ISSN (print) 2312–4547, ISSN (on-line) 2415–7325.
ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2016. Вип. 8, № 8. С. 93–105
DOI 10.15421/141606

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В. Е. Капустян*, И. А. Пышнограев**

* *Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев 03057. E-mail: v.kapustyan@kpi.ua*

** *Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев 03057. E-mail: pyshnograiev@gmail.com*

Представлено проф. Наконечным А. Г.

Исследована задача оптимального управления для вырождающегося параболо–гиперболического уравнения с переменными коэффициентами для полуопределенного критерия качества. Выведены условия существования и единственности решения исходной краевой задачи. Для задачи оптимального управления выведены условия, которые обеспечивают существование единственного решения.

Ключевые слова: оптимальное управление, параболо–гиперболическое уравнение, краевая задача, полуопределенный критерий качества.

1. Введение

В данной работе исследована одна задача оптимального управления для вырождающегося на линии $t = 0$ параболо–гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Неуправляемая краевая задача для такого уравнения была рассмотрена в [1]. В случае наличия управления в правой части решение краевой задачи локально зависит от управления по параболической части в точке $t = 0$. Этот факт приводит к тому, что это управление следует искать в классе абсолютно непрерывных функций.

2. Решение вырождающегося неоднородного параболо-гиперболического уравнения

Требуется найти функцию $y(x,t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap \ C^{2,1}(D_+)$, удовлетворяющую в D уравнению

$$Ly(x,t) = \hat{u}(x,t) \tag{2.1}$$

начальным

$$y(x,-\alpha)=\varphi(x) \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$y(0,t)=y(1,t)=0, -\alpha\le t\ \le T, \tag{2.3}$$

где $D=\{(x,t):0<x<1,-\alpha<t\le\ T,\alpha,T>0\}$, $D_-=\{(x,t):0<x<1,-\alpha<t\le 0\}, D_+=\{(x,t):0<x<1,0<t\le T\}$, управление $\hat{u}$ и начальные условия φ считаем задаными, а их свойства по гладкости будут уточнены ниже,

$$Ly=\begin{cases} y_t-t^n y_{xx}+b^2t^n y, & \mathrm{t}>0,\\ y_{tt}-(-t)^m y_{xx}+b^2(-t)^m y, & \mathrm{t}<0.\end{cases}$$

В операторе L предполагается, что числа $b\ge 0, m,n\ >0$.

В работе [1] задача (2.1)–(2.3) рассмотрена для случая $\hat{u}(x,t)\equiv 0$.

В краевой задаче (2.1)–(2.3) положим для удобства

$$\hat{u}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & \mathrm{t}\ge 0,\\ v(x,t), & \mathrm{t}<0.\end{cases}$$

Для представления ее решения справедлива формула

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\ y_k(t), \tag{2.4}$$

где функции $y_k(t)$ определяются как решения задач Коши

$$\frac{dy_k(t)}{dt}+\mu_k^2t^ny_k(t)=\ u_k(t), t>0,$$

$$\frac{d^2y_k(t)}{dt^2}+\mu_k^2(-t)^m y_k=v_k(t), t<0,$$

$$y_k(-\alpha)=\varphi_k, y_k(0-)=\ y_k(0+), \frac{dy_k(0-)}{dt}=\frac{dy_k(0+)}{dt}, \tag{2.5}$$

причем, $X_k=\sqrt{2}\sin kx\pi, k=1,...$ ортонормированная, полная в $L_2(0,1)$ система функций; $\mu_k^2=b^2+(k\pi)^2$; последовательность чисел φ_k и последовательности функций $u_k(t)$, $v_k(t)$ — коэффициенты Фурье для функций $\varphi(x)$, $u(x,t), v(x,t)$ по базису $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Выпишем решения задач (2.5). Общее решение первого уравнения из (2.5) имеет вид

$$y_k(t)=a_k\exp(-\mu_k^2\frac{t^{n+1}}{n+1})+\int_0^t u_k(\tau)\exp(-\mu_k^2\frac{t^{n+1}-\tau^{n+1}}{n+1})d\tau, \tag{2.6}$$

где a_k — произвольная постоянная.

