43
11	73,28	73,54	74,06	88,99	35,69	35,69	35,43

системы из табл. 2 пересчитаны на радиус  $r$  эквивалентной круговой орбиты (все величины с нижним индексом 1), а данные по кинетическим моментам вихревых торов сделаны, как в работе [89], размерными, за счёт выбора значения параметра  $C_0$  и значения произведения параметров  $C_0 C_2$ , обеспечивающего равенство кинетического (табл. 3) и орбитального (табл. 2) моментов для Марса (все величины с нижним индексом 2).

Рис. 3, повторяющий рис. 3 из работы [89], производит впечатление количественного и качественного согласования значений орбитальных и кинетических моментов, но этот вывод неверен. В самом деле, орбитальные моменты имеют асимптотику вида  $\sqrt{r}$ , а кинетические — вида  $r^2$  (последнее подтверждают данные в трёх последних столбцах табл. 3). Истинную картину распределения орбитальных и кинетических моментов увидим на рис. 4, представляющем моменты как функции от  $r$ .

Приведём ещё две зависимости (см. рис. 5), показывающие, насколько правдоподобно планетарный вихрь описывает движение планет в Солнечной системе. Орбитальная скорость планет Солнечной системы убывает с расстоянием как  $1/\sqrt{r}$ , а в планетарном вихре величина скорости  $v_\varphi(R)$  (3.20) возрастает асимптотически линейно по  $r$  (см. рис. 6, б в разделе 5 на с. 177). Асимптотически линейная зависимость скорости  $v_\varphi(R)$  (3.20) от  $R$  сразу же указывает на квазитвёрдый тип движения в точном решении  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6). Последнее доказывает, что движение в планетарном вихре асимптотически изохронно (угловая скорость движения асимптотически постоянна; см. раздел 3, обсуждение пределов (3.26) и (3.30)); время же обращения планет

Таблица 4: Сравнительные данные об орбитальных моментах планет Солнечной системы [3] и кинетических моментах вихревых торов [89] (разъяснения см. в тексте)

$\mu$	планета	$r_1, 10^{11}$ м	$k_1, 10^{15}$ м <sup>2</sup> /с	$r_2, 10^{11}$ м	$k_2, 10^{15}$ м <sup>2</sup> /с
1	Меркурий	0,57	2,77	0,75	0,53
2	Венера	1,08	3,79	1,26	1,63
3	Земля	1,50	4,46	1,76	3,30
4	Марс	2,27	5,5	2,27	5,5
6	Юпитер	7,77	10,2	3,28	11,44
7	Сатурн	14,28	13,8	3,79	15,17
8	Уран	28,67	19,5	4,3	19,41
9	Нептун	45,0	24,4	4,81	24,15
10	Плутон	57,14	27,7	5,32	29,39

в Солнечной системе возрастает как  $r^{\frac{3}{2}}$  (согласно третьему закону Кеплера). Приведённые в работах [85, 89] зависимости угловых скоростей обращения планет и движения в вихревых торах от номера планеты и тора (как на рис. 3) также дают неверное представление о движении в планетарном вихре, как описывающем с достаточной точностью движение планет Солнечной системы — на самом деле размеры Солнечной системы на порядок превосходят размеры планетарного вихря по последнему вихревому тору, соответствующему Плутону. Напомним, что изохронность свойственна движению с потенциалом  $V(r) = \text{const } r^2$ , не подчиняющемуся третьему закону Кеплера. Несовместимость движения с потенциалом  $V(r) = \text{const } r^2$  и движения в Солнечной системе была известна Ньютону и Лагранжу (см. раздел 2, с. 132), а ядро  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  (3.14) поля скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  (3.20), порождающее указанную асимптотику движения, имеет потенциал  $\dot{V}(r)$  (3.19) именно такого вида.

В работах [84–98] неоднократно была высказана точка зрения о возможности добиться согласования числовых показателей движения в планетарном вихре #Солнечной системы и движения в Солнечной системе (кеплерова движения), подбирая значения свободных параметров. По нашему мнению, никаким подбором свободных параметров добиться согласования с радиусами и кинематическими показателями орбит Солнечной системы невозможно.

В самом деле, выберем значение параметра  $C_0$  так, чтобы радиус вихревой #Солнечной системы был равен радиусу Солнечной системы, но тогда орбита вихревого тора #Марса возрастёт на порядок, по сравнению радиусом истинной орбиты Марса (рис. 4). Если выбрать значения параметров  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы скорость вращения на границе вихревой #Солнечной системы была равна скорости вращения на границе Солнечной системы, то орбитальная

скорость вихревого тора #Марса возрастёт на порядок, а его удельный кинетический момент возрастёт на два порядка. Причина невозможности согласования радиусов и кинематических показателей орбит вихревой #Солнечной системы и Солнечной системы проста и очевидна — зависимости радиусов (см. рис. 2 в разделе 3 на с. 174) и окружных скоростей движения в вихревых торах (см. рис. 6, б в разделе 5 на с. 177) качественно отличаются от зависимостей радиусов орбит и скоростей обращения планет Солнечной системы. Поэтому добиться согласования радиусов и кинематических показателей орбит можно только между одним вихревым тором и одной планетой, что и было сделано в работах [85, 88–90], в которых приведены графики для кинематических характеристик движения в функции номера  $\mu$  вихревого тора или планеты, но не радиуса  $r$ . Если искать множественного согласования (между несколькими торами и планетами), то оно оказывается очень приближённым [90] даже в функции номера  $\mu$  вихревого тора или планеты.

## 5. Вихревая космогония

... до сих пор я написал лишь одну—единственную статью философского содержания, причем поводом к этому послужил следующий случай. Однажды в зале заседаний Академии я участвовал в оживленной дискуссии, вызванной спором о ценности атомистических теорий, снова приобретшим тогда остроту среди физиков. Дискуссия велась с группой академиков, среди которых находился надворный советник профессор Мах.

<...>

Во время дискуссии об атомистике, проходившей в упомянутой мною группе академиков, Мах внезапно произнес следующую лаконичную фразу: «Я не верю, что атомы существуют». От этого заявления у меня голова пошла кругом [11].

Всякая космогоническая гипотеза имеет целью объяснить, каким образом мог возникнуть мир в том виде, как он теперь существует. Для этого, принимая в основу созданную Творцом материю, необходимо дать ответ на то, каким образом эта материя, повинаясь законам, действующим в мировом пространстве, могла сгруппироваться в большие центры (солнца, звезды), окруженные кортежем планет и их спутников.

Задача космогонии распадается, таким образом, на две части: одна должна быть посвящена образованию целых систем, подобных нашей солнечной, другая же должна объяснить образование самих частей солнечной системы. Некоторые из авторов гипотезы старались охватить обе части (Фэй), другие же ограничивались только разрешением второго вопроса (Лаплас).

Материалом для построения Мира со времен глубокой древности предполагается хаос. Под этим словом подразумевают собрание разбросанной по всему Мировому пространству чрезвычайно разреженной материи. Действующею же силою предполагается сила всемирного тяготения, или, в этом случае вернее будет сказать, — сила взаимного притяжения частиц материи между собою. Хаос этот предполагается разлагающимся на отдельные туманности, из которых уже образуются планетные системы.

Подобная идея получила себе как бы подтверждение, когда впервые на небе были усмотрены В. Гершелем (W. Herschel) туманные пятна; они подали ему повод представить в королевское общество его мемуар, в котором он излагает свою гипотезу о превращении туманности в звезды.

С тех пор наши знания сделали громадный шаг вперед. Спектроскоп показал нам, из чего состоят эти туманности; при чем оказалось, что они могут быть разделены на два резко различающихся между собою вида. Одни из них дают в своем спектре несколько блестящих линий, что свидетельствует об их газообразном состоянии, другие же, напротив, дают спектр сплошной, что указывает на то, что их частицы находятся в жидком или даже твердом состоянии.

<...>

При этих условиях является вопрос, из чего состоял первоначальный хаос: состоял ли он из одной первичной материи, из которой образовались все остальные виды материи, или же в нем заключались в смеси все известные нам элементы?

Настоящее развитие химии не дает нам возможности превращать элементы один в другой, у нас нет опытных данных, указывающих нам на возможность разложения элементов на одну первичную материю, поэтому большинство химиков смотрит на первичную материю, как на фантазию, не подтверждающуюся опытом, другая же часть химиков (Крукс) склоняются к допущению этой гипотезы.

<...>

Все эти затруднения дают повод Вольфу выразиться так: „Первая часть задачи космогонии, — какова была материя первоначального хаоса, и как из него породились солнце и звезды, — остается еще в настоящее время в области романа и чистого воображения“.

Это дает нам право оставить все, что было сказано по этому поводу, без рассмотрения и заняться второю частью задачи, то есть образованием планетной системы из первичной туманности [71].

В работе [93] изучены „условия конденсации газов туманностей“. Приведём, следуя книгам [4, 18, 53, 62, 67], необходимые справочные сведения о туманностях, одних из многих наблюдаемых на небесном своде объектов.

Под туманностью в современной астрономии (и астрофизике) понимают протяжённые области пространства, заполненные межзвёздной средой. Туманности обнаруживают себя либо по излучению (собственному или отражённому — это *светлые туманности*), либо по поглощению излучения (это *тёмные туманности*) на общем фоне небесного фона.

Светлые самосветящиеся туманности *первого типа* включают: 1) зоны НII (Стрёмгрена); 2) планетарные туманности; 3) инфракрасные туманности (Бёклина – Нейгебауэра и Клейнмана – Лоу); *второго типа*: 1) остатки вспышек сверхновых и новых звезд; 2) кольцевые туманности вокруг звёзд с мощным звёздным ветром. Заметим, что „планетарные туманности“ не имеют ничего общего с планетными системами и их возможным появлением, тем более, не имеют ничего общего с планетарным вихрем; это „ложный друг переводчика“ — планетарные туманности образованы звездой и окружающей её быстро расширяющейся газовой оболочкой.

Во всех видах туманностей присутствуют *газ* и *пыль*, примерно в равном количестве, что объясняет другое название — *газопылевые* туманности, тем не менее, различают *газовые* (светлые самосветящиеся) и *пылевые* (тёмные или светлые отражательные) туманности.

Работа [93] основана на предположениях, которые упорядочим следующим образом: 1) туманность представлена регулярным планетарным вихрем с полем скорости (3.20); 2) среда туманности и внешнего закрученного потока находится в состоянии термодинамического равновесия; 3) поведение

среды описывает модель идеального совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1.67$ ; 4) внешний поток имеет плотность  $\rho_\infty = 10^{-12}$  г/см<sup>3</sup>, температуру  $T_\infty = 100\text{K}$ .

Теперь выскажем соображения о предположениях работы [93]. *Первое* ничего не говорит о состоянии среды туманности (планетарного вихря), что не позволяет сопоставить планетарный вихрь с каким-либо известным типом туманностей. *Второе* невозможно при скорости  $v_\infty$  движения внешнего закрученного потока, равной скорости движения астрономического объекта относительно фона (имеет тот же порядок, что и скорость движения Солнечной системы [22]). *Третье* несовместимо с системой уравнений (3.1), модельной для описания движения идеальной несжимаемой среды, движение которой может быть адиабатным, но для которой нельзя применять термодинамику идеальной сжимаемой среды (в частности, понятие показателя адиабаты).

Движение сплошной идеальной сжимаемой совершенной среды (невязкого совершенного газа) в потенциальном силовом поле подчиняется системе уравнений неразрывности (сохранения массы), Эйлера (сохранения количества движения) и изменения внутренней энергии (первого закона термодинамики) [35, 56]

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho \nabla V, \\ \rho \dot{\varepsilon} = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $\varepsilon = c_v T$  — внутренняя энергия,  $c_v$  — удельная теплоёмкость при постоянном объёме,  $T$  — абсолютная температура, давление  $p$  связано с плотностью уравнением состояния  $p = \rho R T$ ,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Все величины в (5.1) суть (плотности) распределения, зависящие от  $(\mathbf{x}, t)$ .

Умножив уравнение Эйлера скалярно на  $\mathbf{v}$  получим уравнение *живых сил* (см. теорему 1.3 в разделе 1 на с. 123)

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla V. \quad (5.2)$$

Сумма последнего уравнения с уравнением для внутренней энергии даёт уравнение для изменения (полной) энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla V. \quad (5.3)$$

Для стационарных адиабатических движений (без притока тепловой энергии к частицам среды извне) уравнение (5.3)

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon + V \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \quad (5.4)$$

приводимо к виду

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + V \right) = 0, \quad (5.5)$$

где  $h = c_p T$  — энтальпия,  $c_p$  — удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $c_p - c_v = R$ . Из (5.5) следует, что вдоль линий тока (они же — траектории) справедлив интеграл вида (3.2)

$$B = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P + V = \text{const}, \quad (5.6)$$

где в роли функции давления  $P$  выступает энтальпия  $h$ .

В работе [93] теоретические построения начинаются с выписывания интеграла (5.6), в который подставляется поле скорости регулярного вихря (3.20). Это означает, что движение среды, описываемое системой уравнений (3.1), подчиняется интегралам (3.2) и (5.6), что порождает противоречия.

Во-первых, придётся заключить, что функции давления в интегралах (3.2) и (5.6) отличаются на постоянную, что невозможно. Действительно

$$P \stackrel{(5.6)}{=} h = c_p T = c_p \frac{p}{\rho R} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \neq \frac{p}{\rho} \stackrel{(3.2)}{=} P,$$

где  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  — показатель адиабаты.

Во-вторых, из первого и третьего уравнений системы (5.1) для несжимаемой среды ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) следуют уравнения  $\dot{\rho} = 0$  и  $\dot{\varepsilon} = 0$ , интегралы которых суть  $\rho = \text{const}$  и  $T = \text{const}$  вдоль траекторий частиц. Совместно с уравнением состояния, получаем отсюда постоянство давления вдоль траекторий. То есть условие несжимаемости не позволяет совместить системы уравнений (3.1) и (5.1), если только не отказаться от уравнения состояния совершенного газа, связывающего величины  $\rho$ ,  $p$  и  $T$ . То же самое, но другими словами — при движении несжимаемой среды нельзя применять (двухпараметрическую) термодинамику совершенного газа. В самом деле, из первого закона термодинамики (из последнего получено третье уравнение системы (5.1) исключением  $\rho$  и  $\dot{\rho}$  с помощью первого уравнения системы (5.1))

$$\delta q = d\varepsilon + p d \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (5.7)$$

имеем два пути распределения притока тепловой энергии  $\delta q$  (энергии, передающейся немеханическим способом): изменение внутренней энергии (первое слагаемое в правой части (5.7)) и совершение работы (второе слагаемое). Но при движении совершенного газа, описываемого системой уравнений (5.1), нет притока тепловой энергии к частицам ( $\delta q = 0$ , то есть части-

цы среды могут быть представлены небольшими количествами газа в маленьких цилиндрах из школьного курса физики, сделанных из изолирующего материала — между содержимым этих цилиндров нет обмена тепловой энергией, но содержимое одних цилиндров может воздействовать на содержимое других посредством движения поршней цилиндров), что указывает на адиабатический термодинамический процесс. При движении, сохраняющем объём частиц, невозможно совершение механической работы (поршни в цилиндрах не могут двигаться). В итоге имеем неизменность внутренней энергии ( $d\varepsilon = \dot{\varepsilon} dt = 0$ ) и, соответственно, температуры. Если на всех траекториях, начинающихся на бесконечности, температура одна и та же (таково предположение работы [93]), то она останется постоянной на всех траекториях, включая те, которые пересекают экваториальную плоскость регулярного вихря между замкнутыми вихревыми торами.

