ISSN (print) 2312–4547, ISSN (on-line) 2415–7325.
ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". 2016. Вип. 8, № 8. С. 230–240
DOI 10.15421/141612

УДК 536.24

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АДЕКВАТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю. Л. Меньшиков

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, Днепропетровск, 49010, e-mail: menshikov2003@list.ru

Представлено проф. Кочубеем А. А.

Исследованы вопросы корректности задачи синтеза адекватных алгебраических математических моделей физических процессов. Сформулированы условия, при которых такой синтез возможен. Дано определение адекватности математических моделей в алгебраической форме и сформулированы некоторые их свойства. Показано, что указанная задача синтеза является неустойчивой к малым изменениям исходных данных. Для получения устойчивых результатов идентификации использован метод регуляризации А.Н. Тихонова. В качестве конкретного примера рассмотрена задача идентификации параметров процесса выплавки стали. Выполнено сравнение с результатами, полученными методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: алгебраические математические модели, адекватные модели, идентификация параметров, регуляризация, модель процесса выплавки стали.

1. Введение

Во многих случаях математическая модель физического процесса строится как алгебраические соотношения между характеристиками этого процесса. Такие модели получили значительное распространение в технике, экологии, экономике и т.д. [1, 2]. Для обоснованного применения математических моделей указанного типа необходимо принимать во внимание, что они могут быть получены только при определенных условиях [3].

Сформулируем общие условия, при которых возможно построение математических моделей в алгебраической форме. Во-первых, физический процесс удовлетворяет условию циклической повторяемости, т.е. от одного цикла к любому другому циклу не изменяются характер процесса (порядок следования операций, последовательность и величина внешних воздействий, граничные условия, время протекания процесса и т.д.). Примерами таких процессов могут быть процесс выпечки хлеба, выплавки стали. В такой ситуации возможно построить некоторое условное отображение исходных параметров процесса в конечные характеристики:

$$\sigma = F(\rho), \tag{1.1}$$

где $\sigma \in \Sigma \subset R^m$ есть m-мерный вектор конечных характеристик, $\rho \in \Omega \subset R^n$ есть n-мерный вектор исходных параметров процесса, $F : \Omega \to \Sigma$ есть некоторое отображение.

Естественно, что выбор исходных параметров и конечных результатов (характеристик) зависит от целей изучения процесса.

Согласно условию цикличности структура и параметры отображения остаются неизменными в процессе изучения. Отображение $F : \Omega \to \Sigma$ должно удовлетворять как минимум следующим условиям, имея ввиду возможность построения в дальнейшем алгебраической модели:
- отображение однозначно;
- отображение инъективно;
- область определения односвязна;
- отображение непрерывно, т.е. малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям конечных результатов.

Следует отметить, что в силу погрешности исходных данных затруднительно выполнить проверку этих условий.

Если указанные выше условия выполнены, тогда можно отображение (1.1) рассматривать как нелинейные алгебраические соотношения.

$$\sigma = \Phi(\rho), \tag{1.2}$$

где $\sigma \in \Sigma \subset R^m$ есть m-мерный вектор конечных характеристик, $\rho \in \Omega \subset R^n$ есть n-мерный вектор исходных параметров процесса, $\Phi : \Omega \to \Sigma$ есть некоторая алгебраическая функция. При этом параметры алгебраической математической модели $\Phi : \Omega \to \Sigma$ физического процесса будут постоянными.

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)^T ((.)^T$ — знак транспонирования) в малой окрестности точки $\rho^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, ..., \rho_n^0)^T$, тогда любую гладкую функцию $\Phi(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ в уравнении (1.2) можно приближенно заменить линейной зависимостью:

$$B\rho = \sigma, \tag{1.3}$$

где B есть матрица линейных математических моделей связи вектора ρ с вектором σ размером $n \times m$.

Рассмотрим одну строку в (1.3):

$$b_{k,1}\rho_1 + b_{k,2}\rho_2 + b_{k,3}\rho_3 + ... + b_{k,n}\rho_n = \sigma_k, k = \overline{1, m}, \tag{1.4}$$

где $b_{k,1}, b_{k,2}, ..., b_{k,n}$ есть параметры приближенной математической модели связи показателей $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ физического процесса с показателем σ_k.