Найдем общее решение второго уравнения из (2.5). С этой целью рассмотрим соответствующее однородное уравнение. Заменой переменных [1]

$$y_(t) = Y(p_k(-t)^q)\sqrt{-t}, p_k = \mu_k/q, q = (m+2)/2$$

это уравнение сводится к уравнению

$$Y''(z) + \frac{1}{z}Y'(z) \ + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})Y(z) = 0, \tag{2.7}$$

где $z = p_k(-t)^q, \nu = (2q)^{-1}$.

Уравнение (2.7) имеет общее решение вида [2]

$$Y(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν

$$J_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\nu+1)} (\frac{z}{2})^{\nu \ +2s},$$

причем, $\Gamma(\theta)$ — гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(\theta) = \int_0^\infty \exp(-x) \ x^{\theta-1} dx, \theta > 0.$$

Тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_k^0(t) = c_k\sqrt{-t}J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q) + d_k\sqrt{-t}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q), t < 0,$$

где c_k, d_k — произвольные постоянные.

Решая теперь второе уравнение из (2.5) методом вариации постоянных, находим

$$y_k(t) = c_k(-t)^{1/2}J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q) + d_k(-t)^{1/2}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q) -$$
$$-\frac{Q(q)}{q}(-t)^{1/2}\int_{-\alpha}^{t}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)(J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q) -$$
$$-J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau, t < 0, \tag{2.8}$$

где $Q(q) = \pi/(2\sin(\pi/2q))$.

В представлении (2.8) использованы известные формулы для цилиндрических функций [3]

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \ \frac{d}{dz}(z^\nu J_{-\nu}(z)) = -z^\nu J_{1-\nu}(z),$$

$$J_\nu(z)\frac{d}{dz}(J_{-\nu}(z)) - \frac{d}{dz}(J_\nu(z))J_{-\nu}(z) = -2\frac{\sin\nu z}{\pi z},$$

$$J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z)+J_{-\nu}(z)\ J_{\nu-1}(z)=2\frac{\sin\nu z}{\pi z}. \tag{2.9}$$

Исходя из приведенных формул дифференцирования, вычислим

$$\frac{dy_k(t)}{dt}=p_kq(-t)^{q-1/2}[-\ c_kJ_{1/2q-1}(p_k(-t)^q)+d_kJ_{1-1/2q}(p_k(-t)^q)]+$$

$$+Q(q)p_k(-t)^{q-1/2}\int_{-\alpha}^{t}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)(J_{(2q)^{-1}-1}(p_k(-t)^q)\ J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)+$$

$$+J_{1-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau, t<0.$$

Для функций Бесселя верно асимптотическое представление

$$J_\nu(z)\sim\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\ (\frac{z}{2})^\nu, z\to 0.$$

Тогда условия сопряжения и начальные условия приводят к системе уравнений для определения постоянных

$$a_k=\frac{d_k}{\Gamma(1-1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}+\frac{Q(q)}{q}\int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma(1-1/2q)}(\frac{p_k}{2})^{-1/2q}\ J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau,$$

$$u_k(0)=\frac{-2qc_k}{\Gamma(1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{1/2q}+\frac{2Q(q)}{\Gamma(1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{1/2q}\int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)\times$$

$$\times J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau,$$

$$\varphi_k=c_k\ (\alpha)^{1/2}J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)+d_k\ (\alpha)^{1/2}J_{-(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q). \tag{2.10}$$

Предположим, что

$$\delta_k(\alpha)=J_{-(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)\neq 0. \tag{2.11}$$

Тогда

$$c_k=\frac{Q(q)}{q}\int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau-\frac{\Gamma(1/2q)}{2q}(\frac{p_k}{2})^{-1/2q}\ u_k(0),$$

$$d_k=\frac{\varphi_k}{(\alpha)^{1/2}\delta_k(\alpha)}-\frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)}(\frac{Q(q)}{q}\ \int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)\ \times$$

$$\times J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)d\tau-\ \frac{\Gamma(1/2q)}{2q}(\frac{p_k}{2})^{-1/2q}u_k(0)),$$

$$a_k=\frac{1}{\Gamma(1-1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}(\frac{\varphi_k}{(\alpha)^{1/2}\ \delta_k(\alpha)}-\frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)}(\frac{Q(q)}{q}\ \times$$

$$\times\int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}v_k(\tau)\ J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)d\tau-\ \frac{\Gamma(1/2q)}{2q}(\frac{p_k}{2})^{-1/2q}u_k(0)))+$$

$$+\frac{Q(q)}{q}\int_{-\alpha}^{0}(-\tau)^{1/2}\ v_k(\tau)\frac{1}{\Gamma(1-1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))d\tau.$$

