

УДК 539.3

В. Л. Волошко, Л. В. Волошко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗВОРОТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ  
З ГІДРОСТАТИЧНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Отримано алгоритм розв'язку крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами, поставлена зворотна коефіцієнтна задача.

*Ключові слова:* крайова задача, бігармонічне рівняння, зворотна задача.

Получен алгоритм решения граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения с неоднородными граничными условиями, поставлена обратная коэффициентная задача.

*Ключевые слова:* краевая задача, бигармоническое уравнение, обратная задача.

Solution algorithm of boundary problem for inhomogeneous biharmonic equation with inhomogeneous boundary conditions was obtained. Inverse coefficient problem was formulated.

*Keywords:* boundary value problem, bigarmonichnoe equation, inverse problem.

У машинобудуванні пластини складної форми часто використовуються як силові елементи конструкцій, у тому числі і при проектуванні виборів у галузі ракетно-космічної техніки. На відміну від добре відомих, точних розрахунків основних параметрів для випадків, коли пластина має канонічну форму, далі наводиться наближений метод розв'язання крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для пластин складної форми [3], а також ставиться зворотна задача, результатом розв'язання якої буде відновлений закон гідростатичного навантаження на пластину, відповідний до заданого прогину в деякій точці.

**Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з однорідними крайовими умовами. Фізичний приклад.** Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини:

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q}{D}; \quad (1)$$

$$w(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де  $w = w(x, y)$  – невідома функція згину серединної точки  $(x, y)$  пластини,  $\Gamma$  – контур пластини, який обмежує її область  $\Omega$ ;  $q / D = \text{const}$ , де  $q$  – інтенсивність поперечного навантаження;  $D$  – циліндрична жорсткість пластини. Крайові умови (2) означають, що пластина має жорстко закріплені краї. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що розв'язком рівняння (1) буде

$$w_1(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{D}. \quad (3)$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами:

$$\Delta \Delta w_2(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y)|_{\bar{\Gamma}} &= -w_1(x, y), \\ \frac{\partial w_2(x, y)}{\partial n} \Big|_{\bar{\Gamma}} &= -\frac{\partial w_1(x, y)}{\partial n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тобто при формуванні крайових умов (5) ми фактично обчислюємо на контурі  $\Gamma$  відому функцію  $w_1(x, y)$  та її нормальну похідну. В [4, 6] викладений алгоритм розв'язування задачі (4) – (5), відповідно до якого розв'язок задачі (1) – (2) маємо у вигляді суми бігармонічних потенціалів з відомими функціями щільності  $\mu_1, \mu_2$ :

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

або

$$w(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{64D} + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ , а  $(x, y)$  – внутрішня точка області  $\Omega$ .

**Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами.**

$$\Delta \Delta w(x, y) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$w|_{\Gamma} = \phi, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \psi, \quad (7)$$

де  $w = w(x, y)$  – невідома функція;  $f, \phi, \psi$  – задані неперервні функції;  $\Gamma$  – контур, який обмежує область  $\Omega$  [9, 10].

За теоремою Гілберта [7] розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (8)$$

тобто  $w_1(x, y)$  знайдена через подвійний інтеграл задовольняє рівняння (6), але не задовольняє крайовим умовам (7). Отже,  $\Delta w_1(x, y) = f(x, y)$ .

Для того щоб задовольнити крайові умовам, формулюємо таку задачу:

$$\Delta \Delta w_2(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (9)$$

$$w_2|_{\Gamma} = (\phi - w_1)|_{\Gamma}, \quad \left. \frac{dw_2}{dn} \right|_{\Gamma} = \left( \psi - \left. \frac{\partial w_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} \right) \quad (10)$$

де при формуванні крайових умов (10) треба знайти різницю значень функцій  $\phi, \psi$  та  $w_1(x, y)$  і її нормальної похідної на границі  $\Gamma$  відповідно. Для знаходження функції  $w_1(x, y)$  та її нормальної похідної треба обчислити відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур  $\Gamma$ . Цю область покриваємо прямокутною сіткою. Алгоритм розв'язку задачі (9) – (10) є відомим [4, 6]. А остаточно розв'язком задачі (6) – (7) буде

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

або

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ , а  $(x, y)$  – тепер внутрішня точка області  $\Omega$ .

Наведемо приклади модельних функцій та різних форм областей  $\Omega$ , які ілюструють ефективність методу. Для перевірки достовірності розв'язку обираємо деяку модельну функцію  $g(x, y)$ . Подіявши на цю функцію бігармонічним оператором, отримаємо  $f(x, y)$ , тобто  $\Delta \Delta g(x, y) = f(x, y)$ . Знайшовши значення  $g(x, y)$  та її нормальної похідної в точках контуру, визначимо крайові умови  $\phi(x, y), \psi(x, y)$ .

