**УДК 681.518.54**

Н. А. Лысенко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ КОНТРОЛЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

**Розглянуто питання, пов'язані з побудовою вирішальних правил контролю за експериментальними вибірками вимірювань, які характеризують нормальний стан об'єкта. Для побудови емпіричних вирішальних правил контролю пропонується використовувати методи непараметричної статистики. Проведено дослідження ефективності розпізнавання й порівняльна оцінка емпіричних вирішальних правил, сформованих на основі непараметричних критеріїв омега-квадрат, Вілкоксона, ван дер Вардена та критерію знаків. У результаті чисельного моделювання отримано експериментальні графіки залежностей оцінок середніх ймовірностей виявлення бракованих об'єктів від величини відхилення браку від норми $\left(\overline{P}^{*}_{ОБ}(\Delta)\right)$, що дозволяють одержати кількісну оцінку ефективності досліджуваних емпіричних вирішальних правил неруйнівного контролю. Проведено порівняльну оцінку чотирьох емпіричних вирішальних правил, сформованих в умовах обмеженості апріорних даних, з оптимальним вирішальним правилом. У результаті порівняння зроблено висновки про ефективність розпізнавання.**

*Ключові слова:* емпіричне вирішальне правило, контроль, непараметрична статистика, ефективність розпізнавання.

**Рассмотрены вопросы, связанные с построением решающих правил контроля по экспериментальным выборкам измерений, характеризующих нормальное состояние объекта. Для построения эмпирических решающих правил контроля предлагается использовать методы непараметрической статистики. Проведено исследование эффективности распознавания и сравнительная оценка эмпирических решающих правил, сформированных на основе непараметрических критериев омега-квадрат, Вилкоксона, ван дер Вардена и критерия знаков. В результате численного моделирования получены экспериментальные графики зависимостей оценок средних вероятностей обнаружения брака от величины отклонения брака от нормы $\left(\overline{P}^{*}_{ОБ}(\Delta)\right)$, позволяющие получить количественную оценку распознающей способности исследуемых эмпирических решающих правил неразрушающего контроля. Проведена сравнительная оценка четырех эмпирических решающих правил, построенных в условиях ограниченности априорных данных, с оптимальным решающим правилом. В результате сравнения сделаны выводы об эффективности распознавания.**

*Ключевые слова:* эмпирическое решающее правило, контроль, непараметрическая статистика, эффективность распознавания.

**In the given article the problems linked with construction of solving rules of the control on experimental samples of measurements, characterising an object normal state are considered. For construction of empirical solving rules of the control it is offered to use methods of nonparametric statistics. Research of efficiency of a recognition and a comparative estimation of the empirical solving rules formed on the basis of nonparametric criteria an omega-square, Vilkoksona, the van der Waerden and a sign test is conducted. As a result of numerical simulation experimental plots of the average estimates of probability of detection of reject on the deviation from the norm of reject $\left(\overline{P}^{*}_{ОБ}(\Delta)\right)$ are received. Quantitative estimations of recognition ability of examined empirical solving rules of non-destructive testing are obtained. Also the comparative estimation optimum solving rule and four empirical decision rules, constructed in the conditions with limited prior data, is produced. As a result of comparison conclusions about efficiency of recognition are made.**

*Key words:* empirical solving rule, control, nonparametric statistics, efficiency of recognition.

**Введение.** Важным этапом любой технологии неразрушающего контроля является построение решающих правил контроля. В случае, когда в результате предварительных исследований получены выборки измерений информативных параметров, характеризующих нормальное и дефектное состояние объектов контроля, используется теория статистического распознавания [4]. Однако часто, на практике, эталонов брака не существует, и необходимо сравнивать объекты контроля только с одним эталоном – эталоном нормы. В связи с этим актуальной является задача формирования эффективных эмпирических решающих правил контроля в условиях ограниченной априорной информации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу проектирования информационно-измерительных технологий неразрушающего контроля в условиях недостатка исходных данных об объектах, находящихся в состоянии брака. В этом случае имеет место ограниченная априорная информация. Если информативные параметры объектов контроля по своей физической природе являются случайными величинами с неизвестными законами распределения вероятностей, то формирование решающих правил контроля можно реализовать на основе критериев непараметрической статистики, используемых для исследования однородности двух выборок измерений [2, 3, 7–10]. Это такие критерии, как критерий знаков, омега-квадрат, Вилкоксона, ван дер Вардена.