Таким образом, формулы (2.6) и (2.8) принимают окончательный вид относительно начального условия и управления

$$y_k(t)=\Phi_{k,+}(t)\varphi_k+\int_{-\alpha}^{0}V_{k,+}(t,\tau)v_k(\tau)d\tau+$$

$$+U_{k,+}(t)u_k(0)+\int_{0}^{t}\mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)u_k(\tau)d\tau, t>0;$$

$$y_k(t)=\Phi_{k,-}(t)\varphi_k+\int_{-\alpha}^{0}V_{k,-}(t,\tau)v_k(\tau)d\tau+$$

$$+U_{k,-}(t)u_k(0)+\int_{-\alpha}^{t}\mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)v_k(\tau)d\tau, t<0, \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_{k,+}(t)=\frac{\exp(-\mu_k^2t^{n+1}/(n+1))}{\Gamma(1-1/2q)(\alpha)^{1/2}\delta_k(\alpha)}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q},$$

$$V_{k,+}(t,\tau)=\frac{\exp(-\mu_k^2t^{n+1}/(n+1))}{\Gamma(1-1/2q)}(\frac{p_k}{2})^{-1/2q}\ \frac{Q(q)}{q}(-\tau)^{1/2}\times$$

$$\times(J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q))-\frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)),$$

$$U_{k,+}(t)=\frac{\Gamma(1/2q)\exp(-\mu_k^2t^{n+1}/(n+1))}{2q\Gamma(1-1/2q)}(\frac{p_k}{2})^{-1/q}\ \frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)},$$

$$\mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)=\exp(-\mu_k^2\frac{t^{n+1}-\tau^{n+1}}{n+1}), t>0, \tau<0,$$

$$\Phi_{k,-}(t)=\frac{(-t)^{1/2}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)}{(\alpha)^{1/2}\delta_k(\alpha)},$$

$$V_{k,-}(t,\tau)=\frac{Q(q)}{q}(-t)^{1/2}(-\tau)^{1/2}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)(J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)\ -$$

$$-\frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)}\ J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)),$$

$$U_{k,-}(t)=-\frac{\Gamma(1/2q)}{2q}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}(-t)^{1/2}(J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)-$$

$$-\frac{J_{(2q)^{-1}}(p_k\alpha^q)}{\delta_k(\alpha)}J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)),$$

$$\mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)=-\frac{Q(q)}{q}(-t)^{1/2}\ (-\tau)^{1/2}(J_{(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)-$$

$$-J_{-(2q)^{-1}}(p_k(-t)^q)J_{(2q)^{-1}}(p_k(-\tau)^q)), t,\tau<0.$$

Имеет место

Лемма 2.1 (см. [1]). *Пусть выполнено одно из условий: 1) $\alpha_q = \alpha^q/q$ — любое натуральное число; 2) $\alpha_q = c/d$, где c и d, $4q$ и d — взаимно простые натуральные числа. Тогда при достаточно больших k существует такое положительное число C_0, вообще говоря, зависящее от α, что выполняется неравенство*

$$k^{1/2}|\delta_k(\alpha)| \geq C_0 > 0 \bullet \tag{2.13}$$

Далее найдем условия на функции $\varphi(x)$ и $\hat{u}(x,t)$, которые обеспечивают существование единственного решения исходной задачи.