Приведённые соображения показывают противоречивость исходных положений работы [93], предполагающих выведение из интеграла (5.6) зависимости температуры частиц несжимаемой среды в экваториальной плоскости от их скорости и давления. Однако из методических соображений продолжим чтение работы [93], придерживаясь своих обозначений.

Итак, в отсутствие внешних сил ( $V \equiv 0$ ) интеграл (5.6) принимает вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h = \text{const}, \quad (5.8)$$

причём постоянная здесь на каждой линии тока, вообще говоря, своя. Разложим поле скорости  $\mathbf{v}(R, \theta)$  регулярного вихря (3.20) на два поля — невозмущённое (квazitвёрдое вращение)  $\dot{\mathbf{v}}(R)$  (3.14) и возмущённое (добавка к квazitвёрдому вращению)  $\mathbf{v}'(R, \theta) = \mathbf{v}(R, \theta) - \dot{\mathbf{v}}(R)$ . Невозмущённое поле скорости  $\dot{\mathbf{v}}(R)$  удобно рассмотреть не в сферической системе координат —  $(\dot{v}_r, \dot{v}_\theta, \dot{v}_\varphi)$ , а в цилиндрической —  $(\dot{v}_\rho, \dot{v}_\varphi, \dot{v}_z)$  (3.16), где составляющая  $\dot{v}_\varphi(R) = C_1 C_0^2 R$  соответствует вращению вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_\infty = C_1 C_0^3 = \text{const}$ , а составляющая  $\dot{v}_z \equiv v_\infty = -2 C_1 C_0^2 = \text{const}$  — поступательному движению вдоль оси  $z$  (связь между  $v_\infty$  и  $\omega_\infty$  дана выражением (3.15) на с. 137).

Рассмотрим теперь линию тока, приходящую из области  $\text{sign}(\alpha) z = +\infty$  в экваториальную плоскость между вихревыми торами и уходящую в область  $\text{sign}(\alpha) z = -\infty$ . Пусть расстояние такой линии тока до оси  $z$  в экваториальной плоскости ( $z = 0$  или  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) равно  $R$ , а в плоскостях  $z = \text{const}$ , бесконечно удаленных от экваториальной, равно  $\dot{R}$ . Значение  $\dot{R}$  может быть определено либо из выражения (3.7), (3.6) для функции тока  $\Psi(R, \theta)$ , либо интегрированием уравнений линий тока от экваториальной плоскости. Не составит труда убедиться, что  $\dot{R} \neq R$  (см. рис. 1, а).

В работе [93] принято, что на каждой линии тока при  $|z| \rightarrow \infty$  энтальпия принимает значение  $h_\infty$ . Это позволяет записать интеграл (5.8) так

$$\frac{1}{2} \dot{v}_\varphi^2(R) + \dot{v}(R) \cdot \mathbf{v}'(R, \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2(R, \frac{\pi}{2}) + h(R, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \dot{v}_\varphi^2(\dot{R}) + h_\infty, \quad (5.9)$$

откуда для энтальпии в экваториальной плоскости имеем

$$h(R, \frac{\pi}{2}) = h_\infty + \frac{1}{2} \left( \dot{v}_\varphi^2(\dot{R}) - \dot{v}_\varphi^2(R) \right) - \dot{v}(R) \cdot \mathbf{v}'(R, \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2(R, \frac{\pi}{2}). \quad (5.10)$$

В работе [93], по умолчанию, принято, что  $\dot{R} = R$  (при переходе от выражений {4.13} и {4.14} к выражению {4.15}; о равенстве  $\dot{R} = R$  см. выше), и вместо выражения (5.10) получено следующее

$$h(R, \frac{\pi}{2}) = h_\infty - \dot{v}(R) \cdot \mathbf{v}'(R, \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2(R, \frac{\pi}{2}), \quad (5.11)$$

откуда выведена зависимость температуры в экваториальной плоскости от  $R$

$$T(R, \frac{\pi}{2}) = T_\infty - \frac{1}{c_p} \left[ \dot{v}(R) \cdot \mathbf{v}'(R, \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2(R, \frac{\pi}{2}) \right]. \quad (5.12)$$

Далее в последнюю „вручную“ добавлено постоянное слагаемое  $T_c$

$$T(R, \frac{\pi}{2}) = T_\infty - \frac{1}{c_p} \left[ \dot{v}(R) \cdot \mathbf{v}'(R, \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2(R, \frac{\pi}{2}) \right] + T_c \quad (5.13)$$

для того, чтобы вновь полученная зависимость была непрерывна при  $R = R_c$  (значение  $R_c$  переменной  $R$  равно радиусу  $R_{II,2}$  внешней непроницаемой сферы, то есть соответствует поверхности звезды в истолковании решения (3.7), (3.6) для функции тока  $\Psi(R, \theta)$ ; см. раздел 3, с. 141). Значение  $T_c$  легко может быть найдено, поскольку в точку  $(R_c, \frac{\pi}{2})$  экваториальной плоскости приходит линия тока из точки торможения на полюсе сферы радиуса  $R_c$ , в последнюю приходит линия тока, идущая вдоль оси  $z$  из области  $\text{sign}(\alpha) z = +\infty$ . Для такой линии тока имеем из интеграла (5.8)

$$c_p T(R_c, \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} v_\varphi^2(R_c, \frac{\pi}{2}) = c_p T_\infty + \frac{1}{2} v_\infty^2, \quad (5.14)$$

что сразу же даёт значение  $T_c$ . Заметим, что добавление постоянной  $T_c$  не восполняет потерю второго слагаемого (5.10) при выведении зависимости (5.11), поэтому последствия от принятия допущения  $\dot{R} = R$  неявно исправлены только в одной точке  $(R_c, \frac{\pi}{2})$ .

Покажем, что построение непрерывной зависимости  $T(R, \frac{\pi}{2})$  в экваториальной плоскости даже на основе полного выражения (5.10) невозможно.



В самом деле, в экваториальной плоскости только для кольцевых участков  $R_{2,\mu} \leq R \leq R_{1,\mu+1}$  между вихревыми торами  $Q_\mu$  и  $Q_{\mu+1}$  можно указать линии тока, приходящие из области  $\text{sign}(\alpha)z = +\infty$ . Следовательно, только для этих участков будем иметь вклад функции  $\dot{v}_\varphi(\dot{R})$ ,  $\dot{R}_{2,\mu} \leq \dot{R} \leq \dot{R}_{1,\mu+1}$ , непрерывной при  $\dot{R} \geq 0$ , в правую часть выражения (5.10). Кольцевые участки  $R_{1,\mu} \leq R \leq R_{2,\mu}$  вихревых торов  $Q_\mu$  отделены от основного движения, „начинающегося“ в области  $\text{sign}(\alpha)z = +\infty$  и „заканчивающегося“ в области  $\text{sign}(\alpha)z = -\infty$  (рис. 1, а), что не было учтено в работе [93].

Для выведенной описанным способом зависимости  $T(R)$  в работе [93] было получено асимптотическое выражение

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - k_B [\alpha \cos(R) - \alpha^2 R_c^2]. \quad (5.15)$$

В работе [93] не указаны значения коэффициентов  $k_B$  и  $\alpha$  (а также значение  $v_\infty$ , необходимое для вычисления  $k_B$ ), но, согласно графику функции  $T(R)$  (5.15), колебания температуры составляют от  $0,2T_\infty$  до  $0,4T_\infty$ , чего в области низких значений температуры достаточно для конденсации. В работе [93] отмечено, что своих наименьших значений температура достигает в области вихревых торов, где будет накапливаться газовый конденсат. Но в области вихревых торов любая зависимость температуры от расстояния  $R$  до оси вращения, выведенная описанным выше способом, теряет силу.

Авторы работы [93] обратили внимание на то, что зависимость (5.15) описывает незатухающее по  $R$  колебательное изменение температуры за пределами вихревых торов, вплоть до  $R \rightarrow \infty$ , но это было приписано тому, что в работе не было учтено действие магнитных и других сил. Согласно выражению (5.10), за пределами вихревых торов значения температуры и энтальпии стремятся к предельным значениям  $T_\infty$  и  $h_\infty$ , поскольку  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ . Напомним, что интеграл (5.8) не применим для модели несжимаемой среды, но сейчас идёт речь об обоснованности преобразований интеграла (5.8). Заметим, что выражение (5.11), полученное из выражения (5.10) в предположении  $\dot{R} = R$ , описывает затухающее поведение температуры, асимптотически стремящейся к значению  $T_\infty$ . По нашему мнению, при выводе окончательного выражения  $T(R)$  не все преобразования были обоснованы, а асимптотическая формула верно воспроизвела полученный результат.

Итак, в работе [93] при неправомерном соединении поля скорости для движения несжимаемой среды (с фазовыми переменными  $\mathbf{v}$  и  $p$ ) с интегралом движения сжимаемой среды (с фазовыми переменными  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $p$ ) выведена зависимость (5.15), согласно которой в экваториальной плоскости планетарного вихря, за пределами вихревых торов, распространяются колебательные возмущения температуры (отсутствующей в списке зависимых переменных системы уравнений (3.1)). Но, согласно интегралу (5.8), для линий тока, пересекающих экваториальную плоскость далеко за пределами вихревых торов, температура постоянна и равна  $T_\infty$ , что противоречит зависимости (5.15).

Авторы работы [93] сообщили о подтверждении своих теоретических построений и сделанных на их основе выводов данными наблюдательной астрономии, приведя изображения туманности CRL 2688 (the “Egg Nebula”) „Яйцо“ и планетарной туманности Mz3 (the “Ant Nebula”) „Муравей“, заимствованные из неназванных источников. На сайте <http://www.astronet.ru> даны описания туманностей и приведены ссылки на первоисточники изображений.

Туманность CRL 2688 открыта в 1975 г. группой астрономов [78], предложившей следующую модель: между двух близко расположенных газовых туманностей находится звезда, первичный световой поток которой накладывается на два вторичных потока, отраженных от газовых туманностей. Если авторы работы [93] сообщают, что изображение туманности соответствует фронтальному виду, то есть, что это плоский объект, вроде регулярного планетарного вихря; то первооткрыватели, по множеству прямых и косвенных данных, утверждают, что объект — пространственный.

В работе [81] обработаны результаты оптических наблюдений туманности CRL 2688 космическим телескопом „Хаббл“ в 1995 г., выполнено сравнение с результатами наземных наблюдений 1991 и 1993 гг., предложена модель строения туманности. В этой модели в центре туманности находится окружённая толстым коконом материи звезда, на стадии образования красного гиганта (возможно, в начале стадии или после завершения, either pre-main-sequence or post-main-sequence), порождающая поток, исходящий со скоростью примерно 20 км/с. Круговые дуги, поперечно пересекающие световые лучи, суть наблюдаемые на небесном своде сфероподобные трёхмерные образования повышенной плотности и яркости; некоторые дуги могут пересекаться; незамкнутость дуг может быть следствием слабой освещенности туманности паа́рами световых лучей вблизи экваториальной плоскости. Продолжительность образования одной дуги составляет 75–200 лет (частное от деления линейной толщины дуги и скорости 20 км/с); промежуток времени между образованием последовательных дуг равен 150–450 годам; образование дуг длится примерно 12 700 лет (частное от деления радиуса внешней дуги  $7,6 \cdot 10^{12}$  км и скорости 20 км/с). Доступные в сети **Internet** изображения туманности CRL 2688 получены авторами работы [81].

В работе [77] построена совершенно иная пространственная модель объекта CRL 2688, по данным, полученным от авторов работы [81]. В этой модели объект — двойная звезда. Большая звезда относится к типу, приближающемуся на стандартной диаграмме Герцшпрунга–Ресселла к области красных гигантов (AGB star). При сближении с меньшим объектом большая звезда отдаёт через промежуточную точку Лагранжа, в месте соприкосновения полостей Роша обеих звёзд, часть своего потока массы (звёздного ветра), который меньшим объектом периодически отклоняется. Последнее порождает характерные пучки светового излучения.

Изображение туманности Mz3 также не соответствует модели работы [93]. Другими словами, авторы работы [93], обратившись к данным наблюдательной астрономии, не привели убедительных данных, подтверждающих конденса-

сацию газообразной среды туманностей.

Уделим внимание гипотезе Вайцзеккера [83], которая, по мнению авторов работ [84–98], служит теоретическим основанием для применения точного решения  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6) к задачам космогонии. Знакомство с гипотезой Вайцзеккера затруднительно, поскольку она изложена на языке, который в настоящее время перестал быть языком науки. К счастью, Гамов опубликовал расширенную рецензию [76] на работу Вайцзеккера. Из рецензии Гамова можно узнать, что гипотеза Вайцзеккера существенно опирается на предположение о переходе движения в допланетном облаке к турбулентному режиму, обеспечивающему частые столкновения частиц в газопылевой области. Вайцзеккер [83] полагал, что большого значения числа Рейнольдса  $Re \approx 10^{10} - 10^{14}$  (оценка [83] для Солнечной системы) достаточно, чтобы движение стало турбулентным за счёт конвекции. Сафронов [54, 55], учитывая возможность возникновения конвекции и оптическую прозрачность газовой среды допланетного облака, доказал, что последнее было устойчиво по отношению к малым возмущениям, поэтому в облаке не могла возникнуть конвекция, приводящая к возникновению турбулентности.

Мы можем поступить подобным образом в отношении точного решения  $\Psi(R, \theta)$  (3.7), (3.6), применив к нему критерий Рэля [80], необходимое и достаточное условие устойчивости вращательного движения идеальной несжимаемой жидкости. Согласно этому критерию, вращательное движение с угловой скоростью  $\omega(r)$  устойчиво при выполнении следующего условия

$$\frac{d}{dr} (\omega r^2)^2 > 0. \quad (5.16)$$

Для поля скорости (3.20) регулярного вихря, согласно условию (5.16), имеем

$$W(R) := \frac{d}{dR} (v_\varphi(R, \frac{\pi}{2}) R)^2 = R^2 [\alpha + F_1(R)] [2\alpha - \sin R - R F_1(R)], \quad (5.17)$$

откуда легко усмотреть, что это знакопеременное выражение. Подтверждением выступают графики функции  $W(R)$  (5.17), приведённые на рис. 6, а.

Итак, в данном разделе мы убедились, *во-первых*, что возможности вихревой космогонии недостаточны для согласования с данными наблюдательной астрономии. *Во-вторых*, гипотеза Вайцзеккера не может служить теоретическим обоснованием вихревой космогонии, поскольку основана на противоречивых предположениях, в частности, предполагая в протопланетном облаке избыточно устойчивый тип движения. *В-третьих*, вихревая космогония, напротив, основана на движении, которое оказывается неустойчивым по Рэлю. Выскажем предположение о том, что нарушение устойчивости данного движения будет сопровождаться переходом к движению с полем скорости  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ . Понятно также, что движение в регулярном вихре не может подтверждать гипотезу Вайцзеккера, о чём сообщают авторы работ [84–98].