**Целью** данной работы является сравнительная оценка эффективности эмпирических решающих правил контроля, сформированных на основании указанных критериев однородности выборок.

**Основная часть.** Актуальными, с практической точки зрения, являются непараметрические критерии, эффективно работающие при наличии коротких выборок ($n < 50$, $n$ – длина выборки). Одним из таких является критерий омега-квадрат ($\omega^2$) [6]. Этот критерий также называется критерием Колмогорова – Смирнова – Мизеса и в качестве показателя близости двух выборок измерений использует интегральный квадрат разности их эмпирических функций распределения. Для определения показателя близости применяется формула

$$V = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\left(R(x_{1i}) - r(x_{1i})\right)^2 + \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(R(x_{2i}) - r(x_{2i})\right)^2\right] - \frac{4n_1n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)},$$

где $r(x_{1i})$ и $r(x_{2i})$ – собственные ранги измерений первой и второй выборок; $R(x_{1i})$ и $R(x_{2i})$ – ранги измерений первой и второй выборок в объединенной выборке измерений. Ранги вычисляются по формулам:

$$r(x_{1i}) = \sum_{k=1}^{n_1}\operatorname{sgn}(x_{1i} - \xi_{1k}); \quad r(x_{2i}) = \sum_{k=1}^{n_2}\operatorname{sgn}(x_{2i} - \xi_{2k});$$

$$R(x_{1i}) = \sum_{k=1}^{n_1+n_2}\operatorname{sgn}(x_{1i} - \xi_k); \quad R(x_{2i}) = \sum_{k=1}^{n_1+n_2}\operatorname{sgn}(x_{2i} - \xi_k),$$

где $\xi_{1k}$ – упорядоченные измерения первой выборки; $\xi_{2k}$ – упорядоченные измерения второй выборки; $\xi_k$ – упорядоченные измерения объединенной выборки; $\operatorname{sgn}(x)$ – функция положительного единичного скачка. Решение об однородности двух выборок должно приниматься в соответствии с правилом:

$$\text{если } V < V_0, \tag{1}$$

то выборки однородны и имеют один и тот же закон распределения вероятностей. Значения порогов сравнения для вероятностей правильных решений $P$ приведены в табл. 1 [5].

Ранговые критерии однородности выборок Вилкоксона (Манна – Уитни) и ван дер Вардена также не требуют знания законов распределения вероятностей

*Таблица 1*

**Значения порогов сравнения для вероятностей правильных решений *P***

| $P$ | 0,95 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_0$ | 0,461 | 0,549 | 0,620 | 0,743 | 0,864 | 1,168 |

исследуемых выборок $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n1}$ и $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n2}$. Показатели формируются на основе рангов $R(x_{1i})$ и $R(x_{2j})$:

$$R(x_{1i}) = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \operatorname{sgn}(x_{1i} - \xi_k); \quad R(x_{2j}) = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \operatorname{sgn}(x_{2j} - \xi_k),$$

где $\xi_k$ – упорядоченная обобщенная выборка, сформированная на основе двух исследуемых выборок.

Показатели близости двух выборок по критерию Вилкоксона определяется по формулам:

$$W_1 = \frac{\bar{R}_1 - \dfrac{n_1+n_2+1}{2}}{\sqrt{\dfrac{n_2(n_1+n_2+1)}{12n_1}}}; \quad W_2 = \frac{\dfrac{n_1+n_2+1}{2} - \bar{R}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1(n_1+n_2+1)}{12n_2}}},$$

где $\bar{R}_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} R(x_{1i})$, $\bar{R}_2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} R(x_{2j})$ – средние значения рангов. Поскольку $W_1 = W_2$, это свойство можно использовать для проверки правильности вычислений.