Получим оценки для коэффициентов представления (2.12) и их производных по времени при достаточно больших k, используя неравенство (2.13), асимптотическую формулу из [3]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}) + O(z^{-3/2}), z \to \infty$$

и формулы

$$\frac{d}{dt}((-t)^{1/2}J_{1/2q}(z)) = -p_k q(-t)^{q-1/2}J_{-(1-1/2q)}(z),$$

$$(-t)^{1/2}J_{1/2q}(z) \sim (\frac{p_k}{2})^{1/2q}\ \frac{(-t)}{\Gamma(1+1/2q)}, t \to 0,$$

$$\frac{d}{dt}((-t)^{1/2}J_{1/2q}(z)) \sim -\frac{2q}{\Gamma(1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{1/2q}, t \to 0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2}((-t)^{1/2}J_{1/2q}(z)) = -p_k^2 q^2\ (-t)^{2q-3/2}J_{1/2q}(z),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}((-t)^{1/2}J_{1/2q}(z)) \sim -\ \frac{p_k^2 q^2(-t)^{2q-1}}{\Gamma(1+1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{1/2q}, t \to 0;$$

$$\frac{d}{dt}((-t)^{1/2}J_{-1/2q}(z)) =\ p_k q(-t)^{q-1/2}J_{1-1/2q}(z),$$

$$(-t)^{1/2}J_{-1/2q}(z) \sim (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}\ \frac{1}{\Gamma(1-1/2q)}, t \to 0,$$

$$\frac{d}{dt}((-t)^{1/2}J_{-1/2q}(z)) \sim\ (\frac{p_k}{2})^{2-1/2q}\frac{2q(-t)^{2q-1}}{\Gamma(2-1/2q)}, t \to 0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2}((-t)^{1/2}J_{-1/2q}(z)) = -p_k^2 q^2\ (-t)^{2q-3/2}J_{-1/2q}(z),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}((-t)^{1/2}J_{-1/2q}(z)) \sim -\ \frac{p_k^2 q^2(-t)^{2q-1}}{\Gamma(1-1/2q)}\ (\frac{p_k}{2})^{-1/2q}, t \to 0.$$

Искомые оценки будут иметь вид

$$|\Phi_{k,+}(t)|, |\Phi_{k,-}(t)| < Ck^{\frac{m}{2(m+2)}},$$

$$
\begin{gathered}
|U_{k,+}(t)|, |V_{k,+}(t,\tau)|, |V_{k,-}(t,\tau)|, |U_{k,-}(t)|,\ |\mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)| < Ck^{-\frac{2}{m+2}},\\
|\mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)| \le 1;\\
|\frac{d\Phi_{k,+}(t)}{dt}| < Ck^{2+\frac{1}{m+2}},\\
|\frac{\partial V_{k,+}(t,\tau)}{\partial t}|, |\frac{dU_{k,+}(t)}{dt}|\ < Ck^{2-\frac{m}{m+2}},\\
|\frac{\partial \mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)}{\partial t}| < Ck^2,\\
|\frac{d\Phi_{k,-}(t)}{dt}| < Ck,\ |\frac{\partial V_{k,-}(t,\tau)}{\partial t}|, |\frac{dU_{k,-}(t)}{dt}| <\ Ck^{\frac{m}{2(m+2)}},\\
|\frac{\partial \mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)}{\partial t}| < Ck;\\
|\frac{d^2\Phi_{k,-}(t)}{dt^2}| < Ck^{3/2}, |\frac{\partial^2 V_{k,-}(t,\tau)}{\partial t^2}|, |\frac{d^2U_{k,-}(t)}{dt^2}| < C\ k^{\frac{3m+4}{2(m+2)}},\\
|\frac{\partial^2 \mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)}{\partial t^2}| < Ck^{\frac{3m+4}{2(m+2)}}.
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Имеет место

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1 и* $v_i(t) \in C(-\alpha,0), u_i(t) \in C(0,T), i \ge 0$. *Тогда при достаточно больших* k *для коэффициентов разложения (2.4) и их производных по времени справедливы оценки*

$$
\begin{gathered}
|y_k(t)| < C(k^{\frac{1}{2}}|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)| +\ ||u_k||_{C(0,T)}),\\
|\frac{dy_k(t)}{dt}| < C(k^{\frac{5}{2}}|\varphi_k| +\ k^2(||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)| + ||u_k||_{C(0,T)})), t > 0;\\
|y_k(t)| < C(|\varphi_k|k^{\frac{1}{2}} +\ ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|),\\
|\frac{dy_k(t)}{dt}| < C(k(|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)}) +\ |u_k(0)|k^{\frac{1}{2}}),\\
|\frac{d^2y_k(t)}{dt^2}| < Ck^{3/2}(|\varphi_k| +\ ||v_k||_{C(-\alpha,0)} +\ |u_k(0)|), t < 0.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Найдем оценки для представления (2.12) и его производных по времени, учитывая неравенства (2.14).