## 6. Вихревая космология

Так называемая проблема вращения галактик состоит в расхождении между наблюдаемой скоростью вращения газа и звезд в дисках спиральных галактик и скоростью, получаемой на основании ньютоновской динамики. Попытки разрешения этой проблемы основываются обычно на гипотезе темной материи или на модифицированной ньютоновской динамике.

<...>

Природа темной материи все еще остается невыясненной. Неизвестна даже форма, в которой находится эта скрытая материя [20].

Говорить о проблеме «темного вещества» — значит касаться одной из самых важных загадок современной науки; в конце концов, у нас нет прямых доказательств того, что темное вещество вообще существует в заметных количествах. Нам лишь известно, что непосредственно наблюдаемые массы галактических систем меньше масс, вычисленных с использованием стандартной динамики. Заполненные предполагаемым темным веществом галактические системы и вселенная являются, может быть, крайне горьким лекарством для большинства людей, но оно не единственно возможное. Стоит рассмотреть и другой путь, основанный на возможном отклонении от стандартной динамики в условиях, существующих в галактических системах. . . . модифицированная динамика (МОНД) и развилась как раз в этом направлении [1]. Она исходит из того, что ускорения в галактических системах очень малы по сравнению с теми, что имеют место в солнечной системе, например. МОНД утверждает, что в нерелятивистской динамике задействована константа  $a_0$  с размерностью ускорения, такая что в формальном пределе  $a_0 \rightarrow 0$  — т.е. когда все остальные величины с размерностью ускорения намного больше  $a_0$  — получается стандартная динамика (по аналогии с появлением  $\hbar$  в квантовой механике и классическим пределом при  $\hbar \rightarrow 0$ . В противоположном пределе большого  $a_0$  динамика характеризуется пониженной инерцией; грубо говоря, в этом пределе инерция сказывается на ускорении  $a$  как  $ma^2/a_0$  вместо стандартного  $ma$ . Это допускает различные частные формулировки [40].

На следующий день после того, как ко мне впервые попал восхитительный том Кэрролла, на семинаре в ФИАНе был доклад о новой теории сильных взаимодействий. Кварки (я едва не написал «снарки») удерживаются в мешке вакуума, сглаженного глюонным полем, вне которого бушуют инстантоны, рождающиеся и умирающие в мнимом времени. Кэрроллу это понравилось бы [38].

Космология (от греч. *kósmos* — мир, Вселенная и *lógos* — слово, учение), учение о Вселенной как едином целом и о всей охваченной астр. наблюдениями области Вселенной (Метагалактике) как части целого; раздел астрономии. Выводы К. основываются на законах физики и данных наблюдательной астрономии, а также философских принципах (в конечном счёте — на всей системе знаний) своей эпохи. Важнейшим философским постулатом К. является положение, согласно которому законы природы (законы физики), установленные на основе изучения весьма ограниченной части Вселенной, чаще всего на основе

опытов на планете Земля, могут быть экстраполированы на значительно большие области, в конечном счёте — на всю Вселенную.

Космологические теории различаются в зависимости от того, какие физ. принципы и законы кладутся в основу К. Построенные на их основе модели должны допускать проверку для наблюдаемой области Вселенной, выводы теории должны подтверждаться наблюдениями (во всяком случае, не противоречить им), теория должна предсказывать новые явления [63].

В работе [97] точное решение (3.7), (3.6), а именно поле скорости (3.20) регулярного вихря, применено для решения трудных вопросов современной космологии, связанных с неоднозначностью понятий „тёмной материи“ и „тёмной энергии“, введённых для истолкования явлений, наблюдаемых в галактиках.

Согласно современным представлениям [9, 16, 21, 68, 72], галактики суть дискообразные области пространства (рис. 7), заполненные большим количеством „молодых“ и ярких по блеску звёзд (звёздных систем), а также газом и пылью. В центральной части галактического *диска* имеется утолщение, или *балдж* (от англ. *bulge*. Это слово — настоящее проклятие для редакторов астрономической литературы, поскольку общепринятого русского эквивалента не существует. Слово «вздутие» не вполне точно отражает существо дела, поскольку это не разбухание диска; объекты балджа к диску не принадлежат, они составляют, в сущности, наиболее плотную часть обычной сферической составляющей и отличаются, по-видимому, лишь большим содержанием тяжёлых элементов [21]). Диск погружён в *гало* — область, близкую по форме к эллипсоиду вращения. Малая ось гало, перпендикулярная плоскости диска, составляет примерно три четверти от больших полуосей, расположенных в плоскости диска. Область гало заполнена „старыми“ и слабыми по блеску звёздами, пыль и газ почти отсутствуют. Массы диска и гало, по косвенным оценкам, примерно равны, причём плотность материи (вещества) в гало изменяется при удалении от диска. Гало, в свою очередь, находится в объёмлющей его части галактики, называемой *короной*. Корона очень разрежена; иногда в ней находятся карликовые галактики — спутники [24]. Внешняя граница короны — сферическая.

В современной космологии принято, что орбитальная скорость  $v(r)$  в диске может быть описана ньютоновским потенциалом (см. выше извлечение из статьи «Космология» [63]), но под массой  $M(r)$  центрального тела следует понимать массу всех материальных тел (звезд, газа и пыли) внутри орбиты радиуса  $r$

$$v^2(r) = \frac{\gamma M(r)}{r}. \quad (6.1)$$

Строго говоря, под скоростью в (6.1) следует понимать среднюю орбитальную скорость  $\bar{v}$  на круговой орбите радиуса  $r$ , последний есть среднее расстояние объекта до центрального тела. Если по наблюдениям известна орбитальная скорость  $v(r)$ , то с помощью зависимости (6.1) может быть вычислена масса  $M(r)$ . Например [68], радиус диска Галактики  $r \approx 10^{20}$  м,  $M(r) \approx 10^{41}$  кг,

тогда скорость движения края диска  $v \approx 300$  км/с. Для Солнца, находящегося вблизи края диска Галактики (но не на краю), согласно наблюдениям,  $v \approx 220\text{--}250$  км/с, что близко к полученной оценке.

Отметим, что на орбитальную скорость  $v(r)$  влияют только материальные тела (массы), находящиеся внутри орбиты радиуса  $r$ , а внешние — нет. Это — свойство ньютоновского потенциала тяготения, указанное ещё в [50].

Кривая вращения (6.1) в области балджа не имеет единообразного поведения — для одних галактик  $v(r)$  изменяется почти линейно (как если бы вращение здесь было квазитвёрдым,  $M(r) \sim r^2$ ), для других  $v(r)$  почти постоянна ( $M(r) \sim r$ ), а иногда даже уменьшается (увеличивается при приближении к центру диска). Но внутри области гало и за её пределами, в области короны, предварительные оценки позволяли рассчитывать на кеплерову кривую вращения  $v(r) \sim 1/\sqrt{r}$  (см. раздел 2), поскольку большая часть массы галактики сосредоточена в диске и гало. Измерения, однако, указывают, за очень редким исключением, на примерно постоянную орбитальную скорость. Кривые вращения для некоторых галактик, с подробными описаниями, приведены в работах Бутенко [65], Фридмана [65] и книгах Батурина [9] (рис. 6.7–6.10, 7.30) и Аведисовой [1] (рис. 3.58, 3.59). Орбитальные скорости в области короны измеряют либо прямыми методами, например, для карликовых галактик–спутников, либо косвенными. Последние подробно описаны в книге Аведисовой [1].

Постоянство орбитальной скорости в области короны влечёт зависимости для массы  $M(r) \sim r$  и плотности  $\rho(r) \sim r^{-2}$ , указывающие на заполненность области короны материей (веществом), которая не наблюдается. Последнюю, по понятным причинам, назвали тёмной. История тёмной материи (тёмного вещества) восходит к 30–м годам XX века.

... в настоящее время решающих доказательств в пользу той или иной интерпретации кривых вращения галактик и других наблюдательных данных (темная материя или МОНД) нет. Дальнейшие исследования и новые наблюдательные и экспериментальные данные помогут яснее понять, какая из этих возможностей ближе к реальности. В случае МОНД требуется разработка релятивистской теории в рамках этой парадигмы, а в случае темной материи очень важным было бы лабораторное обнаружение существующих частиц с необходимыми свойствами или доказательство существования подобных частиц темной материи в экспериментах по физике высоких энергий [20].

Кривые вращения для поля скорости (3.20) [84] имеют асимптотическое поведение  $v(r) \sim r$  (см. раздел 4 статьи), причём приближение к последней тем лучше, чем больше  $r$ . Это значит, что поле скорости (3.20) не согласуется с кривыми вращения наблюдаемых галактик. Поле скорости (3.20) не согласуется также с наблюдаемыми разновидностями галактик (см. классификацию галактик в книгах Горбацкого [16], Морозова [43] и Фридмана [66]) — для многих галактик свойственны спиральные рукава, а вовсе не кольцевые в плане движения. Работа Бутенко [12] даёт пример моделирования движения среды в дисках галактик, с учётом спиральных движений. Кроме того, плотность галактической среды изменяется от центра к краю диска на несколько

порядков (см. рис. 9), а в решении [84] —  $\rho = \text{const}$ .

В связи с этим уместно будет привести следующее замечание Лихнеровича: «... если сравнить то, что называлось „физикой“ или „математикой“ в XIX веке, с современной физикой, то нас удивят не уравнения, которые мы выписываем, но псевдорациональные сущности, которые мы конструируем для придания смысла этим уравнениям. Изменился дискурс, а не вид уравнений».

Если говорить именно об уравнениях, то буквально это неверно: с возникновением общей теории относительности и квантовой механики к классическому арсеналу уравнений добавилось много нового. Но при этом бесспорно, что «новая физика» принесла и новые способы изъясняться, в частности, создав в естественном языке многочисленные выражения, денотатами которых являются элементы математического описания реальности, а не сама реальность, в каком бы смысле мы ни были готовы понимать это слово со слишком размытым значением [39].

Теперь перейдём к обсуждению понятия тёмной энергии и всего, что с ним связано в работе [97].

Тёмная энергия — невидимая космическая среда, физическая природа и микроскопическая структура которой неизвестны. О её существовании стало известно 15 лет назад в результате астрономических наблюдений на больших космологических расстояниях, вблизи горизонта мира. . . Эта среда создает не тяготение, как все известные ранее формы энергии, массы, а антитяготение. В наблюдаемой Вселенной как целом антитяготение сильнее тяготения. Из-за этого космологическое разбегание галактик происходит с ускорением — что и было зарегистрировано . . . с помощью космического телескопа „Хаббл“ и других крупных инструментов [70].

Высказываемые точки зрения на природу тёмной энергии сильно разнятся (см. например, опубликованные в порядке дискуссии статьи [37, 69]), бесспорно только ускоренное разбегание галактик.

В работе [97] предложено гидродинамическое объяснение понятия темной энергии, но нет описания ускоренного разбегания галактик в рамках точного решения (3.7), (3.6) системы уравнений (3.1). Для обоснования связи точного решения (3.7), (3.6) с тёмной энергией и тёмной материей в работе [97] выстроена следующая логическая последовательность (как её понял и восстановил по шагам автор статьи):

1) для систем с ньютоновским потенциалом тяготения справедлива теорема о вириале (1.13):  $2\langle T \rangle + \langle V \rangle = 0$ ;

2) если  $\overline{v^2}$  — среднее по системе значение квадрата скорости (по сути, дисперсия скорости),  $M$  — масса системы,  $R$  — характерный размер системы, то, в силу теоремы о вириале, имеем  $M\overline{v^2} - \gamma M^2 R^{-1} = 0$ , откуда *вириальная масса* системы (оценочное значение) равна  $M = R\overline{v^2}\gamma^{-1}$ ;

3) согласно астрономическим наблюдениям за скоростью  $v$  движения крупных систем (галактик) и значению вириальной массы  $M$ , теорема о вириале (1.13) не выполняется (кинетическая энергия примерно в 3 раза больше потенциальной), что носит название вириального парадокса;

4) точное решение (3.7), (3.6) описывает не только планетарный вихрь, но и более крупные астрономические системы, например, галактики, для которых имеет место вириальный парадокс;

5) в интеграле энергии для вихревых невинтовых движений присутствует дополнительное слагаемое, названное вихревой энергией;

6) вихревая энергия в интеграле энергии, в силу п. 4, соответствует тёмной энергии в крупных астрономических системах (галактиках);

7) должна существовать связь между тёмной энергией и тёмной материей, что позволит связать все пункты приведённой последовательности.

Тут ми з іншого боку підходимо до проблеми «темної енергії» і констатуємо, що у цих астрофізичних теоріях дійсно наявний дефіцит потенціальної енергії, яка асоціюється з гравітацією, тобто наявністю гравітуючих або світних мас. Тому цій енергії повинна відповідати певна маса, тобто «темна матерія». Але у вихрових течіях ця додаткова енергія не пов'язана з додатковою масою, хоча питома енергія  $E(\Psi)$  помножується на густину, тобто масу середовища. Тому ця проблема вимагає більш ретельного методологічного осмислення і конкретного пояснення [97].

... у невинтових течіях інтеграл енергії містить додатковий член з фізичним смислом потенціальної енергії. Показано, що наявність цього члена розв'язує віриальний парадокс у астрофізиці, тобто вказана потенціальна енергія може відігравати роль т. з. темної енергії у точній відповідності з теоремою про віріал. Аналіз градієнтних силових полів у вихорі дозволив визначити відповідний силовий вплив темної енергії та виділити еквівалентну йому умовну темну матерію, яка заповнює зовнішні гало галактичних вихорів [97].

Мы изучим не всю приведённую последовательность, а только два её шага: 1) проверим существование дополнительного слагаемого (вихревой энергии) в интеграле энергии; 2) проверим выполнение теоремы о вириале в точном решении (3.7), (3.6).

Итак, переходим к первому, *энергетическому*, шагу последовательности. Под интегралом энергии автор работы [97] понимает интеграл Бернулли, что, по нашему мнению, требует большой осторожности в высказываниях и последующих выводах, поскольку интеграл Бернулли, вообще говоря, не совсем (или совсем не) закон сохранения энергии. Поучительно проследить, как в течение 50 лет уточнялась точка зрения на интеграл Бернулли и менялось обозначение трёхчлена Бернулли в различных изданиях учебника Лойцянского [34–36].

Величину  $E$ , равную сумме приведенных к единице массы кинетической энергии среды и потенциальных энергий силовых полей объемного действия сил давлений и собственно объемных сил, можно было бы назвать *приведенной к единице массы полной механической энергией*.

<...>

$$E = \frac{V^2}{2} + P + \Pi = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (52)$$

Отдельные слагаемые этой суммы представляют отнесенные к единице массы: 1) *кинетическую энергию* частицы, 2) *потенциальную энергию поля объемного действия сил давлений* в данной точке потока и 3) *потенциальную энергию поля объемных сил*. Сумма  $E$



этих трех слагаемых представляет ... отнесенную к единице массы полную механическую энергию потока в данной точке [34].

Величина  $-\frac{1}{\rho} \text{grad } p$  ... может рассматриваться как отнесенный к единице массы главный вектор поверхностных сил в данной точке, или *вектор объемного действия поверхностных сил*; отсюда мы приходим к заключению, что функция давления  $P$  ... представляет *потенциал объемного действия поверхностных сил*.