Решающее правило определения однородности по критерию Вилкоксона записывается как проверка неравенства

$$|W_1| \le W_0, \tag{2}$$

где $W_0$ – граничное значение и определяется по формуле

$$W_0 = \Psi\left(\frac{1+P}{2}\right),$$

где $\Psi(z)$ – функция, обратная интегралу вероятности Гаусса; $P$ – надежность принятия решения. Например, при $P = 0{,}95$ $W_0 = 1{,}96$. При меньших значениях $n_1$ и $n_2$ порог $W_0$ определяется по таблицам математической статистики.

Ван дер Варден исследовал суммы функций [1]:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \Psi\left[\frac{R(x_{1i})}{n_1+n_2+1}\right]; \quad s_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \Psi\left[\frac{R(x_{2j})}{n_1+n_2+1}\right].$$

Так как $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ и $\Psi(t) = \Psi(1-t)$, то сумма $s_1 + s_2$ всегда равна нулю. Показатель ван дер Вардена $s$ при $n_1 > 20$ и $n_2 > 20$ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D[s_1] = D[s_2] = \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \Psi^2\left(\frac{i}{n_1+n_2+1}\right).$$

Показатель близости двух выборок сформирован в виде:

$$q = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \Psi\left[\dfrac{R(x_{1j})}{n+1}\right]}{\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Psi^2\left(\dfrac{i}{n+1}\right)}},$$

где $n = n_1 + n_2$. Решающее правило определения однородности по критерию ван дер Вардена имеет вид неравенства:

$$|q| \le q_0, \tag{3}$$

где $q_0$ – граничное значение и определяется как $q_0 = \Psi\left(\frac{1+P}{2}\right)$; $\Psi(z)$ – функция, обратная интегралу вероятности Гаусса; $P$ – вероятность принятия правильного решения.

Рассмотрим еще один критерий, один из простейших с вычислительной точки зрения – критерий знаков [5]. Он основан на разности двух выборок случайных величин $x_{11}$, $x_{12}$, …, $x_{1n}$ и $x_{21}$, $x_{22}$, …, $x_{2n}$. Очевидно, что если выборки имеют один и тот же закон распределения вероятностей, то их разность должна иметь симметричное распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием. Сформулируем и исследуем функцию знаков $z(k) = \mathrm{sign}(x_{1k} - x_{2k})$ которая может принимать только три значения: +1, если $z(k) > 0$; –1, если $z(k) < 0$ и ноль, если $z(k) = 0$. Очевидно, что для симметричных распределений вероятность того, что $z(k) > 0$ равна вероятности того, что $z(k) < 0$ и эти вероятности равны 0,5. Определим число положительных $m_1$ и отрицательных $m_2$ разностей

$$m_1 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(z(k) - 0{,}5); \quad m_2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(-z(k) - 0{,}5).$$

Случайные величины $m_1$ и $m_2$ имеют биномиальные законы распределения вероятностей:

$$P_m(m_1 / 0{,}5) = C_m^{m_1} (0{,}5)^{m_1} (0{,}5)^{m-m_1};$$
$$P_m(m_2 / 0{,}5) = C_m^{m_2} (0{,}5)^{m_2} (0{,}5)^{m-m_2},$$

где $m = m_1 + m_2$.

С вероятностью $P$ должно соблюдаться неравенство

$$\frac{m}{2} - \frac{\sqrt{m}}{2}\Psi\left(\frac{1+P}{2}\right) \le m_1 \le \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m}}{2}\Psi\left(\frac{1+P}{2}\right). \tag{4}$$

Если оно выполняется, то следует принимать решение от однородности исследуемых выборок случайных величин.