В работе [3] даны определения адекватности линейных алгебраических математических моделей. Очевидно, что без выполнения условий адекватности любой математической модели дальнейшее ее использование не является обоснованным.

Из особенностей рассматриваемых физических процессов, вытекают следующие свойства линейных адекватных алгебраических математических моделей физического процесса [3]:

1. Адекватные линейные алгебраические математические модели при любом выборе параметров модели являются приближенными;

2. Адекватные линейные алгебраические математические модели хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности точки ρ^0 изменения переменных (свойство локальности).

При построении адекватных математических моделей желательно, чтобы количество исходных данных для расчетов параметров адекватной алгебраической математической модели было минимальным. Кроме того, для целей дальнейшего использования таких маделей необходимо, чтобы алгоритм синтеза адекватной алгебраической математической модели обеспечивал устойчивые к малым изменениям исходных данных результаты [4].

2. Постановка задачи идентификации параметров адекватных линейных математических моделей

Один из возможных алгоритмов синтеза адекватной математической модели предложен в работах [3, 4], который базируется на методе идентификации с использованием реальных измерений. При этом предполагалось, что количество измерений характеристик процесса минимально и равно количеству этих переменных. В рамках этого алгоритма задача синтеза адекватной линейной математической модели с n переменными $q_1, q_2, ..., q_n$ относительно переменной q_1 с количеством измерений каждой переменной равной n в детерминированной постановке, как задача решения алгебраической системы [3, 4] с ограничениями:

$$A_p(q_2, ..., q_n)z = q_1 = u_1, \tag{2.1}$$

где оператор $A_p(q_2, ..., q_n)z$ определяется следующим образом

$$A_p(q_2, ..., q_n)z = z_1 q_2 + z_2 q_3 + ... + z_{n-1} q_n + z_n e,$$

e — единичный вектор размерности n, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$ — искомый вектор параметров математической модели процесса, $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{in})^T$, $i = \overline{1, n}$.

Поскольку измерения переменных $q_1, q_2, ..., q_n$ получены экспериментальным путем, то предполагается, что каждое измерение $q_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори [5]:

$$| q_{ij} - q_{ij}^{ex} | \leq \delta_i, 1 \leq i, j \leq n, \delta_i \leq \delta_0, \tag{2.2}$$

где q_{ij}^{ex} — точное измерение переменной q_{ij}.

Обозначим через p вектор из пространства $E^{n(n-1)} = E^n \oplus E^n \oplus ... \oplus E^n$:

$$p^T = (q_{21}, q_{22}, ..., q_{2n}, q_{31}, q_{32}, ..., q_{n1}, q_{n2}, ..., q_{nn}),$$

где E^n есть евклидовое векторное пространство размерности n со стандартной нормой.

Каждый вектор q_i может принимать значение в замкнутой области $D_i \subset E^n$, согласно неравенствам (2.2). Вектор p может принимать значения в замкнутой области $D = D_2 \oplus D_3 \oplus ... \oplus D_n \subset E^{n(n-1)}$. Каждому вектору p из области D соответствует определенный оператор A_p. Множеству $D \subset E^{n(n-1)}$ будет соответствовать класс операторов $\{A_p\} = K_A$.

Представим (2.1) как

$$A_p z = u_{\delta_1}, \tag{2.3}$$

где $u_{\delta_1} = q_1; u_{\delta_1} \in U = E^1; z \in Z = E^n; \| u_{\delta_1} - u_1^{ex} \|_U \leq \delta_1, u_1^{ex}$ — точная правая часть уравнения (2.3);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \| A_{p_\alpha} - A_{p_\alpha} \| \leq h_1,$$

$\| \,.\, \|_Z, \| \,.\, \|_U$ — нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор $z \in Z$, который при подстановке в уравнение (2.3) дает вектор $A_p z$, который отличается по норме от u_{δ_1} на величину, меньшую δ_1. Это соответствует определению адекватности, которое сформулировано в [3].