<...>

... Возможность трактовки  $B$  как отнесенной к единице объема полной механической энергии жидкости ограничена тем фактом, что величина является потенциальной энергией *объемного действия* поверхностных сил, а не непосредственно самих поверхностных сил, которые ... не образуют силового поля, и, следовательно, само понятие потенциальной энергии для них не имеет смысла.

<...>

$$B = \frac{V^2}{2} + P + \Pi = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (20)$$

Полученное равенство можно рассматривать как первый интеграл уравнений Эйлера, справедливый в случае *стационарного* движения при наличии *функции давлений*, представляющий потенциал *объемного действия поверхностных сил*, и *потенциала объемных сил*. Этот интеграл ... может трактоваться как *интеграл живых сил*, или *интеграл кинетической энергии* уравнений движения центра инерции элементарного объема жидкости (интеграл Бернулли). Его не следует отождествлять с законом сохранения полной механической энергии движущейся жидкости, а функцию  $B$  трехчлен Бернулли — с отнесенной к единице массы полной механической энергии [35].

Трехчлен Бернулли ... можно трактовать как *полную механическую энергию в данной точке*, отнесенную к единице массы, т. е. по обычной терминологии как полную *удельную* механическую энергию. Действительно, первое слагаемое в левой части представляет удельную кинетическую энергию, третье слагаемое — удельную потенциальную энергию объемных сил.

Как уже разъяснялось ... функция давления  $P$  имеет смысл потенциала (потенциальной энергии) *объемного действия сил давления* (точнее, массовой плотности действия этих сил). Следует избегать встречающегося иногда определения функции давления  $P$  (в случае  $\rho = \text{const}$  равной  $p/\rho$ ) как *потенциала давлений*. Давления образуют *скалярное поле*, для которого понятия потенциала или потенциальной энергии не существует.

<...>

$$B = \frac{V^2}{2} + P + \Pi = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (20)$$

Полученное равенство можно рассматривать как первый интеграл уравнения Эйлера, справедливый в случае *стационарного* движения при наличии *функции давления*, представляющей *потенциал объемного действия поверхностных сил*, и *потенциала объемных сил*. Этот интеграл ... может трактоваться как *интеграл механической энергии* уравнения движения центра инерции элементарного объема жидкости (*интеграл Бернулли*) [36].

В работе [97] в отношении равенства (3.4) (выражение под номером {2.3} при  $\mathbf{v}_t = 0$ ) приведены следующие рассуждения. Поскольку  $\nabla B$  — потенциальный вектор, то вектор  $\mathbf{u} := \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  также потенциальный, то есть суще-

ствуется скалярная функция  $W$ :  $\nabla W = -\mathbf{u}$  (равенство {2.4}), которая, согласно обоснованию метода построения двухпараметрических вихревых движений [13] и рассмотрению частных случаев [84] таких движений, есть сложная функция положения, где промежуточной переменной выступает функция тока  $\psi(\mathbf{x})$ :  $W = E(\psi)$ , что, в свою очередь, означает существование “обобщённого интеграла энергии” {2.6} для невинтовых движений

$$T+P+V+E(\psi) = C, \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2, \quad \{2.6\}$$

где постоянная  $C$  одна и та же во всей области движения. Новое слагаемое  $E(\psi)$  в работе [97] названо *вихревой энергией*.

В разделе 3 приведён принятый в современных учебниках вывод интеграла Бернулли, к которому сейчас снова обратимся. Ни вывод интеграла Бернулли, ни сам интеграл, ни метод построения двухпараметрических винтовых движений, не дают повода для введения нового вида энергии и нового “обобщённого интеграла энергии” {2.6}, что сделано в работе [97]. В чём же причина их появления? — По-видимому, в отличном от общепринятого понимании вывода и сути интеграла Бернулли. Выскажем свою точку зрения на природу этого отличия. Итак, в левой части интеграла Бернулли (3.2) (для всех случаев его применимости, см. раздел 3, с. 133 и далее) записаны три слагаемых, первое из которых вычисляется по полю скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , второе — по полю давления  $p(\mathbf{x})$ , третье — заданная функция  $V(\mathbf{x})$ . Смысл интеграла (3.2) как тождества состоит в том, что две фазовые переменные  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и  $p(\mathbf{x})$  и известная функция  $V(\mathbf{x})$  порождают величины, сумма которых тождественно равна постоянной на соответствующем многообразии (линии тока, траектории, вихревой линии или даже во всей области движения). В правой же части равенства (3.4) присутствует вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ , который не представляет независимой величины, поскольку вычисляется по известному полю скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  в таком порядке: 1)  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ; 2)  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ . Это значит, что если задана пара функций  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ , удовлетворяющая системе уравнений (3.1), то после подстановки в левую часть равенства (3.4) всех входящих в неё величин и вычисления их суммы, последняя будет равна вектору  $\mathbf{u}$ . Теперь предположим, следуя работе [97], что потенциалом вектора  $-\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  есть функция  $W(\mathbf{x})$ :  $\nabla W = -\mathbf{u}$ , тогда из равенства (3.4) следует, что  $\nabla(B + W) = 0$ , или  $B + W = C$ , где постоянная  $C$  одна и та же во всей области движения. Другими словами, в области движения “новый” потенциал  $W$  отличается от “старого” — трёхчлена Бернулли — на мультипликативную и аддитивную постоянные:  $W = C - B$ , то есть это формула, которая не превращается в “обобщённый интеграл энергии” {2.6} при переписывании в виде  $B + W = C$ .

Отсюда заключаем, что выводы и рассуждения в окончании раздела 2 работы [97] о вихревой энергии, переносе этого понятия на Вселенную, тео-

рему о вириале в астрофизике, вириальном парадоксе и тёмной материи выглядят уже не вполне убедительно, но требуют дальнейшего изучения, поскольку им уделено большое внимание в оставшейся части работы [97] ... ця проблема вимагає більш ретельного методологічного осмислення і конкретного пояснення [97]. Заметим ещё, что представление о вихревой энергии ранее уже было введено в работе [95]. Ця додаткова «вихрова» енергія не може бути виміряною через швидкість чи роботу зовнішніх сил; вимірювання ж тиску в космосі є задачею проблематичною. Але у балансі енергій (8) вона буде проявлятися. Тому, якщо про неї не знати, то в енергетичному балансі буде дефект, який можна трактувати як «порушення закону Ньютона» у космосі або наявність там «темної енергії» [3]. Дійсно, якщо відкинути цей член у рівнянні енергії, то порушаться рівності у рівняннях Ейлера, які побудовано на основі закону Ньютона. Оскільки космічні утворення (туманності, галактики, планетарні системи) здебільшого є вихровими структурами, то вказаний фактор є суттєвим для енергетичних, масових та інших оцінок об'єктів і процесів у Всесвіті..

Если отклонение от ньютоновской динамики в галактических движениях может быть объяснено введением тёмной энергии (*прямой* ход рассуждений), то обнаружение авторами работ [95, 97] вихревой энергии в интеграле Бернулли должно быть подтверждено отклонением от динамики, задаваемой аксиомой 1.5 (см. раздел 1, с. 121; это *обратный* ход рассуждений). Но в вихревых невинтовых решениях граничных задач для системы уравнений (3.1) или вихревых невинтовых решениях системы уравнений (3.1) никто, включая авторов работ [95, 97], таких отклонений не наблюдал. Именно поэтому методическая сторона введения понятия вихревой энергии заслуживает большого внимания.

По нашему мнению, понятие вихревой энергии обязано своим появлением необычному истолкованию полученной в работе [97] формулы {4.5} для давления

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho C^2 \alpha \Psi = p_0 - T + W, \quad (6.2)$$

где квадрат скорости также выражен через функцию тока  $\Psi$ ,  $C := C_0 C_2^2$ .

Если скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и функцию тока  $\Psi(\mathbf{x})$  в формуле (6.2) выразить в сферических переменных  $(R, \theta)$ , согласно выражениям (3.20) и (3.7), (3.6), то снова получится выражение (3.8). Возможность записи решения  $(\mathbf{v}, p)$  системы уравнений (3.1) как сложной функции от  $\mathbf{x}$ , где промежуточной переменной выступает функция тока  $\Psi$ , то есть как  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\Psi(\mathbf{x}))$ ,  $p = p(\Psi(\mathbf{x}))$ , непосредственно следует из теории двухпараметрических вихревых движений (это одна из причин того, что метод построения таких движений был кратко пересказан по книге Васильева [13], см. раздел 3, с. 135). Покажем, что формула (3.8) есть ожидаемый результат и может быть получена иначе, чем в работе [97]. В самом деле, смысл равенства (3.4) существенно зависит от того, что известно о движении. Если поля скорости и давления не известны, из (3.4) полезно получить интеграл Бернулли вдоль линии тока (совпадающей здесь

с траекторией), вихревой линии или произвольной гладкой линии, перпендикулярной полю  $\nabla B(\mathbf{x})$ , то есть лежащей на поверхности  $\psi(\mathbf{x}) = \text{const}$ . Если поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  известно (такова последовательность построения точного решения системы уравнений в работе Громеки [17], книге Васильева [13] и работе [97]; об имеющихся отличиях последней от [13, 17] речь пойдёт далее), рассмотрим в области движения гладкую кривую  $\Upsilon$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.3)$$

трансверсальную к поверхностям  $B(\mathbf{x}) = \text{const}$ . Такая линия заведомо не совпадает с линией тока, вихревой линией и вообще не лежит на какой-либо поверхности  $B(\mathbf{x}) = \text{const}$  и не касается такой поверхности. Заметим ещё, что поскольку в двухпараметрических невинтовых движениях, согласно [13], скорость и давление могут быть выражены через функцию тока  $\psi$ , последняя постоянна на поверхностях  $B(\mathbf{x}) = \text{const}$ .

Для нахождения давления  $p$  вдоль кривой  $\Upsilon$  поставим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\mathbf{v}^2(\mathbf{x}(\lambda))}{2} \right) + \boldsymbol{\nu}(\lambda) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(\lambda)), & \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1], \\ p(\lambda_0) = p_0. \end{cases} \quad (6.4)$$

в которой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка получено скалярным умножением выражения (3.4) на вектор  $\boldsymbol{\nu}(\lambda) = \dot{\mathbf{x}}(\lambda)$ ,  $\mathbf{u} := \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ . Решение задачи (6.4) запишем в виде квадратуры

$$p(\lambda) + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2(\mathbf{x}(\lambda)) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_0^2 + \rho \int_{\lambda_0}^{\lambda} \boldsymbol{\nu}(s) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad (6.5)$$

где введено обозначение  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\lambda_0))$ .

В области движения, где  $\nabla \psi(\mathbf{x}) \neq 0$ , построим гладкую взаимно однозначную зависимость  $\psi = \psi(\lambda)$  или  $\lambda = \lambda(\psi)$ , как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\lambda} = \boldsymbol{\nu}(\lambda) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}), & \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1], \\ \psi(\lambda_0) = \psi_0. \end{cases} \quad (6.6)$$

С помощью решения задачи Коши (6.6) выполним замену переменной  $\lambda$  на  $\psi$  в интегральном слагаемом решения (6.5)

$$p(\lambda) + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2(\mathbf{x}(\lambda)) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_0^2 + \rho \int_{\psi_0}^{\psi} \boldsymbol{\nu}(\varphi) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(\varphi)) \frac{ds}{d\varphi} d\varphi. \quad (6.7)$$

Пусть  $H$  — первообразная подынтегрального выражения в (6.7), тогда для давления имеем

$$p(\lambda) + \frac{1}{2} \rho v^2(\mathbf{x}(\lambda)) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho H(\psi) - \rho H(\psi_0). \quad (6.8)$$

В работе [97] первообразная  $H$  была найдена (иным методом и в иной последовательности), а настройка постоянных интегрирования выполнена так, что  $\psi = 0$  при  $\mathbf{v} = 0$ , тогда из (6.8) получается выражение (6.2) для давления. Хорошо видно, что третье слагаемое в выражении (6.2) есть (накопленная при интегрировании трансверсально поверхностям  $B(\psi) = \text{const}$ ) постоянная, которая вносит вклад в давление относительно второго слагаемого (переменного на поверхности  $\psi = \text{const}$ ). Если раскрыть все слагаемые, то выражение (6.2) примет вид

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \dot{v}_\perp^2 + \rho \tilde{V}(r, \theta) = p_0 + \rho \dot{V}(\varrho) + \rho \tilde{V}(r, \theta), \quad (6.9)$$

где  $\dot{V}(\varrho)$ ,  $\varrho = r \sin(\theta)$ , — потенциал движения (3.19) с полем скорости  $\dot{v}_\perp(\varrho)$  (поле скорости  $\dot{v}(r, \theta)$  (3.14) без учёта равномерного движения вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_\infty$ , то есть равномерное вращение с угловой скоростью  $\omega_\infty$  вокруг той же оси),  $\tilde{V}(r, \theta)$  — потенциал возмущённого движения с полем скорости  $\mathbf{v}'(r, \theta) = \mathbf{v}(r, \theta) - \dot{v}(r, \theta)$ , убывающий при  $r \rightarrow \infty$ .

Потенциал  $\dot{V}(\varrho)$  построен в разделе 3 при решении кинематической задачи для поля скорости  $\dot{v}(r, \theta)$  (3.14). Это безусловно означает, что в точном решении с полем скорости  $\mathbf{v}(r, \theta)$  (3.20) нет никаких отклонений от обычной динамики, задаваемой аксиомой 1.5. Следовательно, нет никаких оснований для введения вихревой энергии.

На этом *энергетический* шаг последовательности (см. с. 165) завершён.

Переходим ко второму, *вириальному*, шагу последовательности. В разделах 3 и 4 работы [97], то есть её вириальной части, выполнены оценки некоторых величин, позволившие сделать вывод о выполнении утверждения (1.13) теоремы о вириале. В связи с этим выскажем следующие соображения.

*Во-первых*, проверяя равенства, составляющие суть теоремы о вириале, следует выбирать величины  $T$  и  $V$ , исходя из вида уравнения движения — его левая часть („ускорительная“, см. аксиому 1.5, раздел 1, с. 121) порождает кинетическую энергию, а правая (силовая) — совокупный потенциал. Например, если в правой части присутствует только  $-\nabla p$ , то потенциалом следует выбрать функцию давления  $P$ ; если же в правой части присутствуют два слагаемых  $-\nabla p + \rho \nabla V$ , то следует рассматривать совокупный потенциал  $P + V$ . „Вихревая энергия“ не входит в уравнение движения, поэтому замена в вириальных утверждениях силового потенциала вихревой энергией, как это сделано в работе [97], должно быть как-то обосновано, лучше всего — исходя из доказательства теоремы о вириале.