Все рассмотренные критерии однородности потенциально могут быть использованы для построения эмпирических решающих правил контроля. Чтобы ответить на поставленные задачи проведем вычислительные эксперименты и сравним эффективность распознавания эмпирических решающих правил, сформированных различными способами.

**Результаты исследования.** Для сравнения эффективности эмпирических решающих правил, разработанных на основе критериев однородности омега-квадрат, Вилкоксона, ван дер Вардена и критерия знаков был проведен вычислительный эксперимент. Функциональная схема вычислительного эксперимента представлена на рис. 1. Для описания чувствительности алгоритмов построения решающих правил использовалась величина отклонения брака от нормы

$$\Delta = \frac{2|M_1 - M_2|}{\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}},$$

где $M_1$ и $D_1$ – математическое ожидание и дисперсия измерений, характеризующих нормальное состояние объекта контроля, а $M_2$ и $D_2$ – математическое ожидание и дисперсия измерений, характеризующих дефектное состояние объекта контроля.

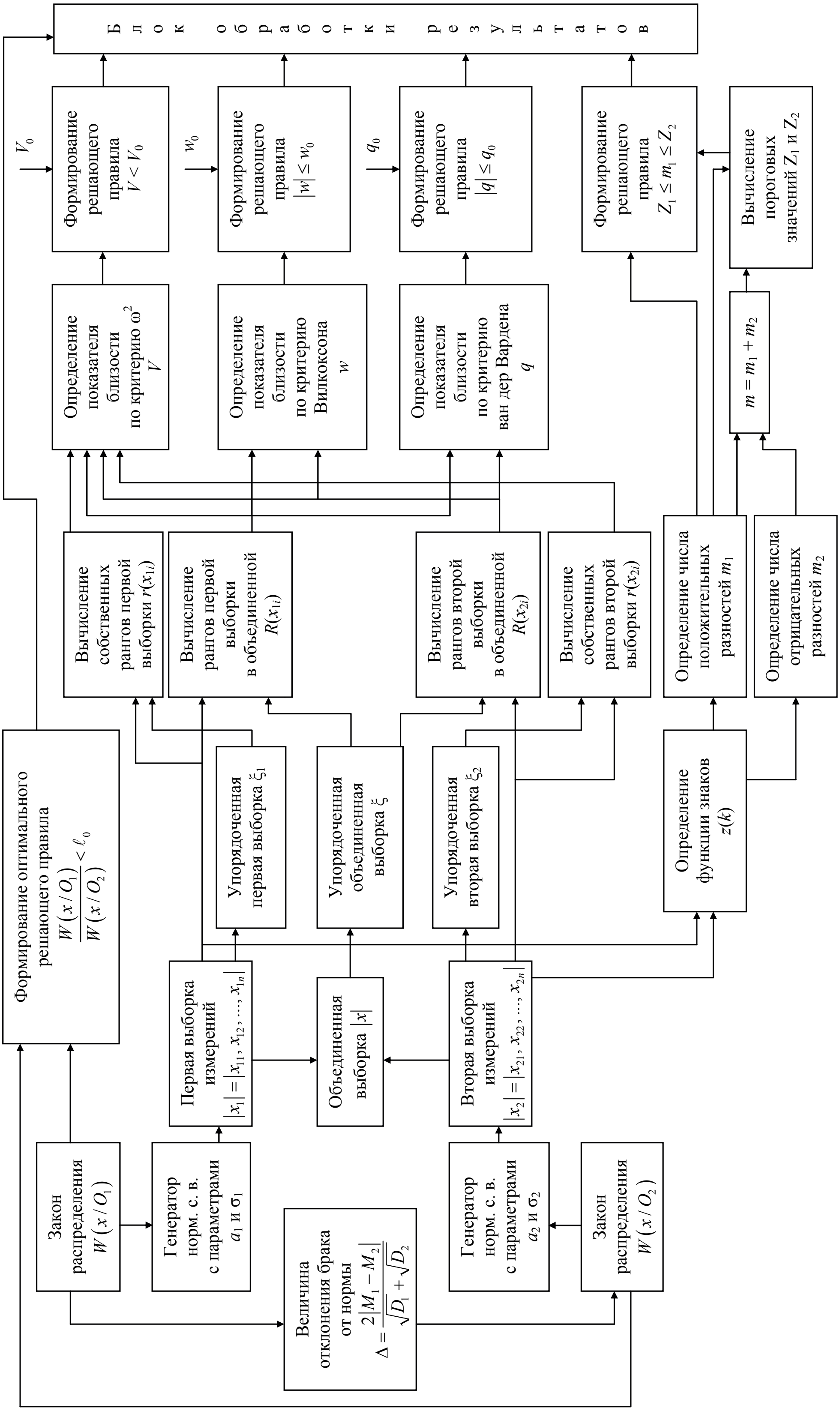


**Рис. 1.** Функциональная схема вычислительного эксперимента для исследования решающих правил контроля, сформированных на основе критериев $\omega^2$, Вилкоксона, ван дер Вардена, знаков

Для эксперимента генерировались выборки измерений с нормальным, релеевским и экспоненциальным законами распределения. Для выборок с каждым законом распределения исследовалось влияние на эффективность правильного распознавания величины Δ и влияние длины исследуемых выборок. В качестве показателя эффективности выбрана средняя вероятность обнаружения брака $\overline{P}_{ОБ}$, которая для решающего правила по критерию омега-квадрат (1) определялась следующим образом:

$$\overline{P}_{ОБ} = 1 - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn}\left(V_j - V_0\right),$$

