

УДК 517.977.56

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ, РОЗВ'ЯЗКИ ЯКИХ МАЮТЬ НЕВАРІАЦІЙНИЙ ХАРАКТЕР

С. О. Горбонос

*Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь,
вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: gorbonos.so@gmail.com*

Представлено проф. Капустяном В. О.

Отримано необхідні умови оптимальності для одного класу задач оптимального керування параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами у випадку, коли їх розв'язки мають неваріаційний характер.

Ключові слова: задача оптимального керування, неваріаційний розв'язок, функціонал Лагранжа, необхідні умови оптимальності.

1. Вступ

У роботі розглянуто клас задач оптимального керування лінійними параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора. Особливість такого класу задач керування полягає в тому, що коефіцієнти параболічних рівнянь не задовольняють класичні умови леми Лакса – Мільграма. На сьогодні теорія оптимального керування такими об'єктами активно розвивається, оскільки багато важливих питань у цій області є недослідженими повною мірою. В роботі [1] було отримано достатні умови, за яких наведений клас задач оптимального керування має єдиний розв'язок. Крім того, було встановлено, що оптимальний розв'язок таких задач може мати або варіаційний характер, або неваріаційний [1–3]. Також, залучаючи принципи фіктивних граничних керувань, було побудовано апроксимацію наведеної задачі керування для випадку неваріаційного розв'язку [2]. Таким чином, мета даної роботи полягала в побудові необхідних умов оптимальності для наведеного класу задач керування у випадку, коли їх розв'язки мають неваріаційний характер.

2. Постановка задачі та допоміжні результати

Основним об'єктом дослідження виступає задача пошуку оптимального керування для параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами:

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на } \Omega \times [0, T] \quad (2.1)$$

$$y = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \quad \partial y / \partial \nu_A = u \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega, \quad (2.3)$$

$$I(u, y) = \|y - y_d\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))}^2 \rightarrow \inf, \quad (2.4)$$

де $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$, $A(x) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ — косиметрична матриця, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$ і $a_{ii} = 0$.

Надалі через $L^p([0, T], V)$ будемо позначати множину усіх вимірних функцій $u : [0, T] \rightarrow V$ таких, що

$$\|u\|_{L^p([0, T], V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

де $1 \leq p < \infty$, а інтеграл наведено в сенсі Бохнера.

Тепер наведемо означення неваріаційного розв'язку для задачі (2.1)–(2.4):

Означення 2.1. Пару $(u^*, y^*) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ називатимемо неваріаційним розв'язком задачі оптимального керування (2.1)–(2.4), якщо

$$I(u^*, y^*) = \inf_{(u, y) \in \Xi} I(u, y), \quad (u^*, y^*) \in \Xi$$

і має місце нерівність

$$\begin{aligned} & \|y^*\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|y^*(T)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \neq \\ & \neq \int_0^T \langle f, y^* \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u^* y^* d\mathcal{H}^{N-1} dt + \frac{1}{2} \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Для побудови схеми апроксимації неваріаційних розв'язків у роботі [2] до матриці потоку $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ було застосовано оператор зрізки $T_\varepsilon : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$. Оператор T_ε задається таким чином:

$$T_\varepsilon(A) = [T_\varepsilon(a_{ij})]_{i, j=1}^N,$$

де ε — малий параметр, який змінюється в строго спадній послідовності додатних дійсних чисел, що прямує до 0; T_ε — функція зрізки така, що

$$T_\varepsilon(s) = \max\{\min\{s, \varepsilon^{-1}\}, -\varepsilon^{-1}\}.$$

У результаті, отримано набір множин Ω_ε , з якими пов'язано таку послідовність задач оптимального керування:

$$\left\{ \left\langle \inf_{(u,v,y) \in \Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,v,y) \right\rangle, \varepsilon \rightarrow 0 \right\}, \quad (2.5)$$

де

$$I_\varepsilon(u,v,y) = \|y - y_d\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}^2 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|v\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))}^2, \quad (2.6)$$