*Во-вторых*, если в уравнении движения присутствует потенциал  $V$ , последний нельзя отделять от давления  $p$  в вириальных вычислениях. Поясним, что это значит. Уравнение движения идеальной среды — это уравнение Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla P(\mathbf{x}) - \nabla V(\mathbf{x}) = -\nabla(P + V). \quad (6.10)$$

Если мы рассматриваем точное решение уравнения Эйлера (6.10) в виде поля скорости (не обязательно поля скорости регулярного вихря), то левая часть (6.10) уже задана, следовательно, значение правой части однозначно определено в каждой точке  $\mathbf{x}$  пространства. Если движение среды происходит без действия внешних сил, то есть  $V'(\mathbf{x}) = 0$ , то однозначно определены функция давления  $P'(\mathbf{x})$  и соответствующее ей давление  $p'(\mathbf{x})$ ; при действии внешних сил с потенциалом  $V''(\mathbf{x})$ , однозначно определены функция давления  $P''(\mathbf{x})$  и давление  $p''(\mathbf{x})$ . Очевидно, что при одном и том же поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  имеем  $P'(\mathbf{x}) + V'(\mathbf{x}) \equiv P''(\mathbf{x}) + V''(\mathbf{x})$ , но  $p'(\mathbf{x}) \neq p''(\mathbf{x})$ . Однако в работе [97] одна и та же функция  $p'(\mathbf{x})$  применена как при учёте внешних (гравитационных) сил, так и без их учёта. Кроме того, появление в правой части уравнения Эйлера потенциала внешних сил  $V''(\mathbf{x})$  означает, что его особенности будут унаследованы функцией  $p''(\mathbf{x})$ , что очевидно, поскольку сумма  $P''(\mathbf{x}) + V''(\mathbf{x})$  имеет те же особенности, что и левая часть. Другими словами, если потенциал  $V''(\mathbf{x})$  имеет особенность, а в левой части её нет, то функция  $p''(\mathbf{x})$  имеет такую же, но с противоположным знаком. Метод построения двухпараметрических вихревых движений, описанный в книге Васильева [13], составлен так, что после нахождения функции тока  $\psi(\mathbf{x})$ , сразу же становится известным трёхчлен Бернулли  $B(\mathbf{x})$ , а из него извлекаются все его составляющие. Допустить ошибку, состоящую в просмотре особенностей функции  $p(\mathbf{x})$ , наследуемых от потенциала  $V(\mathbf{x})$ , невозможно.

*В-третьих*, оценки слагаемых в утверждении теоремы о вириале следует вычислять путём осреднения вдоль траекторий, а не в отдельных положениях, как это сделано в работе [97].

Покажем, как распорядиться точным решением (3.7), (3.6) системы уравнений (3.1) и проверить, в какой форме выполнена теорема о вириале. Пусть известны траектории  $\mathbf{x}(t)$  движения частиц (см. определение в разделе 1), тогда определим на них следующие функции времени:

$$T(t) := \frac{1}{2} \rho v^2(\mathbf{x}(t)), \quad \langle T \rangle(t) := \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau) d\tau, \quad (6.11)$$

$$P(t) := \frac{p(\mathbf{x}(t))}{\rho}, \quad \langle P \rangle(t) := \int_0^t P(\tau) d\tau, \quad (6.12)$$

причём функция давления  $P(\mathbf{x})$  будет выступать потенциалом, поскольку внешние силы не действуют. Затем вычислим функции (6.11), (6.12) на выбранных траекториях и практически найдём пределы функций при больших значениях  $t$ . Эти значения следует испытать на выполнение равенств  $2\langle T \rangle + \langle P \rangle = 0$  (1.13) и  $\langle T \rangle - \langle P \rangle = 0$  (1.14). Если движение таково, что функция давления воспроизводит свойства ньютоновского потенциала  $rV(r) = \text{const}$ , то должно быть выполнено первое равенство, если движение таково, что функция давления воспроизводит свойства потенциала вида  $V(r) = \text{const } r^2$ , то есть должно быть выполнено второе тождество.

Траектории частиц получим как решения задач Коши для системы уравнений [91], описывающих движение частиц в поле скорости (3.20)

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -2C_2C_0^3 [\alpha + F_1(R)] \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = +2C_2C_0^3 \frac{[\alpha + F_2(R)]}{R} \sin \theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} = C_2C_0^3 [\alpha + F_1(R)]. \end{cases} \quad (6.13)$$

Задачи Коши для для системы уравнений (6.13) получим прибавлением начальных условий вида:  $R(0) = R_0$ ,  $2\theta(0) = \pi$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Интегрирование системы уравнений (6.13) проведём методом Эйлера второго порядка точности (предиктор – корректор), проверку правильности получаемых решений — последовательным дихотомическим уменьшением шага интегрирования  $\Delta t$ . Положим для простоты  $C_2C_0^3 = 1$ , тогда для указания на задачу Коши достаточно привести значения параметра  $\alpha$  и начального условия  $R_0$ . Интегральные кривые задачи Коши (траектории движения частиц) приведены на рис. 10, 11. Результаты вычислений функций (6.11), (6.12) представлены на рис. 12, 13. Что показывают эти результаты?

*Во-первых*, теорема о вириале для потенциала, соответствующего действию гравитации, то есть равенство (1.13), не выполняется ни для одной траектории. *Во-вторых*, равенство (1.14) не выполняется на рис. 12, а, б и 13, в, что не должно удивлять, поскольку на частицы, движущиеся в соответствующих вихревых торах, помимо квадратичного потенциала, действуют возмущающие добавки — они тем больше, чем дальше частицы находятся от осей торов. На рис. 12, в равенство (1.14) выполняется с небольшой погрешностью, поскольку частица движется вблизи оси соответствующего вихревого тора. На рис. 13, б равенство (1.14) выполняется асимптотически, при  $t \rightarrow \infty$ . Поведение кривых объясняется видом траектории частицы — она совершает движение вне какого-либо вихревого тора, постепенно удаляясь от области возмущённого движения, переходя в область действия поля скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  (3.14), у которого потенциал  $\mathring{V}$  (3.19) — квадратичная функция координат.

Итак, точное решение (3.7), (3.6) системы уравнений (3.1) не позволяет ввести понятие “вихревой энергии”, поскольку для последней нет места

при проверке теоремы о вириале с равенством (1.13), но асимптотически, при  $t \rightarrow \infty$ , выполняется теорема о вириале с равенством (1.14). Это говорит о том, что гидродинамическая модель #тёмной энергии, предложенная в работе [97], не соответствует движениям в поле тяготения с ньютоновским потенциалом, то же верно и для #тёмной материи, действие которой нельзя приписать квазитвёрдому вращению. Следовательно, на теоретических построениях работы [97] нельзя объяснить кривые вращения в галактиках и ускоренное разбегание галактик.



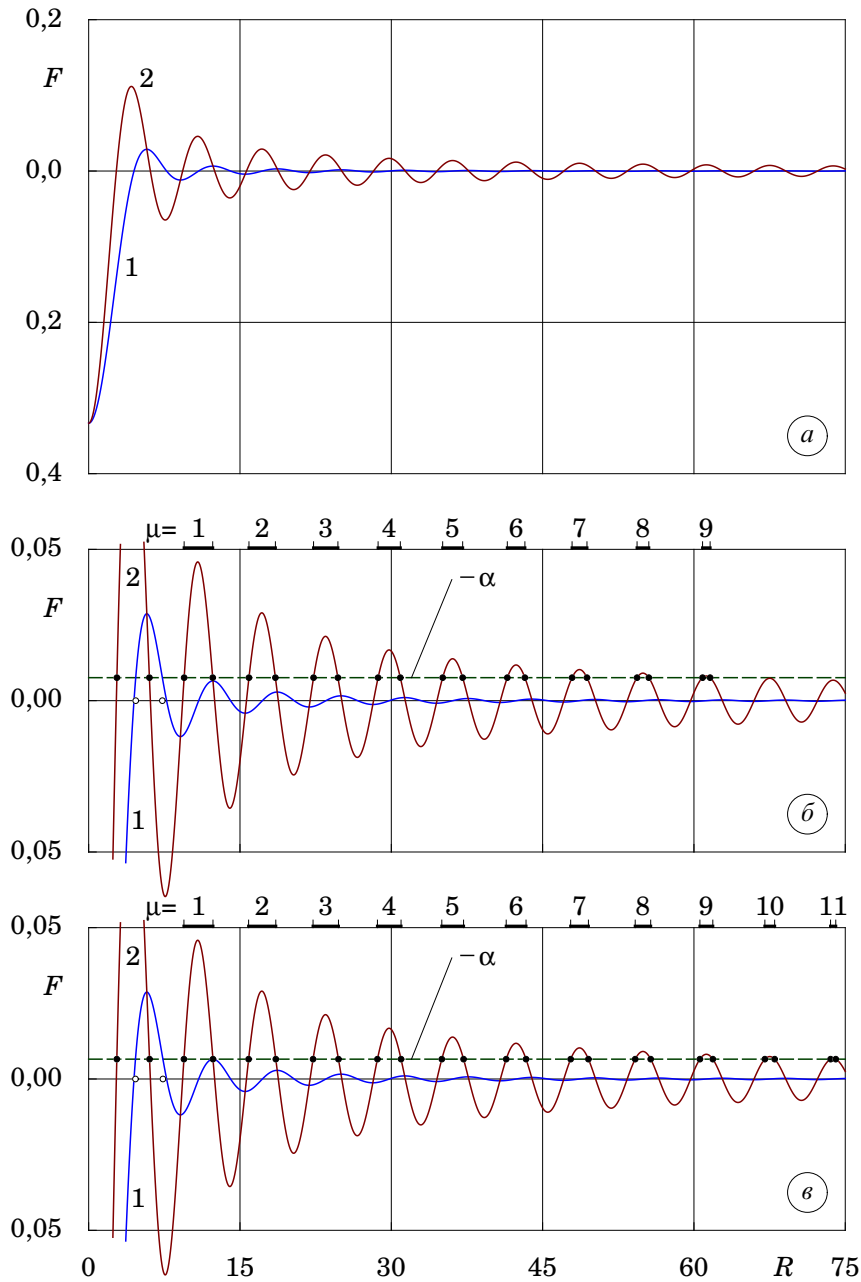


Рис. 2: Функции  $F_1(R)$  и  $F_2(R)$  (3.21), применяемые для записи компонентов поля скорости (3.20) (а); непроницаемые сферы (белые кружочки) и особые точки  $(R_*, \frac{\pi}{2})$ ,  $(R_2, \frac{\pi}{2})$  поля скорости (3.20) (черные кружочки) при  $\alpha = -0,0076$  [85] (б) и при  $\alpha = -0.00655$  [89] (в). Две последовательности значений индекса  $\mu$  указывают положения вихревых торов, соответствие последних планетам Солнечной системы приведено в табл. 2

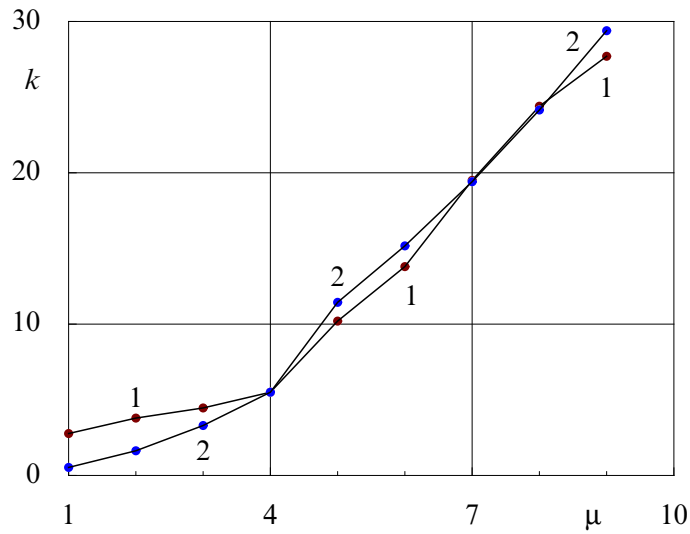


Рис. 3: Орбитальные моменты планет Солнечной системы (кривая 1) и кинетические моменты вихревых торов (кривая 2) в функции номера  $\mu$ ; все моменты суть размерные величины, см. табл. 4

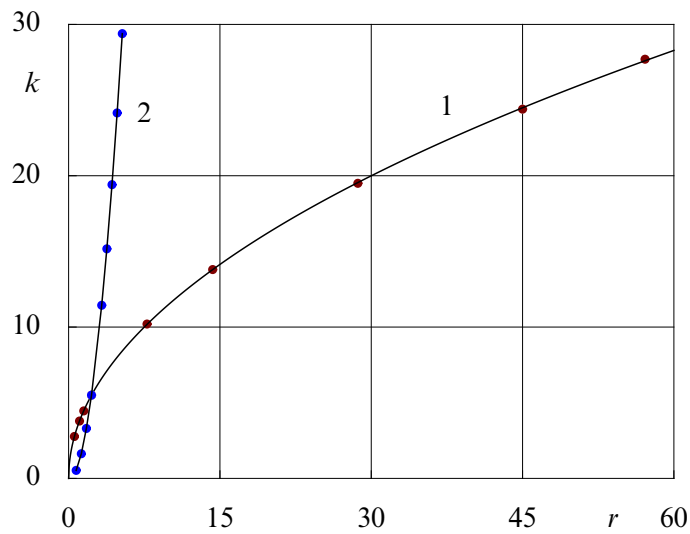


Рис. 4: Орбитальные моменты планет Солнечной системы (кривая 1) и кинетические моменты вихревых торов (кривая 2) в функции радиуса  $r$ ; все величины суть размерные, см. табл. 4. Здесь хорошо видно, что размеры Солнечной системы и планетарного вихря различаются на порядок

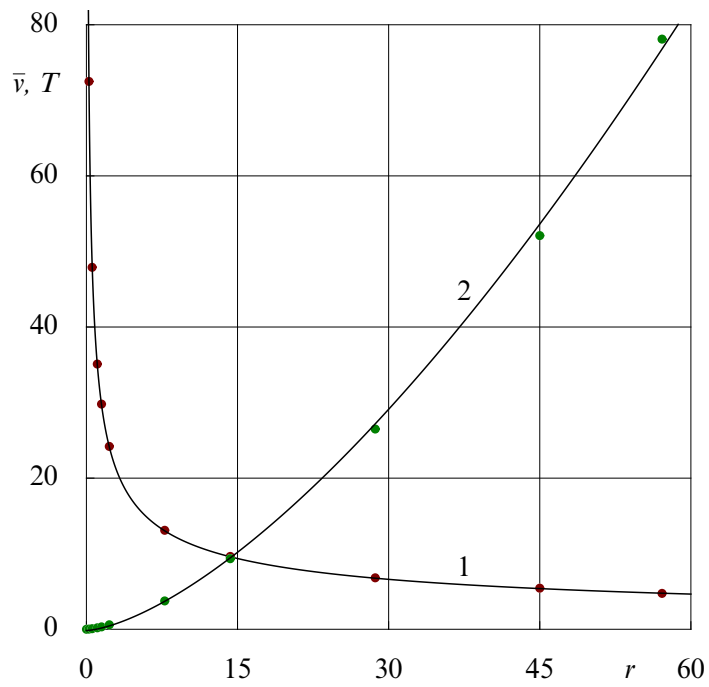


Рис. 5: Средняя орбитальная скорость  $\bar{v}$  (кривая 1) и время обращения  $T$  (кривая 2) планет Солнечной системы; все величины суть размерные, см. табл. 2