Множество возможных решений задачи синтеза (множество адекватных математических моделей) при фиксированном операторе $A_p \in K_A$ будет определяться следующим образом:

$$Q_{\delta_1,p} = \{z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \leq \delta_1\}.$$

Ранее было показано, что множество $Q_{\delta_1,p}$ замкнутое и выпуклое [4].

Множество $Q_{\delta_1,p}$ ограниченно, если $\Delta = det A_p \neq 0$, и, возможно, неограниченно, если $\Delta = det A_p = 0$.

В работе [3] показано, что некоторое возможное множество исходных данных $N_{n-1} \subset E^{n-1}$ состоит из элементов, для которых матрица A_p в уравнении (2.3) является вырожденной. Показано также, что множество N_{n-1} является выпуклым, замкнутыи и связным. Далее, найдено некоторое подмножество исходных данных $\hat{N}_{n-1} \subset N_{n-1}$, на котором уравнение (2.3) с вырожденной матрицей A_p имеет решение (бесконечное множество решений).

Для выбора индивидуальной математической модели из множества $Q_{\delta_1,p}$ необходимо использовать дополнительную информацию. Если такая информация отсутствует, то возможно принимать за решение уравнения (2.3) элемент $z_p \in Q_{\delta_1,p}$, который является решением следующей экстремальной задачи на возможно неограниченном множестве $Q_{\delta_1,p}$ [3]:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \Omega[z]. \qquad (2.4)$$

Вектор $z_p \in Q_{\delta_1,p}$ можно интерпретировать как максимально устойчивый элемент к малым изменениям факторов, которые не приняты во внимание (наиболее стабильная часть). Влияние указанных факторов будет только повышать величину $\Omega[z_p]$ [6]. Такое свойство решения z_p особенно важно при дальнейшем использовании этого решения, например, для построения достоверного краткосрочного прогноза.

Справедливы следующие теоремы [4, 6].

Теорема 2.1. *Пусть Z есть рефлексивное Банахово функциональное пространство, $Q_{\delta_1,p}$ — непустое замкнутое множество из E^n, функционал $\Omega[z]$ является выпуклым и полунепрерывным снизу на $Q_{\delta_1,p}$, множество Лебега*

$$M(v) = z : z \in Q_{\delta_1,p}, \Omega[z] \leq \Omega[v]$$

для произвольной функции из $Q_{\delta_1,p}$ ограничено. Тогда $\Omega[z*] > -\infty$, множество точек, на которых достигается точная нижняя грань, непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность z_k, принадлежащая $M(v)$, сходится к точке экстремума.

Теорема 2.2. *Пусть $Q_{\delta_1,p}$ — непустое замкнутое множество из E^n, функционал $\Omega[z]$ сильно выпуклый и полунепрерывный на множестве $Q_{\delta_1,p}$. Тогда множество Лебега*

$$M(v) = z : z \in Q_{\delta_1,p}, \Omega[z] \leq \Omega[v]$$

выпукло, замкнуто и ограничено при всех $v \in Q_{\delta_1,p}$, множество точек, на которых достигается точная нижняя грань, состоит из одного элемента.

При выборе исходных данных произвольным образом возможны случаи, когда решение единственно, когда решений бесконечно много, когда решение отсутствует. Если рассматривать задачу идентификации параметров адекватной алгебраической математической модели, тогда следует учитывать все случаи для уравнения (2.1).

Введем в рассмотрение множество

$$Q^* = \bigcup_{p \in D} Q_{\delta_1,p}.$$

Рассмотрим постановку следующей экстремальной задачи (в условиях отсутствия дополнительной информации):

$$\Omega[z^*] = \inf_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \Omega[z]. \qquad (2.5)$$

В такой постановке охватываются все вышеперечисленные случаи.

Вектор $z^* \in Q^*$ является адекватной математической моделью процесса, которая имеет наименьшую величину $\Omega[z]$ среди всех возможных, если учесть погрешность оператора A_p.