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (u,v,y) \left| \begin{array}{l} y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \\ y = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \\ \partial y / \partial \nu_A = u \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \\ \partial y / \partial \nu_A = v \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], \\ y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.7)$$

Тут $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ та $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ — задані функції; $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ — керування; ν — зовнішня нормаль одиничного вектора на Γ_2 і Γ_ε ; $v \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ — фіктивне керування; α — додатне число таке, що

$$\varepsilon^{-\alpha} \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{коли } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Зауваження 2.1. У результаті застосування оператора зрізки отримано додаткові границі Γ_ε . Для того щоб забезпечити коректність таких задач, означено додаткові неоднорідні крайові умови типу Неймана. В якості неоднорідності виступає фіктивне керування v , яке обрано як розподілення простору $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$. Беручи до уваги результати, отримані в [1], і той факт, що $A \in L^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathbb{S}^N)$, маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ відповідна задача оптимального керування (2.5) має принаймні один розв'язок $(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$.

Далі наведемо означення, необхідне для подальшого дослідження:

Означення 2.2. [4] Будемо казати, що матриця $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ Q -типу, якщо існує строго спадаюча послідовність $\varepsilon \rightarrow 0$ додатних дійсних чисел така, що відповідний набір множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, має такі властивості:

- (а) Ω_ε — відкриті зв'язні підмножини Ω з межами Ліпшиця, для яких існує $\delta > 0$ таке, що $\partial\Omega \subset \partial\Omega_\varepsilon$ і $\operatorname{dist}(\Gamma_\varepsilon, \partial\Omega) > \delta$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, де $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$.
- (б) поверхнева міра дірок $Q_\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ є достатньо малою в такому розумінні:

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(с) для $\forall h \in D$ існує стала $c(h)$, яка залежить від h і не залежить від ε , така, що

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (\nabla \varphi, A(x) \nabla h)_{\mathbb{R}^N} dx dt \right| \leq c \sqrt{\frac{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|}{\varepsilon}} \left(\int_0^T \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt \right)^{1/2}$$

для усіх $\varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$.

3. Необхідні умови оптимальності

Для того щоб отримати необхідні умови оптимальності для задачі (2.1)–(2.4), розглянемо спочатку задачі умовної мінімізації (2.5). А саме, отримаємо необхідні умови оптимальності для задач (2.5) та проведемо аналіз поведінки цих умов, коли $\varepsilon \rightarrow 0$. Як випливає із зауваження 2.1, задача оптимального керування (2.5) для кожного $\varepsilon > 0$ є коректною керованою системою. Отже, для того щоб отримати необхідні умови оптимальності для цієї задачі, застосуємо такий результат:

Теорема 3.1. [5] *Нехай Y, U і V – банахові простори, нехай $J : Y \times U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – функціонал якості, $F : Y \times U \rightarrow V$ – відображення, U_∂ це опукла підмножина простору U , яка містить більше ніж одну точку. Нехай $(\hat{u}, \hat{y}) \in U \times Y$ це розв'язок задачі*

$$J(u, y) \rightarrow \inf, \quad F(u, y) = 0, \quad u \in U_\partial.$$

Нехай для кожного $u \in U_\partial$ відображення $y \mapsto J(u, y)$ і $y \mapsto F(u, y)$ неперервно-диференційовні для $y \in \mathcal{O}(\hat{y})$, де $\mathcal{O}(\hat{y})$ – деякий окіл точки \hat{y} . Також нехай для $y \in \mathcal{O}(\hat{y})$ функція $u \mapsto J(u, y)$ є опуклою, функціонал J диференційований за Гато відносно u в точці (\hat{u}, \hat{y}) , відображення $u \mapsto F(u, y)$ неперервне з U в Y і аффіне, тобто

$$F(\gamma u_1 + (1 - \gamma) u_2, y) = \gamma F(u_1, y) + (1 - \gamma) F(u_2, y), \quad \forall u_1, u_2 \in U, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тоді існує пара $(\lambda, p) \in (R_+ \times V^)$ така, що*

$$\langle \mathcal{L}'_y(\hat{u}, \hat{y}, \lambda, p), h \rangle_{Y^*; Y} = 0, \quad \forall h \in Y, \tag{3.1}$$

$$\langle \mathcal{L}'_u(\hat{u}, \hat{y}, \lambda, p), u \rangle_{U^*; U} \geq 0, \quad \forall u \in U_\partial - \hat{u}, \tag{3.2}$$