$$
\begin{gathered}
|y_k(t)| \le \max_{t\ge 0}|\Phi_{k,+}(t)|\ |\varphi_k| + \alpha \max_{t\ge 0,\tau\le 0}|V_{k,+}(t,\tau)|||v_k||_{C(-\alpha,0)}+\\
+\max_{t\ge 0}|U_{k,+}(t)||u_k(0)| + T\ \max_{t,\tau\ge 0}|\mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)|\ ||u_k||_{C(0,T)} <\\
< C(k^{\frac{m}{2(m+2)}}|\varphi_k| + k^{-\frac{2}{m+2}}(\alpha||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|)) + T||u_k||_{C(0,T)} <\\
< C(k^{\frac{1}{2}}|\varphi_k| +\ ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|)) +\ ||u_k||_{C(0,T)}),
\end{gathered}
$$

$$|\frac{dy_k(t)}{dt}| \le \max_{t\ge 0}|\frac{d\Phi_{k,+}(t)}{dt}||\varphi_k| + \alpha \max_{t\ge 0,\tau\le 0}|\frac{\partial V_{k,+}(t,\tau)}{\partial t}|||v_k||_{C(-\alpha,0)}+$$

$$+\max_{t\ge 0}|\frac{dU_{k,+}(t)}{dt}|\ |u_k(0)| + (T\max_{t,\tau\ge 0}|\frac{\partial \mathcal{U}_{k,+}(t,\tau)}{\partial t}|+1)||u_k||_{C(0,T)} \ <$$

$$< C(k^{2+\frac{1}{m+2}}|\varphi_k| +\ (||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|)k^{2-\frac{m}{m+2}} + ||u_k||_{C(0,T)}k^2) <$$

$$< C(k^{\frac{5}{2}}|\varphi_k| +\ k^2(||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)| + ||u_k||_{C(0,T)}));$$

$$|y_k(t)| \le \max_{t\le 0}|\Phi_{k,-}(t)|\ |\varphi_k| + \alpha(\max_{t,\tau\le 0}\ |V_{k,-}(t,\tau)| + \max_{t,\tau\le 0}|\mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)|)\times$$

$$\times||v_k||_{C(-\alpha,0)} + \max_{t\le\ 0}|U_{k,-}(t)||u_k(0)| <$$

$$< C(|\varphi_k|k^{\frac{m}{2(m+2)}} +\ (||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|)k^{-\frac{2}{m+2}}) <$$

$$< C(|\varphi_k|k^{\frac{1}{2}} +\ ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|),$$

$$|\frac{dy_k(t)}{dt}| \le \max_{t\le 0}|\frac{d\Phi_{k,-}(t)}{dt}||\varphi_k| + \alpha(\max_{t,\tau\le 0}|\frac{\partial V_{k,-}(t,\tau)}{\partial t}|+$$

$$+\max_{t,\tau\le 0}|\frac{\partial \mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)}{\partial t}|)||v_k||_{C(-\alpha,0)} +\ \max_{t\le 0}|\frac{dU_{k,-}(t)}{dt}||u_k(0)| <$$

$$< C(k(|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)}) +\ |u_k(0)|k^{\frac{m}{2(m+2)}}) <$$

$$< C(k(|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)}) +\ |u_k(0)|k^{\frac{1}{2}}),$$

$$|\frac{d^2y_k(t)}{dt^2}| \le \max_{t\le\ 0}|\frac{d^2\Phi_{k,-}(t)}{dt^2}||\varphi_k| +\ (\alpha(\max_{t,\tau\le 0}|\frac{\partial^2 V_{k,-}(t,\tau)}{\partial t^2}|+$$