где $k$ – количество экспериментальных выборок. Аналогичным образом средняя вероятность обнаружения брака вычислялась для решающих правил (2), (3) и (4). В результате проведения 1 тыс. экспериментов были получены оценки $\overline{P}^{*}_{ОБ1}$, $\overline{P}^{*}_{ОБ2}$ и $\overline{P}^{*}_{ОБ3}$ – для выборок случайных величин различной длины ($n$ = 10; 25; 50; 100) с нормальным, релеевским и экспоненциальным законами распределения. Полученные графики зависимостей $\overline{P}^{*}_{ОБ}(\Delta)$ для четырех эмпирических решающих правил контроля подтвердили непараметричность используемых критериев.

Схема вычислительного эксперимента на рис. 1 предусматривает также сравнение эмпирических решающих правил, построенных по критериям однородности, с оптимальным решающим правилом. Так как изучаемые критерии однородности являются непараметрическими, то для исследований достаточно разработать модель аналитического оптимального решающего правила для простого случая, когда выборки измерений имеют нормальное распределение. Записав оптимальное решающее правило для нормальных случайных величин и выразив вероятность обнаружения брака, получим

$$P^{opt}_{ОБ}\left(\Delta\right) = \Phi\left[\sqrt{n}\Delta + \Psi\left(1-P\right)\right],$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности Гаусса; $\Psi(x)$ – функция, обратная интегралу вероятности Гаусса; $P$ – вероятность принятия правильного решения. На рис. 2 представлены графики зависимостей $P^{opt}_{ОБ}\left(\Delta\right)$ оптимального решающего правила, построенного для нормальных случайных величин.

На рис. 3 представлены графики зависимостей $P^{opt}_{ОБ}\left(\Delta\right)$ оптимального решающего правила в одном масштабе с графиками зависимостей $\overline{P}^{*}_{ОБ}(\Delta)$ для четырех исследуемых эмпирических решающих правил.