де функціонал Лагранжа \mathcal{L} визначається рівністю

$$\mathcal{L}(u, y, \lambda, p) = \lambda J(u, y) + \langle p, F(u, y) \rangle_{U^*; U}. \tag{3.3}$$

Якщо $\text{Im} F'_y(\hat{u}, \hat{y}) = V$, тоді можна припустити, що $\lambda = 1$ в (3.1)–(3.2).

Оскільки наступна задача для $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$, $v \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на } \Omega_\varepsilon \times [0, T],$$

$$y = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T],$$

$$\partial y / \partial \nu_A = u \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$\partial y / \partial \nu_A = v \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \times [0, T],$$

$$y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega_\varepsilon$$

має єдиний розв'язок $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ [6], то $\operatorname{Im} F'_y(\hat{u}, \hat{y}) = V$, тут $V = L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$. Таким чином, припущення теореми 3.1 виконуються і функціонал Лагранжа у нашому випадку матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(u, v, y, p_1, p_2, p_3) &= \|y - y_d\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))}^2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|v\|_{L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))}^2 + \int_0^T (y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) - f, p_1)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu_A} - u, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu_A} - v, p_3 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt, \quad (3.4) \end{aligned}$$

де $p = (p_1, p_2, p_3) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$.

Враховуючи вищесказане, в наступному результаті встановлено необхідні умови оптимальності для задач умовної оптимізації (2.5):

Теорема 3.2. *Нехай для заданого $\varepsilon > 0$ трійка $(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ є оптимальним розв'язком задачі (2.5). Припустимо, що виконується така умова*

$$\operatorname{div}((A(x)) \nabla y_\varepsilon^0) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)). \quad (3.5)$$

Тоді існує елемент $p_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ такий, що елементи $u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon$,

$\gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_\varepsilon), \gamma_{\Gamma_2}^0(p_\varepsilon)$ задовольняють дану систему співвідношень

$$(y_\varepsilon^0)'_t - \operatorname{div}(\nabla y_\varepsilon^0 + A(x)\nabla y_\varepsilon^0) = f \quad \text{на } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \quad (3.6)$$

$$y_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.7)$$

$$\partial y_\varepsilon^0 / \partial \nu_A = u_\varepsilon^0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.8)$$

$$\partial y_\varepsilon^0 / \partial \nu_A = v_\varepsilon^0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], \quad (3.9)$$

$$y_\varepsilon^0(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega_\varepsilon, \quad (3.10)$$

$$(p_\varepsilon)'_t + \operatorname{div}((I + A^t)\nabla p_\varepsilon) = 2(y_\varepsilon^0 - y_d), \quad \text{м.с. на } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \quad (3.11)$$

$$p_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.12)$$

$$\partial p_\varepsilon / \partial \nu_{I+A^t} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.13)$$

$$\partial p_\varepsilon / \partial \nu_{I+A^t} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], \quad (3.14)$$

$$p_\varepsilon(T, 0) = 0 \quad \text{на } \Omega_\varepsilon, \quad (3.15)$$

$$u_\varepsilon^0 = \Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))} \gamma_{\Gamma_2}^0(p_\varepsilon), \quad (3.16)$$

$$v_\varepsilon^0 = \frac{\varepsilon^\sigma}{2} \Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} \gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_\varepsilon), \quad (3.17)$$

$$2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0, u)_{\mathbb{R}^N} dx dt \geq \int_0^T \langle u, p_\varepsilon \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt, \quad (3.18)$$

для будь-якого $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$, де $\gamma_{\Gamma_2}^0 : H_0^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ і $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0 : H_0^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ — оператори сліду, $\Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))}$ і $\Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))}$ — канонічні ізоморфізми з $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))$ в $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2))$ та $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ в $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ відповідно.