Также возможна постановка следующей экстремальной задачи:

$$\| z^*_{sup} \|^2 = \sup_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta_1, p}} \Omega[z]. \quad (2.6)$$

Справедлива теорема.

Теорема 2.3. *При выполнении условий теоремы 2 экстремальные задачи* (2.5), (2.6) *имеют единственные решения, принадлежащие множеству* Q^*.

Вектор $z^*_{sup} \in Q^*$ имеет наибольшую норму среди решений задачи (2.4) на множествах $Q_{\delta_1, p}$.

Для целей прогнозирования поведения физического процесса наилучшей моделью является решение следующей задачи идентификации параметров:

$$\| A_{p^{opt}} z^{pl}_{\delta_1} - u_{\delta_1} \|^2 = \inf_{z_a \in Q^*} \sup_{A_p \in K_A} \| A_p z_a - u_{\delta_1} \|^2, \quad (2.7)$$

где z_a есть решение экстремальной задачи:

$$\Omega[z_a] = \inf_{z \in Q_{\delta_1, a}} \Omega[z], a \in D. \quad (2.8)$$

Модель $z^{pl}_{\delta_1}$ будем называть наиболее правдоподобной адекватной математической моделью в алгебраической форме.

Использование этой модели для прогноза показателя q_1 позволяет получить прогноз с наименьшими отклонениями максимально возможных отклонений при заданной ошибке измерений переменных $q_2, ..., q_n$.

Следует отметить, что широко используемый на практике метод наименьших квадратов для получения линейных математических моделей в алгебраической форме не требует выполнения условия адекватности модели в процессе их построения [1, 2].

3. Метод решения и пример расчета

Для решения экстремальной задачи (2.5) использовался метод регуляризации А.Н.Тихонова [7]. Для этого экстремальная задача (2.5) заменяется на решение эквивалентной задачи минимизации сглаживающего функционала более удобной для применения численных методов [7]:

$$M^\alpha[z, A_p, u_{\delta_1}] = \| A_p z - u_{\delta_1} \|^2 + \alpha \Omega[z]. \quad (3.1)$$

Уравнение Эйлера для функционала (3.1) имеет вид:

$$A^*_p A_p z + \alpha \Omega'[z] = A^*_p u_{\delta_1}, \quad (3.2)$$

где A_p^* есть сопряженный оператор к оператору $A_p, \Omega'[z]$ — производная Фреше.

Параметр регуляризации α определялся из уравнения невязки [7]:

$$\| A_p z_p - u_{\delta_1} \|^2 = \delta^2, \tag{3.3}$$

где z_p есть вектор, на котором достигается минимум функционала (3.1) на множестве возможных решений $Q_{\delta_1,p}$ при фиксированном операторе A_p.

Далее простым перебором с некоторым шагом найти вектор z_p с наименьшей нормой z^*.

В качестве примера синтеза выбрана задача построения линейной алгебраической математической модели процесса выплавки стали [8]. Этот процесс удовлетворяет условиям цикличности процесса и допускает описание с помощью линейной алгебраической математической модели в малой окрестности выбранной точки области изменения переменных. Исходными данными для тестовых расчетов выбраны данные из работы [8] о химическом составе, параметрах термообработки и прочностных свойствах стали, которые представлены в табл. 1. В качестве стабилизирующего функционала выбран следующий:

$$\Omega[z] = \| z \|^2 .$$

Этот функционал удовлетворяет условиям теорем 2.

В табл. 1 были приняты следующие обозначения (для химического состава стали содержание элементов задано в массовых процентах):
$C(q_2)$ — количество углерода; $Si(q_3)$ — количество кремния;
$Mn(q_4)$ — количество марганца; $P(q_5) \cdot 100$ — количество фосфора;
$S(q_6) \cdot 100$ — количество серы; $Cr(q_7) \cdot 100$ — количество хрома;
$Ni(q_8) \cdot 100$ — количество никеля; $Al(q_9) \cdot 100$ — количество алюминия;
$Cu(q_{10}) \cdot 100$ — количество меди; $Ti(q_{11}) \cdot 100$ — количество титана;
$V(q_{12}) \cdot 100$ — количество ванадия; Тзак.$^\circ C(q_{13})$ — температура закалки;
$\sigma(q_1)$ — предел прочности стали в МПа.