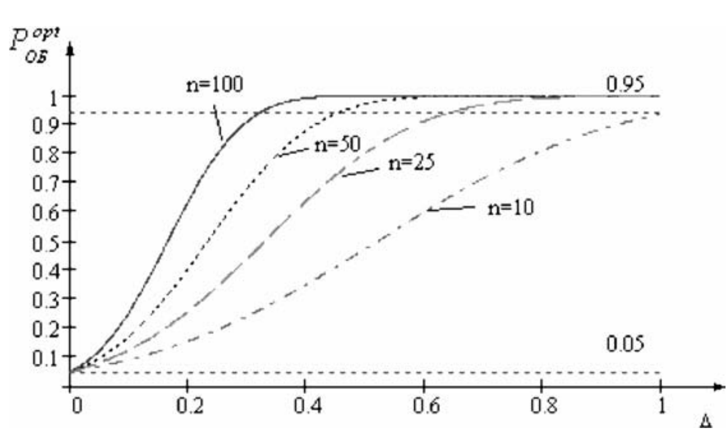


**Рис. 2.** Графики зависимостей $P^{opt}_{ОБ}\left(\Delta\right)$ для оптимального решающего правила, построенного для нормальных случайных величин

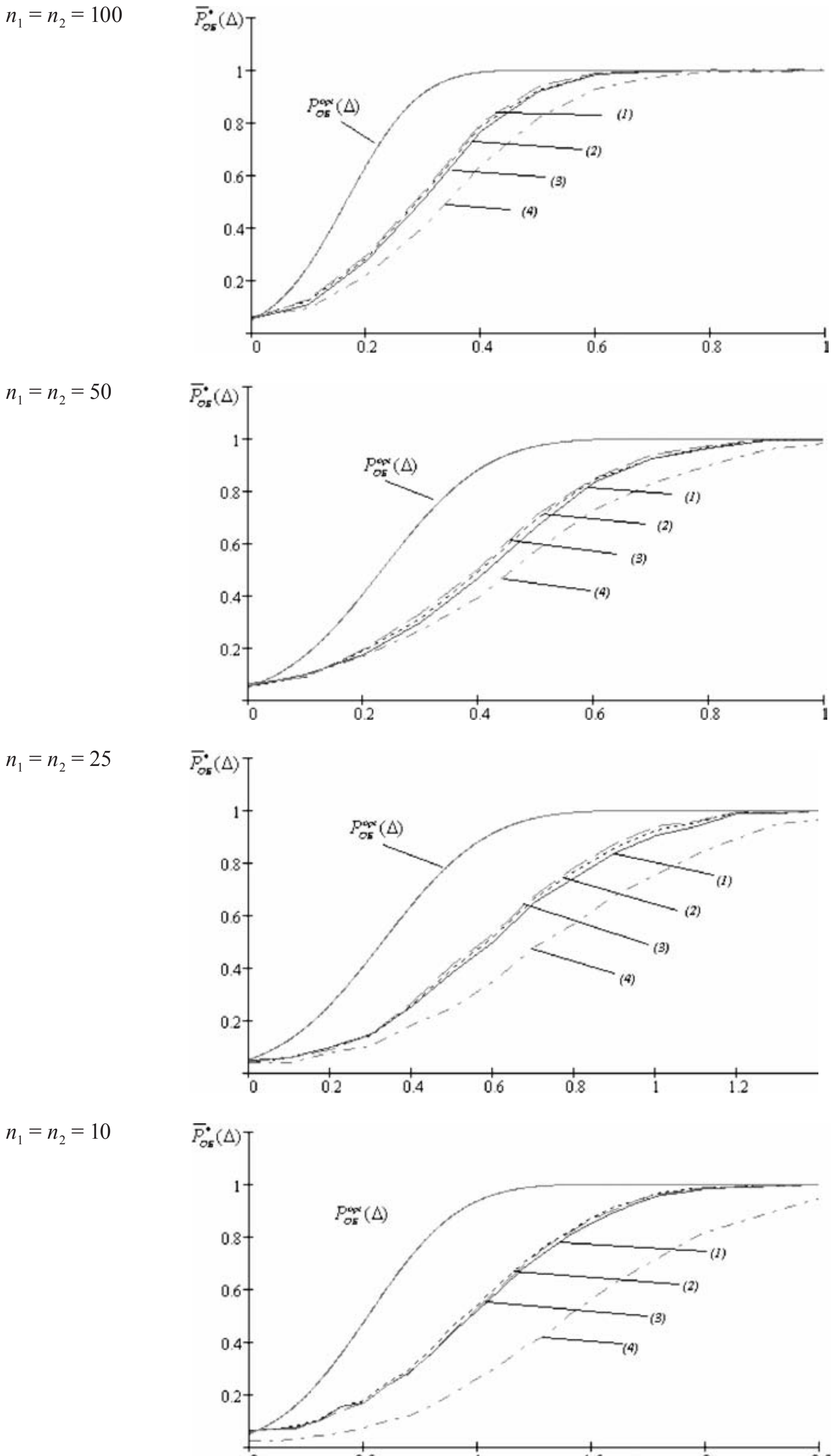


**Рис. 3.** Зависимости $\overline{P}^*_{ОБ}(\Delta)$ для четырех исследуемых эмпирических решающих правил
(1 – критерий омега-квадрат, 2 – Вилкоксона, 3 – ван дер Вардена, 4 – знаков)
и $P^{opt}_{ОБ}(\Delta)$ для оптимального решающего правила

Из анализа полученных зависимостей следует, что эмпирическое решающее правило на основе критерия знаков работает хуже других трех решающих правил, что и следовало ожидать, так как за легкость и простоту вычислений приходится платить, в данном случае эффективностью обнаружения брака. При использовании длинных экспериментальных выборок ($n_1 = n_2 = 100$) решающее правило на основе критерия знаков уступает более сложным решающим правилам лишь на 16–17 %, но с уменьшением длины выборок отрыв стремительно возрастает. При $n_1 = n_2 = 10$ данное решающее правило хуже других исследуемых правил принятия решения в среднем на 34–35 %. Графики на рис. 3 также демонстрируют снижение обнаруживающей способности всех исследуемых решающих правил с уменьшением длины исходных выборок. Количественно данное ухудшение можно оценить следующим образом. При сокращении длины исследуемых выборок в 2 раза (от 100 до 50) наблюдается падение эффективности в среднем на 31–32 %; при уменьшении длины выборок еще