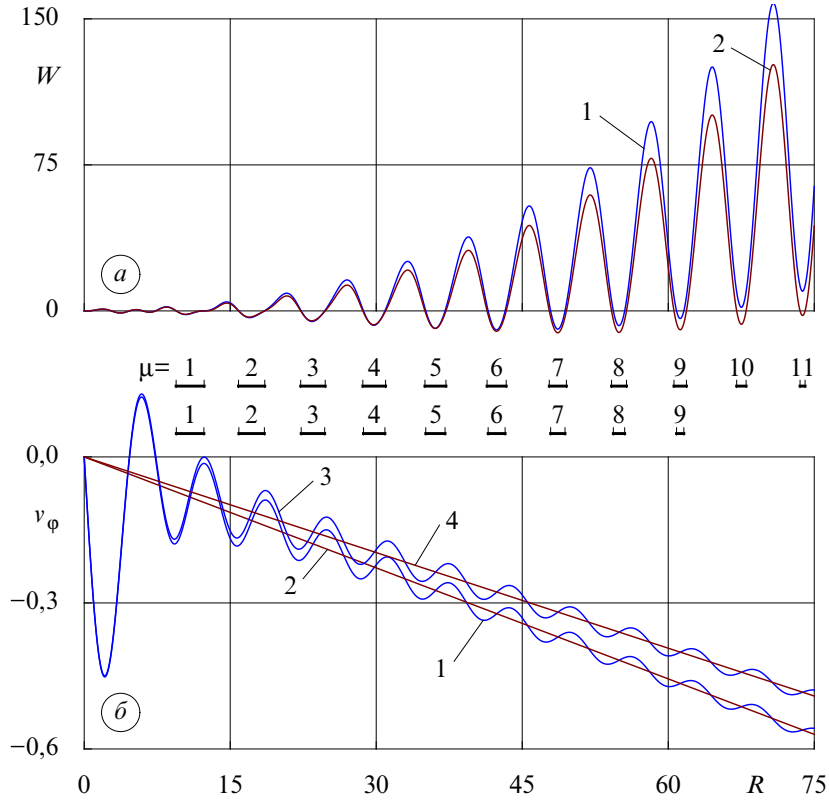


Рис. 6: Применение критерия устойчивости Рэля (5.16), (5.17) к планетарному вихрю в экваториальной плоскости указывает на неустойчивость регулярного вихревого движения в вихревых торах (а):  $\alpha = -0,0076$  (кривая 1),  $\alpha = -0,00655$  (кривая 2). Компонент скорости  $v_\varphi(R, \frac{\pi}{2}) = R[\alpha + F_1(R)]$  (3.20):  $\alpha = -0,0076$  (кривая 1),  $\alpha = -0,00655$  (кривая 3), изменяется относительно  $R$  как линейная функция  $\dot{v}_\varphi(R) = \alpha R$  (вращение твёрдого тела):  $\alpha = -0,0076$  (прямая 2),  $\alpha = -0,00655$  (прямая 4), с добавлением затухающего знакопеременного возмущения  $v_\varphi'(R) = R F_1(R)$  (б). Короткие отрезки вдоль переменной  $R$  с номерами  $\mu = 1, \dots, N_\mu$  между рис. 6, а и рис. 6, б указывают положение вихревых торов, в зависимости от значения  $\alpha$  (см. также рис. 2, б, в). Рис. 6, б, первоначально находившийся в разделе 3, помещён рядом с рис. 6, а, для лучшего понимания причины неустойчивости, обнаруживаемой критерием Рэля (5.16), (5.17)

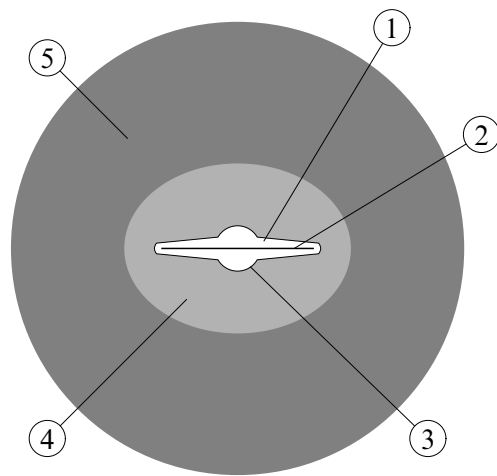


Рис. 7: Строение Галактики (галактики, в которой находится Солнечная система): диск (1), центральная плоскость (2), балдж (3), гало (4), корона (5). Соотношение размеров диска, гало и короны не соблюдено. Диаметр диска равен примерно 30 кпс, размер балджа — 6–10 кпс, радиус короны примерно в 5–10 раз больше радиуса диска. Оттенки серого цвета условно показывают яркость составляющих Галактики. Рисунок повторяет, с небольшими изменениями, рис. 1 на с. 9 книги Чернина [68]

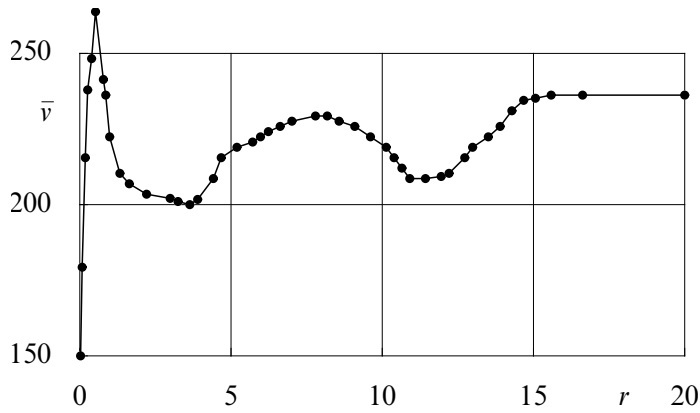


Рис. 8: Кривая вращения для Галактики (галактики, в которой находится Солнечная система). Расстояние  $r$  от центра Галактики измеряется в кпк, средняя скорость вращения  $\bar{v}$  — в км/с. График построен „по точкам“, снятым с рис. 2, а работы [72]. В последней график получен как кривая выравнивания множественных данных „с усами“ для различных объектов Галактики

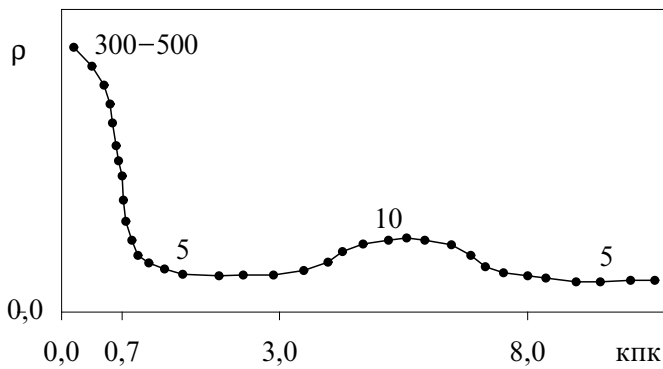


Рис. 9: Зависимость плотности  $\rho$  диска Галактики от расстояния  $r$  до центра Галактики. Числа возле различных участков кривой  $\rho(r)$  указывают значения плотности в единицах  $M_{\odot}/\text{пк}^2$ . График построен „по точкам“, снятым с рис. 2, б работы [72]

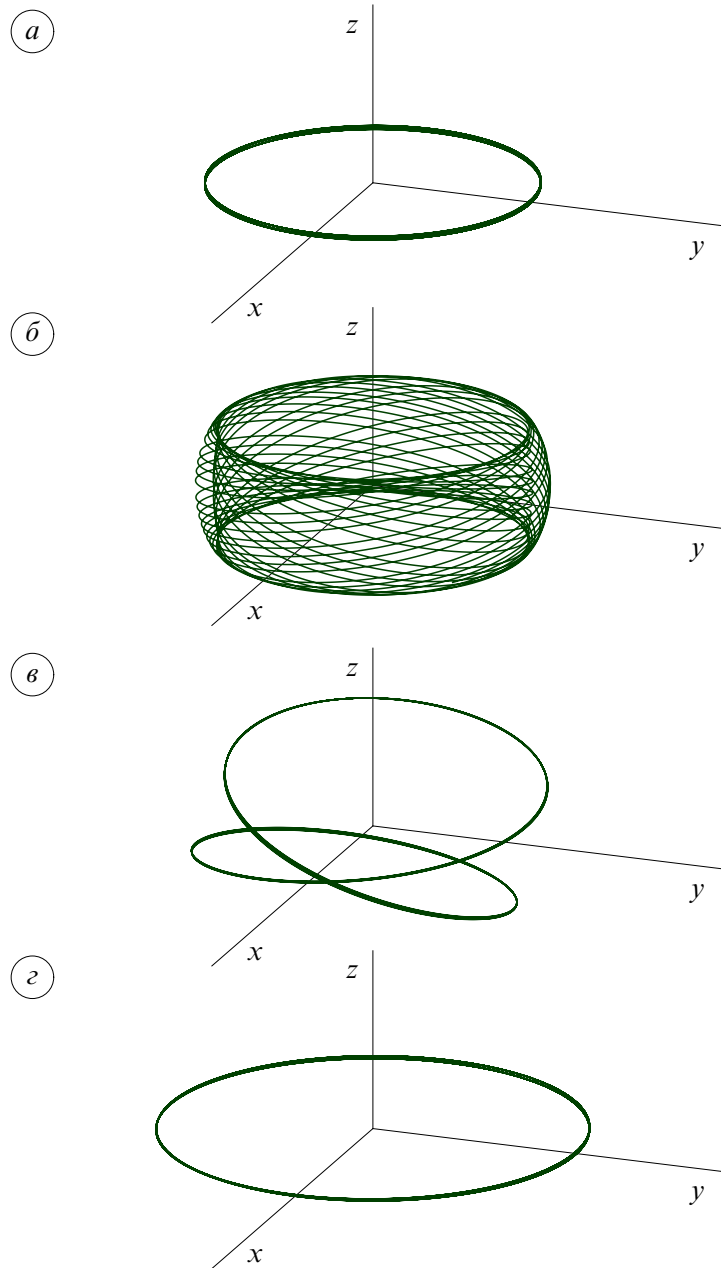


Рис. 10: Интегральные кривые задачи Коши для системы уравнений (6.13):  
 $\alpha = -0,00655, R_0 = 22,28$  (а);  $\alpha = -0,00655, 23,50$  (б);  $\alpha = -00,00655,$   
 $24,37336$  (в);  $\alpha = -0,0076, 28,72$  (г)

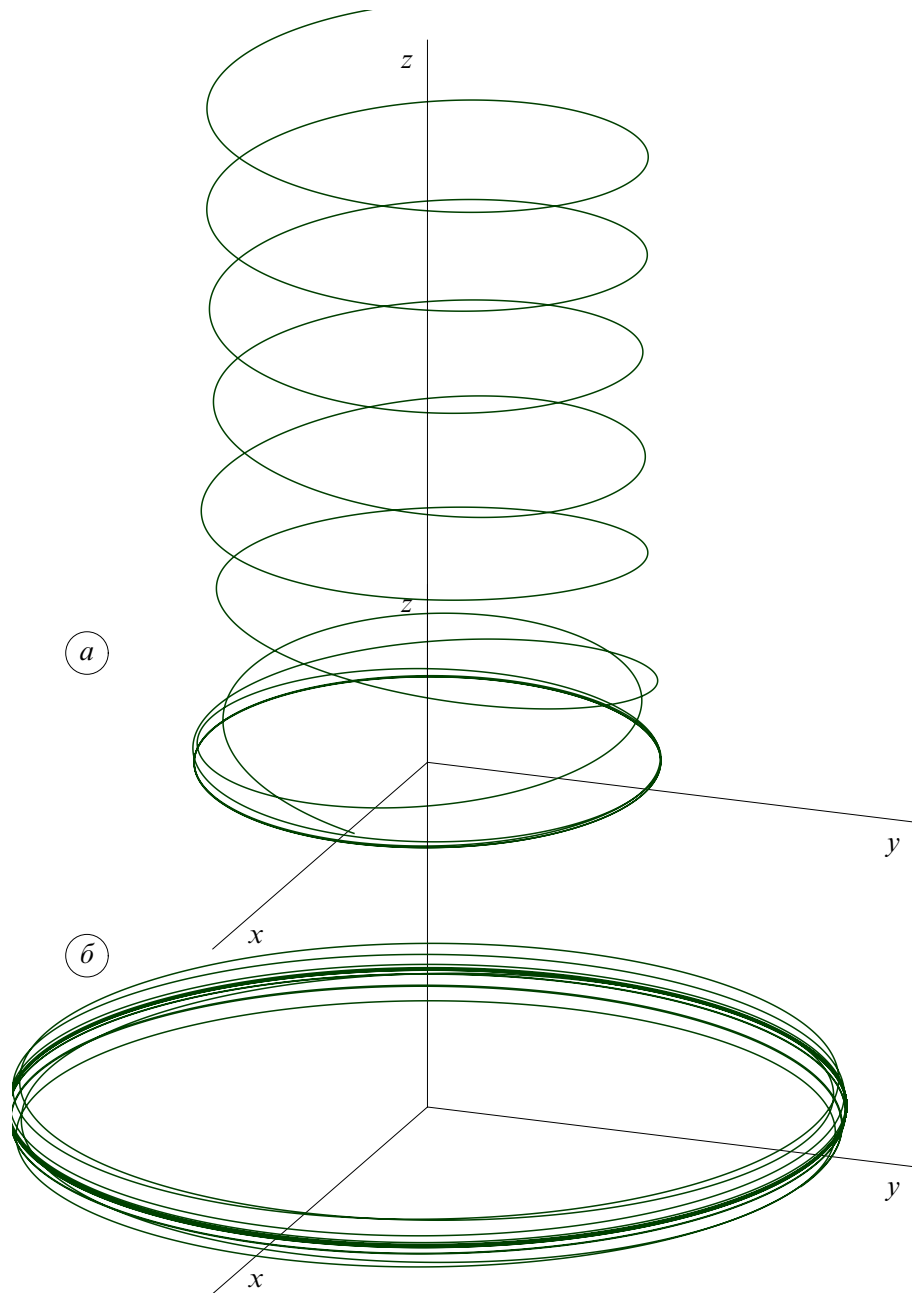


Рис. 11: Интегральные кривые задачи Коши для системы уравнений (6.13):  
 $\alpha = -0,0076$ ,  $R_0 = 27,396087$  (а);  $\alpha = -0,0076$ ,  $R_0 = 55,52571$  (б)