Доведення. Згідно з теоремою 3.1, існує трійка $p = (p_1, p_2, p_3) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ така, що функціонал Лагранжа \mathcal{L} задовольняє співвідношення (3.1)–(3.2). В результаті, враховуючи (3.4), умова (3.1) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{D}_y \widehat{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_1, p_2, p_3), h \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)); L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))} \\ & = 2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^0 - y_d) h dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} h'_t p_1 dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(\nabla h + A(x)\nabla h) p_1 dx dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ & + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_3 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt = 0 \quad (3.19) \end{aligned}$$

для будь-якого $h \in L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Як наслідок з (3.19) і (3.5), для будь-якого $h \in L^2(0, T; C_0^\infty(\Omega_\varepsilon))$ отримаємо таку рівність

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^0 - y_d) h \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} h'_t p_1 \, dx \, dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} (\nabla h + A(x) \nabla h) p_1 \, dx \, dt = 2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^0 - y_d) h \, dx \, dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (p_1)'_t h \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} ((I + A^t(x)) \nabla p_1) h \, dx \, dt = 0. \quad (3.20) \end{aligned}$$

У свою чергу, із (3.5) і (3.20) слідує, що $\operatorname{div} ((A(x)) \nabla p_1) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$. Звідси $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div})$, де

$$H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div}) = \{ \xi \mid \xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)), \operatorname{div} \xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \}.$$

Беручи до уваги властивості Ліпшиця межі $\partial\Omega_\varepsilon$, можна зробити висновок [6, 7], що $\partial p_1 / \partial \nu_{A^t} \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon))$, а відображення $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div}) \mapsto \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{A^t}} \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon))$ є лінійним і неперервним. Крім того, якщо $h \in L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ і $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div})$, то має місце формула Гріна

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} ((I + A) \nabla h) p_1 \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} ((I + A) \nabla p_1) h \, dx \, dt \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma_{\partial\Omega_\varepsilon}^0(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ & + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt. \end{aligned}$$

Далі, комбінуючи це співвідношення з (3.19)–(3.20), отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{D}_y \widehat{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_1, p_2, p_3), h \right\rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon)); L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))} \\ & = \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma_{\partial\Omega_\varepsilon}^0(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ & + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_3 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt = 0, \quad (3.21) \end{aligned}$$

яка має місце для кожного $h \in L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ і для кожного $p = (p_1, p_2, p_3)$ такого, що p_1 задовольняє (3.20) і $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon, \text{div})$ та

$$(p_1, p_2, p_3) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)).$$

Із (3.21) випливає, що для кожного $h \in L^2(0, T; C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2)) \cap L^2(0, T; C_0(\partial\Omega)) \subset L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ має місце рівність

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A^t}}, \gamma_{\partial\Omega}^0(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega); H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0.$$

Так як $C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2) \cap C_0(\partial\Omega)$ є щільною в $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, то

$$\gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma_2}^0(p_1) = 0. \quad (3.22)$$

Отже, для кожного $h \in L^2(0, T; C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2))$ рівність (3.21) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma_{\Gamma_2}^0(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt = 0, \quad (3.23) \end{aligned}$$

аналогічно для кожного $h \in L^2(0, T; C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon))$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt = 0. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що відображення $\partial/\partial \nu_A : H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \cup H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ є ізоморфізмом [8], з (3.23)–(3.24) випливає, що

$$\gamma_{\Gamma_2}^0(p_1) = p_2, \quad \gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_1) = p_3. \quad (3.25)$$

Таким чином, враховуючи (3.23) і (3.25), співвідношення (3.21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{D}_y \widehat{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_1, p_2, p_3), h \right\rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon)); L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))} \\ & = \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt = 0, \end{aligned}$$

для усіх $h \in L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Далі, застосовуючи такі самі міркування, приходимо до висновку:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+At}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+At}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \quad (3.27)$$

У результаті, враховуючи співвідношення (3.19), (3.22), і (3.26)–(3.27), отримаємо крайову задачу (3.11)–(3.15). Як наслідок із властивостей розв'язків задачі (3.11)–(3.15), отримаємо, що $p_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ [9].