в 2 раза (от 50 до 25) эффективность снижается еще на 35–38 %; и, наконец, если выборку сократить от 25 до 10 (в 2,5 раза), то ухудшение работоспособности решающих правил произойдет в среднем на 45–60 %, в зависимости от критерия однородности, положенного в основу формирования исследуемых решающих правил. На рис. 3 преимущество решающих правил на основе критериев $\omega^2$, Вилкоксона и ван дер Вардена над правилом с использованием критерия знаков очевидно. Однако сложно определить наиболее эффективное из трех оставшихся решающих правил, так как графики $\overline{P}^*_{ОБ}(\Delta)$ проходят очень близко друг к другу. Для сравнительной оценки эффективности эмпирических решающих правил определим численные значения $\Delta$ для $P_{ОБ} = 0{,}95$ для каждого из исследуемых решающих правил. Полученные значения $\Delta$ приведены в табл. 2.

*Таблица 2*

**Значения $\Delta$ для $P_{ОБ} = 0{,}95$ для исследуемых эмпирических и оптимального решающих правил**

| $n_1 = n_2$ | Оптимальное решающее правило | Критерий $\omega^2$ | Критерий Вилкоксона | Критерий ван дер Вардена | Критерий знаков |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0,329 | 0,55 | 0,545 | 0,54 | 0,65 |
| 50 | 0,465 | 0,76 | 0,76 | 0,74 | 0,895 |
| 25 | 0,658 | 1,12 | 1,1 | 1,05 | 1,31 |
| 10 | 1,041 | 1,78 | 1,77 | 1,76 | 2,52 |
| **Среднее отклонение от оптимального р. п., %** | | **50,71** | **49,94** | **47,85** | **69,55** |
| **Ранг метода** | | **3** | **2** | **1** | **4** |