Вначале был выполнен расчет параметров линейной математической модели в алгебраической форме по данным табл. 1 методом наименьших квадратов (LSM) :

$$q_1^{LSM} = 823q_2 + 1503q_3 + 213q_4 - 196q_5 - 3004q_6 +$$

$$+5375q_7 - 534q_8 - 1203q_9 - 21146q_{10} - 642q_{11} + 4964q_{12} + 1037q_{12} + 0.0013.$$

Для проверки адекватности полученной математической модели в алгебраической форме были выполнены расчеты показателя q_1^{LSM} по полученной модели для каждого из экспериментов, представленных в табл. 1. Сравнение результатов с табл. 1 показало, что практически ни в одном случае нет совпадения, которое требуется в условиях адекватности.

Таблица 1: Исходные данные для расчетов

N/	C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Al	Cu	Ti	V	Tзак., °C	σ
/N	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_1
1.	0.6	0.3	0.8	0.9	0.9	8	5	2.3	9	0.6	8.8	900	1049
2.	0.57	0.33	0.84	0.6	0.5	7	5	2.4	8	0.6	8.7	900	1039
3.	0.6	0.94	0.82	0.9	0.3	9	5	2.8	8	0.7	8.8	900	1159
4.	0.6	0.94	0.82	0.9	0.3	9	5	2.8	8	0.7	8.8	880	1136
5.	0.57	1.31	0.8	0.8	0.6	8	5	3.2	9	0.8	8.6	900	1137
6.	0.6	0.94	0.8	0.9	0.6	8	5	2.8	9	0.7	8.6	900	1127
7.	0.59	1.36	0.78	0.8	0.6	8	5	3.2	8	0.8	8.3	900	1166
8.	0.59	1.09	0.79	0.8	0.7	8	5	3.2	9	0.7	8.4	900	1127
9.	0.58	1.71	0.78	0.9	0.8	8	5	4	8	0.9	8.3	900	902
10.	0.57	1.43	0.79	0.7	0.6	8	6	3.5	8	0.8	8.4	900	1156
11.	0.58	1.33	0.79	0.8	0.7	9	5	3.2	9	0.8	8.6	900	1078
12.	0.6	0.96	0.84	1.2	0.4	9	6	2.8	5	0.8	8.3	860	1137
13.	0.61	0.97	0.84	0.8	0.4	9	6	2.7	6	0.8	8.3	860	1137
14.	0.59	0.97	0.86	0.9	0.3	9	6	2.6	6	0.8	8.4	860	1123
15.	0.59	0.96	0.86	1.1	0.4	9	6	2.6	4	0.9	8.5	860	1139
16.	0.59	0.98	0.86	0.9	0.3	9	6	2.6	6	0.8	8.2	880	1147
17.	0.58	0.98	0.87	0.9	0.4	9	6	2.6	5	0.8	8.4	880	1137
18.	0.57	0.97	1.46	0.8	0.6	8	5	2.6	8	0.8	8.6	900	1037
19.	0.58	1.02	1.49	0.9	0.6	8	5	2.7	8	0.8	8.6	900	1029
20.	0.58	1.02	1.5	1.1	0.6	8	5	2.6	8	0.4	8.5	900	990
21.	0.59	1.06	1.5	0.9	0.5	8	5	2.7	8	0.8	8.8	900	951
22.	0.57	0.79	1.27	0.6	0.5	7	4	2.6	7	0.7	8.6	900	1117
23.	0.53	0.69	0.7	0.6	0.6	17	5	2.5	8	0.7	1.9	890	960
24.	0.55	0.65	0.69	0.6	0.8	18	6	2.5	9	0.7	1.9	890	970
25.	0.53	0.66	0.69	0.6	0.7	17	5	2.4	8	0.6	1.9	890	951
26.	0.53	0.65	0.69	0.6	0.8	18	6	2.4	10	0.7	1.9	890	960
27.	0.52	0.69	0.69	0.5	0.7	17	5	2.4	7	0.7	1.9	890	970
28.	0.53	0.64	0.7	0.5	0.8	18	6	2.5	9	0.7	2	890	960
29.	0.52	0.7	0.7	0.5	0.7	17	5	2.3	8	0.7	1.8	890	951
30.	0.53	0.62	0.69	0.5	0.7	17	6	2.4	9	0.7	1.9	890	970
31.	0.53	0.66	0.69	0.5	0.6	17	5	2.4	8	0.6	1.8	920	970
32.	0.55	0.64	0.7	0.5	0.7	18	6	2.6	9	0.7	2	920	990
33.	0.53	0.66	0.69	0.6	0.6	17	5	2.3	8	0.7	1.9	920	990
34.	0.53	0.64	0.69	0.6	0.6	17	6	2.3	10	0.7	1.9	920	990
35.	0.53	0.67	0.69	0.5	0.6	17	5	2.4	8	0.6	1.8	920	990
36.	0.53	0.62	0.68	0.5	0.7	17	5	2.3	9	0.6	1.9	920	1009
37.	0.53	0.67	0.68	0.5	0.6	17	5	2.4	7	0.6	1.7	920	980
38.	0.53	0.69	0.69	0.6	0.6	17	5	2.5	8	0.6	1.8	920	990
39.	0.57	1.27	0.78	1.0	1.2	11	5	3.3	6	0.8	8.8	900	1137