Врешті залишилося показати, що мають місце співвідношення (3.16)–(3.18). У нашому випадку умова (3.2) матиме вигляд:

$$(\mathcal{D}_u \mathcal{L}(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon, \gamma_{\Gamma_2}^0(p_\varepsilon), \gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_\varepsilon)), u)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \geq 0, \quad \forall u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0, u)_{\mathbb{R}^N} dx dt \geq \int_0^T \langle u, p_\varepsilon \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt, \quad \forall u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Для того щоб отримати умови (3.16)–(3.17), застосуємо такий факт: простір $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ і $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ можна звести до гільбертового простору відносно відповідної еквівалентної норми. У нашому випадку простір $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ і $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ є дуальними гільбертовими просторами до вищенаведених [6]. \square

Тепер перейдемо до аналізу асимптотичної поведінки системи оптимальності (3.6)–(3.18), коли $\varepsilon \rightarrow 0$. Але спочатку припустимо, що виконуються такі гіпотези:

- (а) Існує оптимальна пара $(u^0, y^0) \in \Xi$ для задачі оптимального (2.1)–(2.4) така, що $y^0 \in D$. Тут D — це множина елементів $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ таких, що

$$\left| \int_0^T \int_\Omega (\nabla \varphi, A \nabla y)_{\mathbb{R}^N} dx dt \right| \leq c(y) \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$.

- (б) Для кожного $\varepsilon > 0$ білінійна форма

$$[y, \varphi] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla \varphi, A \nabla y)_{\mathbb{R}^N} dx dt \quad \forall y \in D, \forall \varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$$

є неперервною в такому розумінні:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_\varepsilon, p_\varepsilon] = [y, p]. \quad (3.28)$$

Тут $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $p_\varepsilon \rightarrow p$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, і $y, y_\varepsilon \in D$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$.

- (с) Нехай $\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність така, що для кожного $\varepsilon > 0$ відповідний набір елементів $(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon)$ задовольняє систему оптимальності (3.6)–(3.18). Тоді існує послідовність операторів продовження $\{P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)), L^2(0, T; H_0^1(\Omega)))\}_{\varepsilon>0}$ і елемент $\bar{\psi}$:

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightarrow \bar{\psi} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{і} \quad \bar{\psi} \in D.$$

У наступному результаті показано, що граничний перехід у системі оптимальності (3.6)–(3.18) для задач (2.5), коли $\varepsilon \rightarrow 0$, призводить до необхідних умов оптимальності задачі (2.1)–(2.4).

Теорема 3.3. *Нехай $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ матриця Q -типу, $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u_d \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ і $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ — задані розподілення. Нехай $\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність оптимальних розв'язків задач оптимального керування (2.5), а пара $(u^0, y^0) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D$ є варіаційною границею цієї послідовності. Нехай $\{p_\varepsilon^0 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))\}_{\varepsilon>0}$ послідовність відповідних спряжених станів. Тоді виконання гіпотез (а)–(с) означає, що $(u^0, y^0) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ є оптимальною парою задачі (2.1)–(2.4) і існує елемент $\bar{\psi} \in H_0^1(\Omega)$ такий, що*

$$(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \xrightarrow{Var} (u^0, y^0) \quad \text{коли } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightarrow \bar{\psi} \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} (y^0)'_t - \operatorname{div}(\nabla y^0 + A(x)\nabla y^0) &= f \quad \text{на } \Omega \times [0, T], \\ y^0 &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \\ \partial y^0 / \partial \nu_A &= u^0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \\ y^0(t_0, x) &= y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi})'_t + \operatorname{div}((I + A^t)\nabla \bar{\psi}) &= 2(y_\varepsilon^0 - y_d), \quad \text{на } \Omega \times [0, T], \\ \bar{\psi} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \\ \partial \bar{\psi} / \partial \nu_{I+A^t} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T], \\ \bar{\psi}(T, 0) &= 0 \quad \text{на } \Omega, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (u^0, u)_{\mathbb{R}^N} dx dt \geq \int_0^T \langle u, \bar{\psi} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \quad (3.33)$$

для будь-якого $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$.