$$+\max_{t,\tau\le 0}|\frac{\partial^2 \mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)}{\partial t^2}|) + \max_{t,\tau\le 0}|\frac{\partial \mathcal{V}_{k,-}(t,\tau)}{\partial t}|_{\tau=t}|)||v_k||_{C(-\alpha,0)}+$$

$$+\max_{t\le 0}|\frac{d^2U_{k,-}(t)}{dt^2}|\ |u_k(0)| < C(k^{3/2}|\varphi_k| +\ (||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|)k^{\frac{3m+4}{2(m+2)}}) <$$

$$< Ck^{3/2}(|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|).$$

□

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.2 и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^{\frac{5}{2}}|\varphi_k| +\ k^2(||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|+$$

$$+||u_k||_{C(0,T)})).$$

Тогда задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение и оно определяется рядом (2.4).

Доказательство. Так как $X_i(x) \leq \sqrt{2}, i \geq 1, x \in [0,1]$, то из (2.4) и неравенств леммы 2.2 получим оценки

$$|y(x,t)| < C\sum_{k=1}^{\infty}(k^{\frac{1}{2}}\ |\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)| + \ ||u_k||_{C(0,T)}),$$

$$|\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}| < C\sum_{k=1}^{\infty}(k^{\frac{5}{2}}|\varphi_k| +\ k^2(||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)| +$$

$$+||u_k||_{C(0,T)})), t \in [-\alpha, T];$$

$$|y_{tt}(x,t)| < C\sum_{k=1}^{\infty}k^{3/2}(|\varphi_k| + ||v_k||_{C(-\alpha,0)} + |u_k(0)|), t < 0;$$

$$|y_{xx}(x,t)| < C\sum_{k=1}^{\infty}(k^{\frac{5}{2}}\ |\varphi_k| + k^2(||v_k||_{C(-\alpha,0)} +\ |u_k(0)| +$$

$$+||u_k||_{C(0,T)})), t \in (-\alpha, T).$$

□

Из того, что $y_t(x,0+) - u(x,0+) \equiv y_{tt}(x,0-) - v(x,0-) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$, следует, что функция $y(x,t)$, определяемая рядом (2.4), всюду в D удовлетворяет уравнению (2.1). Таким образом, как и в случае однородного уравнения (2.1) [1], линия вырождения $t = 0$ здесь также является устранимой особой точкой.

3. Оптимальное управление с полуопределенным критерием качества.

Вместо уравнения (2.1) рассмотрим уравнение

$$Ly(x,t) = g(x)\hat{u}(t), \tag{3.1}$$

где $g(x)$ — фиксированная функция, $\hat{u}(t) = v(t),\ t \in [-\alpha, 0);\ \hat{u}(t) = u(t), t \in [0,T]$.
Пусть управляемый процесс $y(x,t)$ описывается краевой задачей (2.1)–(2.3). Требуется найти управления $v^*(t) \in C[-\alpha,0) :\ |v^*(t)| \leq 1; |u^*(0)| \leq l_0; \xi^*(t) \in L_2[0,T] : |\xi^*(t)|\ \leq l_1$ п. в. на $[0,T]$, которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u}) = 0.5((\int_0^1 q(x)(y(x,T) - \psi(x))dx)^2 +$$

$$+\gamma(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)\ dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)dt)), \tag{3.2}$$

где $\psi(x)$ — фиксированная функция, $\gamma, l_0, l_1 = const\ > 0$,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \xi(\tau)d\tau.$$

Критерий качества (3.2) относится к классу полуопределенных функционалов: он может быть равен нулю необязательно, когда $\hat{u}(t) = 0, y(x,T) = \psi(x)$.