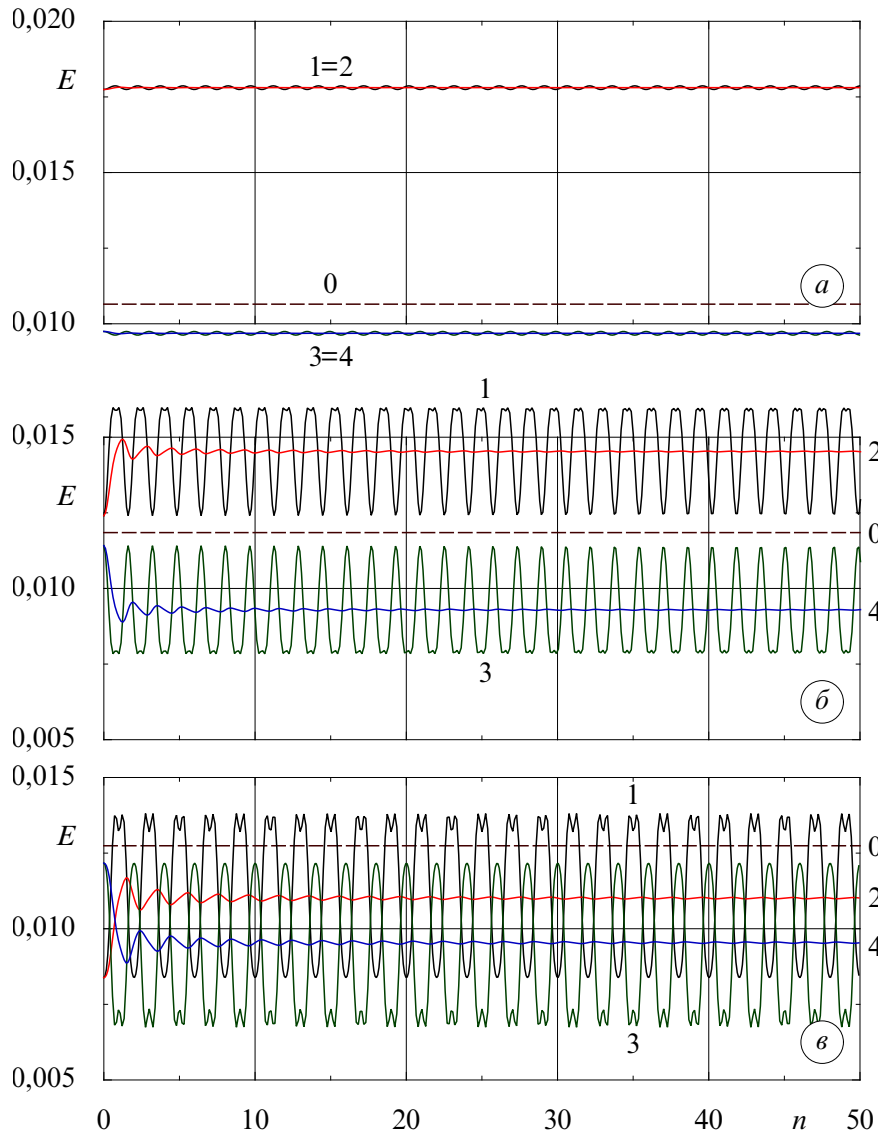


Рис. 12: Изменение кинетической энергии  $T(t)$  (6.11) (кривая 1), среднего значения кинетической энергии  $\langle T \rangle(t)$  (6.11) (кривая 2), потенциала  $P(t)$  (6.12) (кривая 3), среднего значения потенциала  $\langle P \rangle(t)$  (6.12) (кривая 4) от числа оборотов  $n$  вокруг оси  $z$  для движений в вихревых торах (см. траектории на рис. 10, а, б и в)

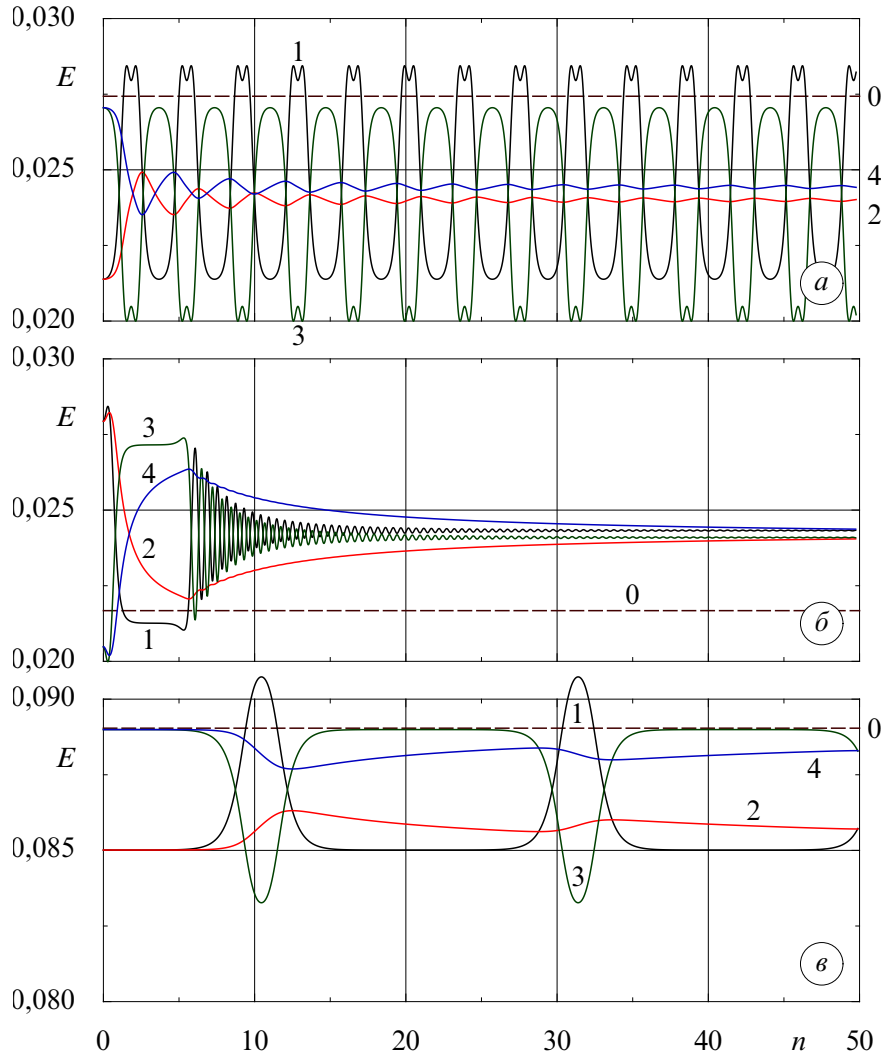


Рис. 13: Изменение кинетической энергии  $T(t)$  (6.11) (кривая 1), среднего значения кинетической энергии  $\langle T \rangle(t)$  (6.11) (кривая 2), потенциала  $P(t)$  (6.12) (кривая 3), среднего значения потенциала  $\langle P \rangle(t)$  (6.12) (кривая 4) от числа оборотов  $n$  вокруг оси  $z$  для движений в вихревых торах (см. траектории на рис. 10,  $z$ , рис. 11,  $a, б$ )

## Основные выводы

18 февраля 1693 г.

Достопочтенный сэр!

Понимая, что публикацию моих проповедей без ущерба для моего книготорговца можно несколько задержать, я взял их в свои руки и продержу некоторое время. Хотя в них затрагивается несколько проблем, Ваше мнение о которых я приобрел бы за немалую цену, мне отнюдь не хотелось бы прерывать Ваши высокоценные занятия вопросом от незнакомца. Но Ваш неожиданный и благосклонный ответ, доставленный мне последней почтой, придал мне смелости просить Вас о том, чтобы Вы взяли на себя труд просмотреть извлечения из проповедей... На душе у меня было бы гораздо спокойнее, если бы Вы сочли возможным удовлетворить мою просьбу до того, как мои проповеди выйдут из моей власти.

<...>

... пока я писал Вам, сэр, эти строки, пришло письмо от моего книготорговца, торопящего с печатанием моих проповедей. Поэтому я покорнейше прошу Вас с следующей же почтой краткие указания относительно того, что Вы одобряете, а что нет. Я решил дожидаться Вашего ответа, хотя бы он и не был столь подробным. Сэр! Я от души прошу Вас простить меня за причиняемое Вам беспокойство, которое мне придется усугубить еще более, испросив Вашего соизволения прислать Вам все мои восемь недостойных проповедей, как только две последние выйдут из печати.

Сэр, остаюсь Вашим преданнейшим и покорнейшим слугой  
Р. Бентли

Достопочтенному мистеру Исааку Ньютону  
профессору математики и члену Тринити колледжа в Кембридже [19]

Рассмотрение по существу теоретических работ [84–98] В. И. Перехреста, выполненных в течение последнего десятилетия и берущих начало от работы [84], в которой был построен класс точных вихревых решений стационарных уравнений движения идеальной несжимаемой среды, приводит к следующим выводам.

1. Класс точных решений [84] стационарных уравнений неразрывности и Эйлера содержит в качестве ядра поле скорости  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  (3.14) твердотельного вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения вдоль этой же оси с постоянной скоростью (спиральное движение). На ядро  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  наложено возмущение в виде поля скорости  $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$ , убывающее на бесконечности с различной асимптотикой по разным направлениям для разных составляющих скорости — как  $\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1})$ ,  $\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2})$  и  $\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-3})$ . При увеличении расстояния  $r$  от оси вращения величины скорости  $|\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|$  и соответствующего ему давления  $\dot{p}(\mathbf{x})$  в ядре неограниченно возрастают. Строение точного решения [84] таково, что оно не допускает сопряжения на границе конечной области с каким-либо ограниченным вне этой области другим точным ограниченным решени-

ем. По этой причине на основе точного решения [84] не может быть решена какая-либо граничная задача о стационарных движениях.

2. Применение класса точных решений [84] для количественного объяснения наблюдаемых движений тел в Солнечной системе, вопреки утверждениям, сделанным в работах [85, 87–90], не позволило ни в качественном, ни в количественном отношении воспроизвести самые основные наблюдаемые явления и описывающие их закономерности: эллиптичность орбит и расположение центрального тела (солнца) в фокусах орбит; законы Кеплера; движение комет и др. Все эти явления с необходимостью требуют силового потенциала, зависящего от обратных расстояний между взаимодействующими телами. Класс точных решений [84], однако, приводит к потенциалу взаимодействия, зависящему от квадратов взаимных расстояний. Такой потенциал способен породить только движения с круговыми или эллиптическими орбитами, с расположением центрального тела не в фокусе, а в центре орбиты. Соответствующие движения всегда изохронны, то есть время обращения вокруг центрального тела не зависит от расстояния до центрального тела. Это значит, что скорость обращения линейно возрастает при удалении от центрального тела. Наблюдаемые в Солнечной системе и за её пределами движения такими свойствами не обладают. Независимое от методов небесной механики изучение устойчивости движений, описываемых классом точных решений [84], по известному критерию Рэля [80] показало, что данные движения неустойчивы и не могут существовать в течение конечных промежутков времени.

3. Основанием для применения класса точных решений [84] в работах [84–98] для количественного и качественного объяснения наблюдаемых движений тел в Солнечной системе послужила работа Вайцзеккера [83]. Суть теоретических построений Вайцзеккера заключается в предположении о том, что планеты Солнечной системы образуются в результате слипания твердых частиц газопылевого облака, окружающего уже существующее Солнце. Газопылевое облако (сжимаемой среды) совершает сложное вихревое турбулентное движение вокруг Солнца, причем число пространственных торообразных вихревых образований равно числу формирующихся планет. Турбулентность, по мнению Вайцзеккера, должна ускорить слипание частиц, приводящее к образованию планет. Как показали работы многих авторов в течение 1950–х гг., например Сафронова [54, 55], турбулентное движение с высокими значениями числа Рейнольдса  $Re > 10^{10}$  не может происходить на длительных промежутках времени, необходимых для формирования планет Солнечной системы, из-за быстрого возникновения конвективных движений в вихревых торах и развивающейся вследствие этого неустойчивости. В настоящее время гипотеза Вайцзеккера упоминается только в историческом контексте.

4. Класс точных решений [84] применён в работе [93] для обоснования возможности конденсации в туманностях, моделируемых планетарными вихрями. Основу обоснования составляет применение поля скорости точного решения в интеграле системы уравнений, описывающих движение сжимаемой невязкой среды, что не принято в механике сплошной среды. Из-за много-

численных отступлений от сложившихся в механике методов применения интегралов при решении задач, выведена зависимость температуры среды от расстояния до оси вращения, описывающая незатухающие гармонические изменения температуры среды в экваториальной плоскости точного решения вплоть до бесконечности по  $|\mathbf{x}|$ . Эта формула противоречит как основным положениям своего вывода, так и свойствам класса точных решений [84].

5. Класс точных решений [84] применён в работах [95, 97] для гидродинамического истолкования понятий тёмной материи и тёмной энергии, введённых в современной астрофизике и космологии при попытке объяснить сложные движения галактик и крупных скоплений галактик. Основой такого объяснения была выбрана теорема о вириале. Теорема о вириале применена в работах [95, 97] с многочисленными отступлениями от своего содержания и вывода, которые в физике не принято делать. Выполненные в статье вычисления необходимых в формулировке теоремы о вириале средних значений кинетической энергии и потенциала, формально создаваемого давлением, показали, что с высокой точностью, за пределами вихревых торов, теорема вириала выполняется именно для изохронных движений с силовым потенциалом  $\dot{V}$  (3.19), зависящим от квадратов взаимных расстояний, а не обратных расстояний, что имеет место в классической теории тяготения. Показано, что слагаемое в интеграле Бернулли, истолкованное в работах [95, 97] как вихревая (тёмная) энергия, есть постоянная интегрирования, принимающая, вообще говоря, различные значения на поверхностях равных значений функции тока  $\psi(\mathbf{x})$ .

**Благодарности.** Написание статьи происходило в условиях, которые всем, всегда и везде хорошо известны — как известно, „время поджимает“. Если бы не долготерпение и доброжелательное отношение проф. П. И. Когута, статья так и не была бы завершена.

#### Библиографические ссылки

1. *Аведисова В. С.* Галактики. [Текст] / В. С. Аведисова, Д. З. Вибе, А. И. Дьяченко, А. В. Засов и др. / ред.-сост. В. Г. Сурдин. — М.: Физматлит, 2013. — 428 с. (Серия «Астрономия и астрофизика»)
2. *Айзерман М. А.* Классическая механика. — 2-е изд., перераб. [Текст] / М. А. Айзерман. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 368 с.
3. *Альвен Х.* Эволюция Солнечной системы: пер. с англ. [Текст] / Х. Альвен, Г. Аррениус. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
4. *Аллер Л. Х.* Планетарные туманности. [Текст] / Л. Х. Аллер, У. Лиллер. — М.: Мир, 1971. — 149 с.
5. *Арнольд В. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. [Текст] / В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. — С. 5–304. (*Итоги науки и техники*)
6. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. [Текст] /

- В. И. Арнольд.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 96 с. (Серия «Современная математика для студентов»)
7. *Арнольд В. И.* Топологические методы в гидродинамике: пер. с англ. [Текст] / *В. И. Арнольд, Б. А. Хесин.* — М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.
  8. *Батъ М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3-х т. Т. I. Статика и кинематика. — 5-е изд., перераб. [Текст] / *М. И. Батъ, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 512 с.
  9. *Батулин В. А.* Астрономия: Век XXI. [Текст] / *В. А. Батулин, Л. М. Гиндилис, Ю. Н. Ефремов, А. В. Засов* и др. / ред.-сост. *В. Г. Сурдин.* — Фрязино: Век 2, 2007. — 608 с.
  10. *Богородский А. Ф.* Всемирное тяготение. [Текст] / *А. Ф. Богородский.* — К.: Наукова думка, 1971. — 352 с.
  11. *Больцман Л.* Вступительная лекция к курсу натурфилософии / *Л. Больцман* // Избранные труды. [Текст]. — М.: Наука, 1984. — С. 373–378.
  12. *Бутенко М. А.* Динамическое моделирование для оценки массы гало Галактики по новым данным о кинематике мазеров / *М. А. Бутенко, А. В. Хоперсков* // Вестник Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. — 2014. — № 1 (20). — С. 61–69.
  13. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. [Текст] / *О. Ф. Васильев.* — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.
  14. *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика (очерки об основных положениях). [Текст] / *Я. Л. Геронимус.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 512 с.
  15. *Голдстейн Г.* Классическая механика / *Г. Голдстейн* — М.: Гостехиздат, 1957. — 415 с.
  16. *Горбачук В. Г.* Введение в физику галактик и скоплений галактик. [Текст] / *В. Г. Горбачук.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 256 с.
  17. *Громека И. С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости / *И. С. Громека* // Собрание сочинений. [Текст]. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 76–148. (Докторская диссертация, защищённая 4 ноября 1881 г. на физико-математическом факультете Казанского университета)
  18. *Гурзadyн Г. А.* Планетарные туманности. [Текст] / *Г. А. Гурзadyн.* — М.: Физматгиз, 1962. — 384 с.
  19. *Данилов Ю. А.* Ньютон и Бентли / *Ю. А. Данилов* // *Вопросы истории естествознания и техники.* — 1993. — № 1. — С. 30–45.
  20. *Евстигнеева Е. А.* Наблюдаемые кривые вращения галактик и их теоретическая интерпретация / *Е. А. Евстигнеева* // Поиски механизма гравитации. [Текст] / Под ред. *М. А. Иванова, Л. А. Сарова.* — Нижний Новгород: Издатель Ю. А. Николаев, 2004. — С. 180–196.
  21. *Ефремов Ю. Н.* Новый взгляд на Галактику. [Текст] / *Ю. Н. Ефремов.* — М.: Знание, 1984. — 62 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Космонавтика, астрономия»; № 9).
  22. *Ефремов Ю. Н.* Крупномасштабное звездообразование в галактиках / *Ю. Н. Ефремов, А. Д. Чернин* // *Успехи физических наук.* — 2003. — Т. 173. — № 1. — С. 3–25.
  23. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд., перераб. [Текст] / *В. Ф. Журавлев.* — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
  24. *Засов А. В.* Карликовые галактики. [Текст] / *А. В. Засов.* — М.: Знание, 1984. — 64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Космонавтика, астрономия»; № 8).