Таким чином, в силу єдності розв'язку значення функції  $g(x, y)$  мають співпадати з розв'язком  $w(x, y)$ .

Приклад 1. Нехай  $g(x, y) = x^2 y^4 / 24$  – розв'язок задачі. Тоді задамо  $f \equiv x^2 + y^2$ ,  $\phi = x^2 y^4 / 24$ ,  $\psi = xy^4 \cos(n \wedge x) / 12 + x^2 y^3 \cos(n \wedge y) / 6$  (табл. 1, 2)

Таблиця 1

Розрахунки для круга  $R = 1$ 

$(x, y)$	$w$ (наближ.)	$w$ (точно)	Похибка
(0; 0)	10.0018418157863	10	0.00184181578633166
(0.5; 0)	10.0023577678158	10	0.00235776781577316
(1; 0)	10.0023420073195	10	0.00234200731949862
(0.5; 0.2)	10.0023804755297	10.00001666667	0.00236380886302593
(0.5; 0.5)	10.003086435405	10.00065104167	0.00243539373831829

Відносна похибка складає 0,02%.

Таблиця 2

Розрахунки для гіпоциклоїди з параметрами  $R = 1$ ,  $r = 0,6$ ,  $d = 0,2$ 

$(x, y)$	$w$ (наближ.)	$w$ (точно)	Похибка
(0.7; 0)	10.0025808669092	10	0.00258086690924
(0.2; 0.1)	10.0256153087343	10.00000016667	0.025615142067629
(0.2; 0.2)	9.98646793295155	10.00000266667	0.0135347337151204
(0.9; 0.2)	10.0021824916037	10.000054	0.0021284916037112
(0.2; 0.4)	9.98411833637235	10.00004266667	0.0159243302943204

Відносна похибка – 0,2%.

Приклад 2. Нехай  $g(x, y) = x^6 + y^4$  – розв'язок задачі. Тоді задамо  $f \equiv 360x^2 + 24$ ,  $\phi = x^6 + y^4$ ,  $\psi = 6x^5 \cos(n \wedge x) + 4y^3 \cos(n \wedge y)$ .

Таблиця 3

Розрахунки для овала Кассіні з параметрами  $a = 1.2$ ,  $c = 1$ 

$(x, y)$	$w$ (наближ.)	$w$ (точно)	Похибка
(0.5; 0)	0.0129460619158047	0.015625	0.0026789380841953
(0.6; 0)	0.0460700206181231	0.046656	0.00058597938187685
(1; 0)	1.02286159042394	0.9999999999999	0.0228615904239402
(0.7; 0.1)	0.1202921098427	0.117749	0.00254310984269993
(0.8; 0.2)	0.27020047563952	0.263744	0.00645647563952013

Відносна похибка складає 0,2%.

Таблиця 4

Розрахунки для квадрата зі стороною  $a = 1$ 

$(x, y)$	$w$ (наближ.)	$w$ (точно)	Похибка
(0.4; 0)	0.00418667686340228	0.004096	9.0676863402275E-5
(0; 0.1)	0.00018716977871587	0.0001	8.7169778715870E-5
(0.4; 0.2)	0.00582799418739863	0.005696	0.0001319941873986
(0.2; 0.3)	0.00827458441532622	0.008164	0.0001105844153262
(0.5; 0.3)	0.0223038744442569	0.023725	0.00142112555574313

Відносна похибка – 0,01%.

Аналіз одержаних даних свідчить про обчислювальну ефективність алгоритму розв'язку задачі, тому він може бути основою для розв'язування складних за-

дач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів та дослідження їх збіжності.

Як приклад розглянемо задачу статичного згину жорстко закріпленої по краям тонкої пружної пластини в лінійній постановці:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (12)$$

$$w(x, y)|_G = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \Big|_G = 0 \quad (13)$$

з додатковою умовою

$$w(x^*, y^*) = w^*. \quad (14)$$

Вважаємо, що  $q(x, y)$  змінюється за лінійним законом, тобто  $q(x, y) = ax + by + c$ , або, іншими словами, маємо гідростатичне навантаження на пластину. При цьому  $b, c$  – задані коефіцієнти, а  $a$  – коефіцієнт, який необхідно визначити (відновити). Таким чином, отримали зворотну коефіцієнтну задачу [2, 11] по ідентифікації правої частини рівняння (12). Вона має такий фізичний зміст: за заданим в додатковій умові (14) прогином в точці  $(x^*, y^*)$ , частково відтворимо закон (знаходимо лише коефіцієнт  $a$ ) гідростатичного навантаження пластини.