Сформулированная задача оптимального управления может быть формально сведена к одномерной задаче. С этой целью запишем разложение функций $q(x), \psi(x)$ по базису $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда функционал (3.2) примет вид

$$I(\hat{u}) = 0.5((\sum_{i=1}^{\infty} q_i\ (y_i(T) - \psi_i))^2 + \gamma(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)dt)) =$$

$$= 0.5[(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(t)v(t)dt + \int_0^T (\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)\xi(t)dt + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(t)\ dt)u(0)+$$

$$+\mathcal{C})^2 + \gamma(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)dt + \int_0^T \xi^2(t)dt + u^2(0))], \tag{3.3}$$

где

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k g_k\ V_{k,+}(T,t), \mathcal{B}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k g_k \mathcal{U}_{k,+}(T,t),$$

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\varphi_k\ \Phi_{k,+}(T) - \psi_k), \mathcal{M} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k g_k\ U_{k,+}(T). \tag{3.4}$$

Предположим, что ряды, изображающие функции $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$, сходятся равномерно, а ряды, изображающие числа $\mathcal{C},\ \mathcal{M}$ — сходятся.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (2.1)–(2.3), (3.3) имеют вид

$$\int_{-\alpha}^0 [\mathcal{A}(t)(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_0^T (\int_\tau^T \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)+$$

$$+\mathcal{C}) + \gamma v^*(t)][v(t) - v^*(t)]dt \geq 0 \forall |v(t)| \leq 1,$$

$$[(\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_0^T (\int_\tau^T \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (\mathcal{M}+$$

$$+\int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0) +\ \mathcal{C}) + \gamma u^*(0)][u(0) - u^*(0)] \geq\ 0 \forall |u(0)| \leq l_0,$$

$$\int_0^T [\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_0^T (\int_\tau^T \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau) \times$$

$$\times u^*(0) + \mathcal{C}) + \gamma\ \xi^*(t)][\xi(t) - \xi^*(t)]dt \geq 0 \forall\ |\xi(t)| \leq l_1. \tag{3.5}$$

Система вариационных неравенств (3.5) эквивалентна таким локальным условиям [4]

$$v^*(t) = -1, \mathcal{A}(t)(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\varsigma}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma +$$

$$+\mathcal{C} + (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)) - \gamma > 0,$$

$$t \in [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha,\ 0), i = \overline{1, V_1}, \tag{3.6}$$

$$|v^*(t)| < 1, v^*(t) = -\frac{\mathcal{A}(t)}{\gamma}(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)\ v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\varsigma}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma +$$

$$+\mathcal{C} + (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)), t \in\ [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), i = \overline{V_1 + 1, V_2}, \tag{3.7}$$

$$v^*(t) = 1, \mathcal{A}(t)(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\varsigma}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma + \mathcal{C} +$$

$$+(\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ u^*(0)) + \gamma < 0, t \in [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), i = \ \overline{V_2 + 1, V_3},$$

$$\cup_{i=1}^{V_3} [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i] = [-\alpha, 0); \tag{3.8}$$

$$u^*(0) = -l_0, (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\tau}^{T} \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau -$$

$$-(\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau l_0 +\ \mathcal{C}) - \gamma l_0 > 0, \tag{3.9}$$

$$|u^*(0)| < l_0, u^*(0) = -\frac{1}{\gamma}\ (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ (\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{T} (\int_{\tau}^{T} \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + \mathcal{C} + (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)), \tag{3.10}$$

$$u^*(0) = l_0, (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\tau}^{T} \mathcal{B}(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau +$$

$$+(\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ l_0 + \mathcal{C}) + \gamma l_0 < 0; \tag{3.11}$$

$$\xi^*(t) = -l_1, \int_{t}^{T} \mathcal{B}(\tau)\ d\tau(\int_{-\alpha}^{0} \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} (\int_{\varsigma}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma +$$

$$+\mathcal{C} + (\mathcal{M} + \int_{0}^{T} \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)) - \gamma l_1 > 0,$$

$$t \in [\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i] \subset (0, T], i = \overline{1, U_1}, \tag{3.12}$$

$$|\xi^*(t)| < l_1, \xi^*(t) = -\frac{\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau}{\gamma}(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_0^T(\int_\varsigma^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma +$$

$$+\mathcal{C} + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)u^*(0)), t \in\ [\underline{\zeta}_i, \overline{\zeta}_i] \subset (0,\ T],\ i = \overline{U_1+1, U_2}, \quad (3.13)$$

$$\xi^*(t) = l_1, \int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau(\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)\ d\tau + \int_0^T(\int_\varsigma^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma + \mathcal{C}+$$

$$+(\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)\ u^*(0)) + \gamma l_1 < 0, t \in\ [\underline{\zeta}_i, \overline{\zeta}_i] \subset (0,\ T], i = \overline{U_2+1, U_3},$$

$$\cup_{i=1}^{U_3}[\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i] = (0, T]. \quad (3.14)$$