Доведення. Перш за все слід зазначити, що згідно з теоремою 1 [2], послідовність оптимальних розв'язків $\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задач умовної оптимізації

(2.5) є компактною відносно слабкої збіжності в сенсі означення 5 [2]. Крім цього, в якості граничної пари такої послідовності виступає оптимальна пара (u^0, y^0) вихідної задачі оптимального керування. Звідси $(u^0, y^0) \in \Xi$. Далі, в результаті переходу до границі в (3.6)–(3.10), коли $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо таку інтегральну тотожність:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (y_0)'_t \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \varphi, \nabla y_0 + A \nabla y_0)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u_0 \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt. \end{aligned}$$

Отже, відношення (3.31) має місце в сенсі розподілення.

Оскільки інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \varphi, \nabla P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) + A \nabla P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}))_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_{\varepsilon}} \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} (P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}))'_t \varphi \chi_{\Omega_{\varepsilon}} \, dx \, dt = \\ = -2 \int_0^T \int_{\Omega} (y_0 - y_d) \varphi \chi_{\Omega_{\varepsilon}} \, dx \, dt, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(0, T; C_0^{\infty}(\Omega)) \quad (3.34) \end{aligned}$$

має місце для кожного $\varepsilon > 0$, то можна перейти до границі в (3.34), коли $\varepsilon \rightarrow 0$. Далі, використовуючи сильну збіжність $\chi_{\Omega_{\varepsilon}} \rightarrow \chi_{\Omega}$ in $L^2(\Omega)$ (твердження 1 [2]), отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \varphi, \nabla \bar{\psi} + A^t \nabla \bar{\psi})_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{\psi})'_t \varphi \, dx \, dt = \\ = -2 \int_0^T \int_{\Omega} (y_0 - y_d) \varphi \, dx \, dt, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(0, T; C_0^{\infty}(\Omega)). \quad (3.35) \end{aligned}$$

Отже, $\bar{\psi} \in D \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ і $\bar{\psi}$ задовольняє співвідношення (3.32). Накінець, перейшовши до границі в (3.18), коли $\varepsilon \rightarrow 0$ і врахувавши вищесказане, отримаємо нерівність (3.33). \square

Бібліографічні посилання

1. Горбонос С.О. Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами / С.О. Горбонос, П.І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2013. — Вип. 5. — № 8. — С. 69–83.

2. *Горбонос С.А.* Об аппроксимации решений одного класса задач оптимального управления для параболического уравнения с неограниченными коэффициентами / С.А. Горбонос // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — Вып. 5. — С.15–29
3. *Gorbonos S. O.* On Pathological Solutions to an Optimal Boundary Control Problem for Linear Parabolic Equation / S. O. Gorbonos, P. I. Kogut // Сборник научных трудов «Кибернетика и вычислительная техника». — 2014. — Вып. 176. — С. 5–18.
4. *Kogut P. I.* On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients / P. I. Kogut, O. P. Kупenko // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2012. — Вип. 4. — № 8. — С. 63–82.
5. *Ioffe A. D.* Theory of Extremal Problems / A. D. Ioffe, V. M. Tichomirov. — North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
6. *Lions J.-L.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications / J.-L. Lions, E. Magenes. — Springer-Verlag, Berlin, 1972.
7. *Cioranescu D.* An Introduction to Homogenization / D. Cioranescu, P. Donato. — Oxford University Press, New York, 1999.
8. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 350 с.
9. *Gilbarg D.* Elliptic partial differential equations of second order / D. Gilbarg, N. S. Trudinger. — Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Надійшла до редколегії 20.04.2016