Продолжение Таблицы 1

N/	C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Al	Cu	Ti	V	Тзак., °C	σ
/N	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_1
40.	0.57	1.27	0.78	0.9	1.3	11	5	3.2	7	0.8	8.7	900	1137
41.	0.56	1.13	0.78	0.9	1.2	11	5	3.2	6	0.8	8.8	900	1110
42.	0.59	1.26	0.75	1.0	1.1	11	5	3.4	7	0.8	8.6	900	1147
43.	0.57	0.99	0.78	0.9	1.1	11	6	3.2	6	0.7	8.9	900	1101
44.	0.55	1.1	0.78	0.8	1.1	11	6	3.1	7	0.7	8.8	900	1110
45.	0.73	0.32	0.75	1.4	0.5	13	6	2.2	8	0.6	0	815	1242
46.	0.73	0.32	0.75	1.4	0.5	13	6	2.2	8	0.6	0	815	1237
47.	0.73	0.32	0.75	1.4	0.5	13	6	2.2	8	0.6	0	815	1217
48.	0.73	0.32	0.75	1.4	0.5	13	6	2.2	8	0.6	0	815	1231
49.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1196
50.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1196
51.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1107
52.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1107
53.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1078
54.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1078
55.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1078
56.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1078
57.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1186
58.	0.68	0.33	0.78	0.6	0.7	18	13	2.2	9	0.6	9	885	1186
59.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	860	1057
60.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	861	1070
61.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	862	1070
62.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	863	1087
63.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	864	1078
64.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	865	1087
65.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	866	1172
66.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	867	1139
67.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	867	1119
68.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	868	1173
69.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	870	1180
70.	0.74	0.36	0.77	1.3	1.2	14	6	2.8	8	0.5	0	871	1137

Далее выполнялся синтез линейной алгебраической математической модели связи предела прочности стали $\sigma(q_1)$ с характеристиками процесса выплавки стали $(q_2, ..., q_{10})$. При этом в качестве исходных данных выбирались данные из аналогичной базы данных, которые образуют некоторую окрестность, где выполняются условия построения алгебраической математической модели (табл. 2). Такой выбор исходных данных базируется на многолетнем опыте выплавки стали.