Для цього використовуємо метод ділення навпіл. Будемо позначати  $w(x^*, y^*; a)$  розв'язок задачі (12) – (13) для параметра  $a$ . Знайдемо проміжок, якому належить шукане  $a$ . Для цього обираємо  $\xi_1$  і  $\eta_1$  такі, що  $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$  (рис. 1), тобто  $a \in [\xi_1, \eta_1]$ .

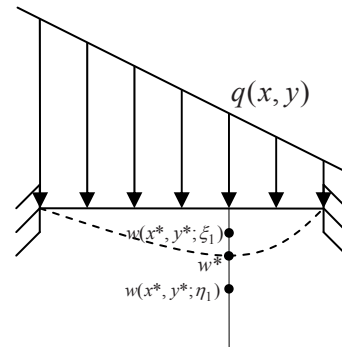


Рис. 1

Розбиваємо відрізок навпіл точкою  $a_1 = \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}$ .

З двох відрізків  $[\xi_1, a_1]$  та  $[a_1, \eta_1]$  обираємо той, для якого виконується одна з нерівностей  $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; a_1)$  або  $w(x^*, y^*; a_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$ , і позначаємо його  $[\xi_2, \eta_2]$ . Далі

$$a_2 = \frac{\xi_2 + \eta_2}{2}, \dots, a_k = \frac{\xi_k + \eta_k}{2},$$

використавши умову закінчення ітераційного процесу

$$|w(x^*, y^*; a_k) - w^*| < \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – задана точність. Очевидно, що  $a \in [\xi_i, \eta_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , і за лемою про вкладені відрізки числові послідовності збігаються до шуканого  $a$ .

Модельна задача: для перевірки розв'язуємо пряму задачу (12) – (13) для відомого коефіцієнта  $a$  знаходимо  $w(x^*, y^*) = w^*$ . Потім, використавши цю додаткову умову, за допомогою викладеного алгоритму розв'язуємо задачу (12) – (14). Знайдене  $a$  повинно співпадати з наперед заданим.

У зв'язку з високою точністю розв'язування лінійної задачі, а також ефективністю і обґрунтованістю застосування методу ділення навпіл, припускаємо, що отримаємо вірний і достатньо точний розв'язок поставленої задачі.

### Бібліографічні посилання

1. Influence Functions and Matrices / Melnikov Yu. A. // New York-Basel: Marcel Dekker, 1999.
2. Денисов А. М. Введення в теорію зворотних задач / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
3. Волошко В.Л. Визначення основних параметрів згину пластини складної форми / В. Л. Волошко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-космічна техніка. – 2007. – Вип. 9. – № 9. – С. 8–17.
4. Волошко Л. В. Обчислювальна ефективність бігармонічного потенціалу / Л. В. Волошко, Л. С. Коряшкіна // Тези доповідей VII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)», 25 – 27 листопада 2009 року. – Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара. – С. 132–133.
5. Кисельова О. М. Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, додатки : монографія / О. М. Кисельова, Н. З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.
6. Кисельова О. М. Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми / О. М. Кисельова, В. Д. Ламзюк, Л. В. Волошко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Моделювання. – 2011. – Вип. 3, № 8. – С. 20–28.
7. Арсенін В. Я. Методи математичної фізики і спеціальні функції / В. Я. Арсенін. – М.: Наука, 1984. – 460 с.
8. Самуль В. І. Основи теорії пружності і пластичності / В. І. Самуль. – М.: Вища школа, 1970. – 287 с.
9. Боборикін В. Г. Про розв'язування задачі пружного згину пластини зі змішаними граничними умовами / В. Г. Боборикін // International applied mechanics. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 104–111.
10. Коряшкіна Л.С. Розв'язок однієї задачі керування параболічною системою / Л. С. Коряшкіна // Проблеми керування і інформатики, 1998. – С. 94–102.
11. Самарський А. А. Чисельні методи розв'язку зворотних задач математичної фізики / А. А. Самарський, П. Н. Вабищевич. – М.: ЛКИ, 2009. – 480 с.

*Надійшла до редколегії 01.12.2011.*

УДК 629.7

**А. В. Дегтярев, А. Э. Кашанов, Н. Г. Литвин, В. А. Шульга**

*Государственное предприятие «Конструкторское бюро “Южное”  
им. М.К. Янгеля»*

### СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ СЕМЕЙСТВА МОДУЛЬНЫХ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

У статті викладено принципи створення перспективного сімейства блочних (модульних) ракет-носіїв, розроблених ДП «КБ “Південне”». Вони створюються на основі накопиченого досвіду, перевірених технічних рішень та нових розробок. Показаний ряд блоків першого і другого ступенів ракет-носіїв і варіанти перспективних ракет-носіїв легкого, середнього і важкого класів.

**Ключові слова:** ракета-носій, ракетний двигун, космічний апарат, космічний ракетний комплекс.

© А. В. Дегтярев, А. Э. Кашанов, Н. Г. Литвин, В. А. Шульга, 2012