Рассмотрим случай, когда $|v^*(t)| < 1, |u^*(0)| < l_0, |\xi^*(t)| < l_1$. Тогда из (3.6)–(3.14) находим

$$v^*(t) = -\frac{\mathcal{A}(t)\tilde{\mathcal{C}}}{\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2}, t \in [-\alpha, 0);$$

$$u^*(0) = -\frac{(\mathcal{M} + \int_0^T\ \mathcal{B}(\tau)d\tau)\tilde{\mathcal{C}}}{\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2};$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau\tilde{\mathcal{C}}}{\gamma + (\mathcal{M} +\ \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2}, t \in\ (0, T], \quad (3.15)$$

где $\tilde{\mathcal{C}} = C_1 + C_2 + \mathcal{C}$, а числа $C_1 = \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}(\tau)v^*(\tau)d\tau,\ C_2 = \int_0^T(\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)\xi^*(\tau)d\tau$ определяются из системы уравнений

$$(\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 + \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(t)\ dt)C_1 + \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(t)dtC_2 = -\mathcal{C}\int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(t)dt,$$

$$\int_0^T(\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 dtC_1 + (\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 + \int_0^T(\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau)C_2 =$$

$$= -\mathcal{C}\int_0^T(\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau. \quad (3.16)$$

Система уравнений (3.16) однозначно разрешима, так как имеет отличный от нуля определитель.

Тогда формулы (3.15) примут окончательный вид

$$v^*(t) = -\frac{\mathcal{A}(t)\mathcal{C}}{\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 +\ \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(\tau)d\tau + \int_0^T(\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau},$$

$$t \in [-\alpha, 0);$$

$$u^*(0) = -\frac{(\mathcal{M} + \int_0^T\ \mathcal{B}(\tau)d\tau)\mathcal{C}}{\gamma + (\mathcal{M} +\ \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 + \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(\tau)d\tau + \int_0^T(\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau};$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T \mathcal{B}(\tau)d\tau\mathcal{C}}{\gamma + (\mathcal{M} + \int_0^T \mathcal{B}(\tau)d\tau)^2 + \int_{-\alpha}^0 \mathcal{A}^2(\tau)d\tau + \int_0^T (\int_\tau^T \mathcal{B}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau},$$
$$t \in (0, T]. \tag{3.17}$$

В силу оценок (2.14) ряды (3.4) будут равномерно сходиться, если будут сходиться числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q_k||g_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |q_k|(|\varphi_k|k^{\frac{1}{2}} + |\psi_k|). \tag{3.18}$$

Сходимость рядов (3.18) вместе с оценкой из теоремы 1 обеспечивают как непрерывность управлений, так и существование единственного решения исходной краевой задачи.

В заключение отметим, что в случае, когда в исходной краевой задаче $b = m = n = 0$, а сама краевая задача нелокальна, задачи оптимального управления различной природы исследованы в работах [5, 6].

Библиографические ссылки

1. *Сабитов К. Б.* Начально-краевая задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии/ К. Б. Сабитов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 10. — С. 1474–1481.
2. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
3. *Грей Э.* Функции Бесселя и их приложения к механике и физике/ Э. Грей, Г. Б. Метьюз. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 386 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных/ Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 412 с.
5. *Kapustyan V. O.* Distributed Control With The General Quadratic Criterion In A Special Norm For Systems Described By Parabolic-Hyperbolic Equations With Nonlocal Boundary Conditions / V. O. Kapustyan, I. O. Pyshnograiev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51, No. 3. — P. 438–447.
6. *Капустян В. Е.* Задача оптимального управления с полуопределенным критерием качества для параболо–гиперболических уравнений с нелокальными точечными краевыми условиями / В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев // Український математичний журнал. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1068–1081.

Надійшла до редколегії 10.05.2016