Таблица 2: Исходные данные для расчетов

N/	C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Cu	Ti	σ
/N	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_1
1	6.1	3.2	6.8	0.7	1.3	0,7	0.5	2.8	0.8	990
2	4.6	3.3	7.1	1.00	0.8	2.2	0.6	2.5	0.7	917
3	5.2	3.3	7.0	0.5	0.5	1.8	0.5	2.2	0.9	915
4	6.0	3.0	8.0	0.9	0.9	0.8	0.5	2.3	0.9	1049
5	5.7	3.3	8.4	0.6	0.5	0.7	0.5	2.4	0.8	1039
6	6.6	3.3	7.3	0.8	0.7	1.9	0.5	1.9	0.6	1156
7	6.8	3.2	7.6	1.0	1.0	1.9	1.2	2.7	0.5	1147
8	6.7	2.9	7.6	1.4	1.1	1.8	1.3	2.4	0.6	1166
9	6.6	3.3	7.9	0.9	1.3	1.8	1.2	2.2	0.5	1186
10	6.5	3.5	7.9	0.9	1.2	1.8	1.3	2.5	0.6	1186

Матрица A_p размером 10×10 формировалась следующим образом: строками матрицы A_p являются строки 1, 2, 10 табл. 2 с первой по десятую без последних элементов, последний столбец матрицы A_p заполняется единицами.

Решение уравнения (3.2) выполнялось численными методами с выбором параметра регуляризации α из уравнения невязки.

В результате получена следующая линейная алгебраическая математическая модель процесса выплавки стали при $\alpha = 0.317$:

$$q_1 = 1086q_2 + 1731q_3 - 166q_4 + 8.67q_5 - 1448q_6 - 25.3q_7 + 10.98q_8 - 82.43q_9 -$$

$$-31.1q_{10} + 12.0.$$

Для проверки адекватности полученной математической модели в алгебраической форме были выполнены расчеты показателя q_1^M по полученной модели для каждого из 10 экспериментов в табл. 2.

$$q_1^M = (1025; 978; 1001; 1066; 1067; 1091; 1122; 1114; 1124; 1121)^T.$$

Сравнение с экспериментальными значениями (последний столбец в табл. 2) показывает, что максимальное отклонение небольшое и не превышает пяти процентов.

Следует заметить, что адекватность математической модели на будущие измерения, которые выходят из малой окрестности исходных данных, определить невозможно. Однако, можно надеяться, что если условия при построении адекватной математической модели не изменяются в будущем, тогда можно полагать полученную математическую модель адекватной и для будущих измерений в той же самой малой окрестности изменения переменных.

4. Заключение

В работе рассмотрен алгоритм идентификации параметров адекватной математической модели в алгебраической форме. Рассмотрены условия, при которых такие математические модели могут быть правомерны. Предложено несколько постановок задач идентификации в зависимости от конечных целей исследования. В качестве конкретного примера рассмотрена задача идентификации параметров алгебраической адекватной математической модели процесса выплавки стали. Полученные результаты можно использовать для анализа влияния параметров на физический процесс.

Библиографические ссылки

1. *К*uchuk F. J., Onur M., Hollaender F. Pressure Transient Formation and Well Testing. Dev. in Petr. Science. — Vol. 57. — Elsevier Science, USA. — 2010. — 414 p.
2. *Д*оугерти К. Введение в эконометрику/ К. Доугерти. — М.: ИНФРА, 1999. —– XIV. — 402 с.
3. *М*еньшиков Ю. Л. Синтез адекватных алгебраических математических моделей/ Ю. Л. Меньшиков // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2014. — Вип. 7. — № 8. —Т. 23. — С. 125–137.
4. *М*enshkov Yu. L. Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). — Vol. 4. — Number 5. — 2014. — 5 p.
5. *П*оляк Б. Т. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью / Б. Т. Поляк, С. А. Назин // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1-2. — С. 38–49.
6. *М*enshkov Yu. L. Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process // Journal of Applied Mathematics and Physics. — Vol. 2. — Number 5. — 2014. — P. 189–193.
7. *Т*ихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. —256 с.
8. *Т*огобицкая Д. Н. Физико-химические критерии и модели для оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д. Н. Тогобицкая, А. И. Бабаченко, А. С. Козачек // Наукові Вісті. Сучасні проблеми металургії. — Дніпропетровськ : НМетаУ. — № 16. — 2014. — 89 с.

Надійшла до редколегії 29.04.2016