Из анализа результатов табл. 2 следует вывод о том, что наиболее чувствительным и эффективным является эмпирическое решающее правило на основе критерия ван дер Вардена. Правило на основе критерия Вилкоксона по эффективности уступает ему на 2 %, на основе критерия $\omega^2$ – на 3 %, а решающее правило с использованием критерия знаков – на 24 %. Приведенные в табл. 2 средние отклонения от оптимального решающего правила показывают, что недостаток априорной информации о контролируемых объектах не позволяет построить эмпирическое решающее правило на основе исследуемых критериев однородности, близкое по эффективности к оптимальному решающему правилу.

**Выводы.** Путем проведения вычислительных экспериментов были исследованы различные алгоритмы формирования эмпирических решающих правил контроля при ограниченной априорной информации о контролируемых объектах. В результате проведенных исследований сделаны следующие выводы:

1. Из четырех исследуемых эмпирических решающих правил, построенных на основе непараметрических критериев, наиболее чувствительным и эффективным оказалось правило с использованием критерия ван дер Вардена. За ним следует решающее правило на основе критерия Вилкоксона (снижение эффективности на 2 %), далее решающее правило на основе критерия $\omega^2$ (в среднем на 3 %) и, наконец, эмпирическое решающее правило на основе критерия знаков (в среднем на 24 %).

2. Если исходные выборки длинные ($n_1 = n_2 = 100$) и требования к браку не высокие, т. е. допускается отклонение от нормы $\Delta = 0{,}65$, то для распознавания можно применять решающее правило на основе простейшего из критериев – критерия знаков.

3. При уменьшении длины выборок ($n_1 = n_2 \leq 50$) эффективность решающего правила на основе критерия знаков значительно уступает более сложным правилам, что делает его применение нецелесообразным и вычислительная простота данного правила теряет свою привлекательность.

4. При отсутствии информации о контролируемых объектах, находящихся в состоянии брака, нельзя построить эмпирическое решающее правило с использованием исследуемых четырех критериев однородности, близкое по эффективности распознавания к оптимальному решающему правилу.

## Библиографические ссылки

1. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика / Б. Л. ван дер Варден. – М. : Изд-во иностр. лит., 1960. – 434 с.
2. **Гаек Я.** Теория ранговых критериев / Я. Гаек, З. Шидак. – М. : Наука, 1971. – 376 с.
3. **Ефимов А. Н.** Порядковые статистики – их свойства и приложения / А. Н. Ефимов. – М. : Знание, 1980. – 64 с.
4. **Малайчук В. П.** Математическая дефектоскопия : монография / В. П. Малайчук, А. В. Мозговой. – Днепропетровск : Системные технологии, 2005. – 180 с.
5. **Малайчук В. П.** Обробка вимірювань і сигналів неруйнівного контролю : навч. посіб. / В. П. Малайчук, О. М. Петренко, В. Ф. Рожковський. – Д. : РВВ ДНУ, 2010. – 140 с.
6. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат / Г. В. Мартынов. – М. : Наука, 1978. – 80 с.
7. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / В. П. Бабак, А. Я. Білецький, О. П. Приставка, П. О. Приставка. – К. : КВІЦ, 2003. – 432 с.
8. **Тарасенко Ф. П.** Непараметрическая статистика / Ф. П. Тарасенко. – Томск : Изд-во Томского ун-та, 1976. – 294 с.
9. **Тюрин Ю. Н.** Непараметрические методы статистики / Ю. Н. Тюрин // Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика». – М. : Знание, 1978. – № 4. – 64 с.
10. **Холлендер М.** Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д. Вулф. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 518 с.

*Надійшла до редколегії 16.05.2013.*