25. *Каплан С. А.* Физика межзвездной среды. [Текст] / *С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 592 с.
26. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I: пер. с нем. [Текст] / *Ф. Клейн.* — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. техн.-теор. лит., 1937. — 432 с.
27. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. [Текст] / *В. В. Козлов.* — Ижевск: Изд. Удмурт. ун-та, 1998. — 238 с.
28. *Кочин Н. Е.* Теоретическая гидромеханика: В 2-х ч. Часть 1. — 6-е изд., испр. и доп. [Текст] / *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе.* — М.: Физматгиз, 1963. — 584 с.
29. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — 9-е изд., стереотип. [Текст] / *Н. Е. Кочин.* — М.: Наука, 1965. — 426 с.
30. *Крот А. М.* Статистическая теория формирования гравитирующих космогонических тел / *А. М. Крот.* — Минск: Беларуская навука, 2012. — 448 с.
31. *Кузнецов В. Д.* Достижения и перспективы космических исследований Солнца / *В. Д. Кузнецов // Успехи физических наук.* — 2015. — Т. 185. — № 6. — С. 664–672.
32. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика: пер. с фр. — Т. 2. [Текст] / *Лагранж Ж.* — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 440 с.
33. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: В 10-ти т. — Т. 1. Механика. — 4-е изд., исправл. [Текст] / *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 216 с.
34. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. [Текст] / *Л. Г. Лойцянский.* — М., Л.: ГИТТЛ, 1950. — 646 с.
35. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — 3-е изд., перераб. и доп. [Текст] / *Л. Г. Лойцянский.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 904 с.
36. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — 7-е изд., испр. [Текст] / *Л. Г. Лойцянский.* — М.: Дрофа, 2003. — 840 с. (Серия «Классики отечественной науки»)
37. *Лукаш В. Н.* Темная энергия: мифы и реальность / *В. Н. Лукаш, В. А. Рубаков // Успехи физических наук.* — 2008. — Т. 178. — № 3. — С. 301–308.
38. *Манин Ю. И.* Новая встреча с Алисой. (Рецензия на книгу: Кэрролл Л. Приключения Алисы в стране чудес; Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье) / *Ю. И. Манин // Математика как метафора.* [Текст]. — М.: МЦНМО, 2008. — С. 356–360.
39. *Манин Ю. И.* Треугольник мысли. (Рецензия на книгу: *Connes A., Lichnerowicz A., Schützenberger M. P.* Triangle of Thoughts. — American Mathematical Society, 2001: пер. с англ. *С. М. Львовского*) / *Ю. И. Манин // Математика как метафора.* [Текст]. — М.: МЦНМО, 2008. — С. 361–366.
40. *Милгрэм М.* Модифицированная динамика — доклад о статусе / *М. Милгрэм // Поиск механизма гравитации.* [Текст] / Под ред. *М. А. Иванова, Л. А. Сарова.* — Нижний Новгород: Издатель *Ю. А. Николаев*, 2004. — С. 197–214.
41. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика: пер. с англ. [Текст] / *Л. М. Милн-Томсон.* — М.: Мир, 1964. — 656 с.
42. *Молчанов А. М.* О резонансной структуре Солнечной системы / *А. М. Молчанов // Современные проблемы небесной механики и астродинамики: Труды конференции по общим вопросам небесной механики и астродинамики, Москва, 23–29 марта 1967.* — М.: Наука, 1973. — С. 32–42.

43. *Морозов А. Г.* Физика дисков. [Текст] / *А. Г. Морозов, А. В. Хоперсков.* — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005. — 423 с. (Юбилейная серия «Труды учёных ВолГУ»)
44. *Морозов А. И.* Введение в плазмодинамику. [Текст] / *А. И. Морозов.* — М.: Физматлит, 2006. — 576 с.
45. *Мюррей К.* Динамика Солнечной системы: пер. с англ. [Текст] / *К. Мюррей, С. Дермотт.* — М.: Физматлит, 2010. — 588 с.
46. *Некрасов А. И.* Курс теоретической механики: В 2-х т. — Т. II. Динамика. — 2-е изд., перераб. [Текст] / *А. И. Некрасов.* — М.: ГИТТЛ, 1953. — 504 с.
47. *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред: В 2-х ч. Ч. I. [Текст] / *Р. И. Нигматуллин.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 464 с.
48. *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред: В 2-х ч. Ч. 2. [Текст] / *Р. И. Нигматуллин.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 360 с.
49. *Ньето М. М.* Закон Тициуса–Боде: история и теория: пер. с англ. [Текст] / *М. М. Ньето.* — М.: Мир, 1976. — 192 с.
50. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии: пер. с лат. [Текст] / *И. Ньютон.* — М.: Наука, 1989. — 690 с.
51. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — 3-е изд., перераб. и доп. [Текст] / *И. И. Ольховский.* — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 575 с.
52. *Погребысский И. Б.* Лейбниц и классическая механика / *И. Б. Погребысский* // У истоков классической науки: сб. статей. [Текст] / Отв. ред. *А. Н. Боголюбов*, сост. *У. И. Франкфурт.* — М.: Наука, 1968. — С. 123–157.
53. *Потташ С. Р.* Планетарные туманности. [Текст] / *С. Р. Потташ.* — М.: Мир, 1987. — 351 с.
54. *Сафронов В. С.* О гипотезе турбулентности в протопланетном облаке. [Текст] / *В. С. Сафронов* // Вопросы космогонии. — 1957. — Т. 5. — С. 22–46.
55. *Сафронов В. С.* Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. [Текст] / *В. С. Сафронов.* — М.: Наука, 1969. — 244 с.
56. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2-х т. — Т. 1. — 2-е изд., перераб. [Текст] / *Л. И. Седов.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 368 с.
57. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. [Текст] / *М. Ф. Субботин.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 800 с.
58. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. [Текст] / *Я. В. Татаринов.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 296 с.
59. *Тодхантер И.* История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа: пер. с англ.: В 2-х т., в одной кн. [Текст] / *И. Тодхантер.* — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 672 с. (Серия «Классики науки»)
60. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: пер. с англ. [Текст] / *К. Трусделл.* — М.: Мир, 1975. — 592 с.
61. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика: пер. с англ. [Текст] / *Е. Т. Уиттекер.* — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. научно-техн. лит., 1937. — 500 с.
62. *Физика космоса: Маленькая энциклопедия:* 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / Гл. ред. *Р. А. Сюняев.* — М.: Сов. энцикл., 1986. — 783 с.
63. *Физический энциклопедический словарь.* [Текст] / Гл. ред. *А. М. Прохоров.* — М.: Сов. энцикл., 1983. — 928 с.
64. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. — Т. 1. — 2-е изд., перераб. [Текст] / *Г. М. Фихтенгольц.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 368 с.



65. Фридман А. М. Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках / А. М. Фридман // *Успехи физических наук*. — 2007. — Т. 177. — № 2. — С. 121–148.
66. Фридман А. М. Физика галактических дисков. [Текст] / А. М. Фридман, А. В. Хоперсков. — М.: Физматлит, 2011. — 645 с.
67. Хромов Г. С. Планетарные туманности. [Текст] / Г. С. Хромов. — М.: Наука, 1985. — 296 с.
68. Чернин А. Д. Звезды и физика. [Текст] / А. Д. Чернин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 38)
69. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение / А. Д. Чернин // *Успехи физических наук*. — 2008. — Т. 178. — № 3. — С. 267–300.
70. Чернин А. Д. Тёмная энергия в ближней Вселенной: данные телескопа “Хаббл”, нелинейная теория, численные эксперименты / А. Д. Чернин // *Успехи физических наук*. — 2013. — Т. 183. — № 7. — С. 741–747.
71. Янковский И. О. Всемирное тяготение как следствие образования весомой материи. [Текст] / И. О. Янковский. — М.: Типо-литография тов-ва «Кушнерев и К», 1889. — х + 388 с.
72. Шепелев А. В. Космический микроволновый фон и аристотелевы представления о движении / А. В. Шепелев // *Успехи физических наук*. — 2005. — Т. 175, № 1. — С. 105–106.
73. Clausius R. On the Application of the Theorem of the Equivalence of Transformations to the Internal Work of a Mass of Matter / R. Clausius // *Philosophical Magazine*. Series 4. — 1862. — Vol. 24. — No. 159. — P. 81–97; Vol. 24, No. 160. — P. 201–213
74. Clausius R. On a Mechanical Theorem Applicable to Heat / R. Clausius // *Philosophical Magazine*. Series 4. — 1870. — Vol. 40. — No. 265. — P. 122–127.
75. Eddington A. S. The Kinetic Energy of a Star Cluster / A. S. Eddington // *Monthly Notes of the Royal Astronomical Society*. — 1916. — Vol. 76. — No. 4. — P. 525–528.
76. Gamow G. A New Theory by C. F. von Weizsäcker of the Origin of the Planetary System / G. Gamow, J. A. Hynek // *The Astrophysical Journal*. — 1945. — Vol. 101. — № 3. — P. 249–254.
77. Harpaz A. The Rings around the Egg Nebula / A. Harpaz, S. Rappaport, N. Soker // *The Astrophysical Journal*. — 1997. — Vol. 487. — № 2. — P. 809–817.
78. Ney E. P. Studies of the Infrared Source CRL 2688 / E. P. Ney, K. M. Merrill, E. E. Becklin, G. Neugebauer, C. G. Wynn-Williams // *Astrophysical Journal*. — 1975. — Vol. 198. — № 2. — P. L129–L134.
79. Poincaré H. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. [Текст] / H. Poincaré. — Paris: Rédigées par Henri Vergne, 1911. — 294 p. (*Librairie scientifique A. Hermann et fils*)
80. Lord Rayleigh. On the Dynamics of Revolving Fluids // *Lord Rayleigh*. — Proceeding of the Royal Society of London. — 1917. — Vol. 93. — No. 648. — P. 148–154.
81. Sahai R. Imaging of the EGG Nebula (CRL 2688) with WFPC2/HST: A History of AGB/Post-AGB Giant Branch Mass Loss / R. Sahai, J. T. Trauger, A. M. Watson, K. R. Stapelfeldt, et. al. // *The Astrophysical Journal*. — 1998. — Vol. 493. — № 1. — P. 301–311.
82. Weinstock R. Dismantling a Centuries-old Myth: Newton’s Principia and Inverse-Square Orbits // *American Journal of Physics*. — 1982. — Vol. 50. — No 10. — P. 610–617.

83. *von Weizsäcker C. F.* Über die Entstehung des Planetensystems / *C. F. von Weizsäcker* // *Zeitschrift für Astrophysik*. — 1944. — Bd. 22. — P. 319–355.
84. *Перехрест В. І.* Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / *В. І. Перехрест, Р. В. Іванов* // *Вісник ДНУ. Серія: Механіка*. — 2002. — Вип. 6. — Том 1. — С. 60–64.
85. *Перехрест В. І.* Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцзеккера / *В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Механіка*. — 2009. — Вип. 13. — Том 2. — № 5. — С. 113–124.
86. *Осипчук М. М.* Резонанси в динамічній системі на торах планетарного вихору / *М. М. Осипчук, В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2010. — Вип. 2. — № 8. — С. 64–72.
87. *Перехрест В. І.* Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / *В. І. Перехрест, М. М. Осипчук* // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка*. — 2010. — № 5. — Вип. 14. — Том 1. — С. 109–118.
88. *Перехрест В. І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем / *В. І. Перехрест* // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка*. — 2011. — № 5. — Вип. 15. — Том 1. — С. 21–33.
89. *Перехрест В. І.* Про об'єми, маси та кінетичні моменти структур планетарного вихора / *В. І. Перехрест, М. М. Осипчук* // *Вісник ДНУ. Серія: Механіка*. — 2012. — Вип. 16. — Том 1. — № 1. — С. 154–162.
90. *Перехрест В. І.* Обернена задача планетних відстаней / *В. І. Перехрест, М. М. Осипчук* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2012. — Вип. 4. — № 8. — С. 116–127.
91. *Перехрест В. І.* Про стійкість і резонанси рухів у торових кільцях планетарного вихору / *В. І. Перехрест, М. М. Осипчук, Л. В. Ключинська* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2013. — Вип. 5. — № 8. — С. 98–106.
92. *Перехрест В. І.* Інваріантні властивості вихрових кілець планетарного вихору та їх вплив на еволюцію вихору / *В. І. Перехрест, Л. В. Ключинська* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2013. — Вип. 5. — № 8. — С. 107–117.
93. *Ключинська Л. В.* Про температурні поля і умови конденсації газів туманностей у планетарному вихорі / *Л. В. Ключинська, В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2014. — Вип. 6. — № 8. — С. 99–110.
94. *Осипчук М. М.* Регулярний та сингулярний планетарні вихори: порівняння структур і характеристик / *М. М. Осипчук, В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2014. — Вип. 6. — № 8. — С. 111–120.
95. *Перехрест В. І.* Поля тиску та градієнтів тиску в планетарних вихорах / *В. І. Перехрест, М. М. Осипчук* // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. — 2014. — Вип. 23. — С. 180–196.
96. *Ключинська Л. В.* Моделювання утворення астероїдів у планетарному вихорі та розрахунок параметрів їх орбіт / *Л. В. Ключинська, В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2015. — Вип. 7. — № 8. — С. 145–156.
97. *Перехрест В. І.* Космологічні наслідки вихрової гідродинаміки: вихрова і темна енергії в космосі / *В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2016. — Вип. 8. — № 8. — С. 204–221.
98. *Осипчук М. М.* Геометрія та структури планетарних вихорів загального типу / *М. М. Осипчук, В. І. Перехрест* // *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*. — 2016. — Вип. 8. — № 8. — С. 222–229.