

УДК 629.78.01

Н. В. Коломієць

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара***ПОБУДОВА НИЗЬКООРБІТАЛЬНОЇ ГРУПИ СУПУТНИКІВ  
ДВИГУНОМ МАЛОЇ ТЯГИ**

**Розглянуто задачу побудови низькоорбітальної групи супутників шляхом введення до існуючої нового супутника з компланарної, майже колової орбіти. На основі вибраних допущень та критеріїв оптимізації проведено розрахунок оптимальних траєкторій, визначено області існування оптимальних рішень.**

*Ключові слова:* низькоорбітальне угруповання супутників, двигун малої тяги, збудуючі сили, траєкторія, оптимальне управління, гамільтоніан.

**Рассмотрена задача построения низкоорбитальной группы спутников путем введения в существующую нового спутника с компланарной, околокруговой орбиты. На основе выбранных допущений и критериев оптимизации проведен расчет оптимальных траекторий, определены области существования оптимальных решений.**

*Ключевые слова:* низкоорбитальная спутниковая группировка, двигатель малой тяги, возмущающие силы, траектория, оптимальное управление, гамильтониан.

**An problem of building low earth orbit satellites constellation was considered. Solution methods were analyzed and an optimal one was chosen for the problem solution. Based on the chosen assumptions and criteria optimization, optimal trajectories were calculated. Areas of the existence of optimal solutions were identified.**

*Key words:* Low Earth Orbit satellites constellation, low thrust engine, perturbation forces, trajectory, optimal control, Hamiltonian.

**Вступ.** У зв'язку з початком практичного використання електричних ракетних двигунів виник інтерес до проблеми оптимального управління узгодженого руху супутників з двигуном малої тяги. Ускладнення і зростання переліку задач супутників, збільшення тривалості їх активного існування та рівня засміченості навколоремного простору зумовлюють можливість виникнення ситуацій, коли для виконання заданих функцій необхідно виконати маневр, наприклад, з метою зменшення ймовірності зіткнення з іншим космічним об'єктом або підтримання взаємно узгодженого руху космічних апаратів.

Питання формування різних супутникових угруповань є одним із найактуальніших для майбутнього розвитку космічної діяльності. Побудова групи із декількох космічних апаратів, сформованих у жорстку конструкцію, дає можливість відмовитися від використання великогабаритних систем. Відомо, що питомі витрати на розробку, виготовлення, транспортування малих космічних апаратів (КА) істотно менше, ніж для важких багатофункціональних КА [2].

Загалом, стан питання щодо низькоорбітальних маневрів з двигуном малої тяги на сьогоднішній час формулюється як сукупність вирішених задач відносно корекції середньої висоти орбіти, параметрів орбіти (ексцентриситету, довготи висхідного вузла, великої півосі орбіти, фазового положення КА) при трансверсальному, нормальному та керованому напрямку тяги рушійної установки (РУ). При використанні тільки трансверсального або нормального напрямку дії двигуна малої тяги, які у більшості вирішують питання мінімальних витрат палива, встановлені залежності та області включення РУ, які полягають у незначній зміні параметрів орбіти за один виток і можуть бути доцільними тільки для маневрів корекції та підтримання орбіти у зв'язку із встановленою залежністю часу корекції віднос-

но потрібної кількості витків. У випадку оптимізованих відносно питань швидкості маневрів використовують керований напрямок РУ [5, 6].

**Постановка завдання.** Розглядається задача керування двигуном малої тяги групи супутників з метою введення до групи додаткового, резервного КА.

Приймається трансверсальний напрямок дії рушійної установки малої тяги. Положення супутника, який вводиться, а також номінальна орбіта знаходяться у площині початкової орбіти групи супутників, щільність атмосфери задається таблично і апроксимується при розв'язанні крайової задачі, маса супутника змінюється з часом.

Задача формулюється таким чином: необхідно знайти оптимальну траєкторію руху додаткового супутника відносно угруповання з урахуванням таких критеріїв: час побудови нової групи супутників, витрати палива. Збурений рух супутника описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{\bar{x}} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \bar{r} \\ \bar{v} \\ m \end{Bmatrix} = \begin{cases} \bar{v} \\ -\mu \frac{\bar{r}}{r^3} + \frac{\bar{P}}{m} + \bar{a}_p, \\ -\frac{|\bar{P}|}{I_s g} \end{cases}$$

де  $\bar{r}$ ,  $\bar{v}$ ,  $m$  – радіус-вектор положення, швидкість та маса супутника;  $\bar{P}$ ,  $I_s$ ,  $\mu$  – сила тяги, питома тяга рушійної установки та гравітаційна стала;  $\bar{a}_p$  – збурювальні прискорення, які зумовлені несиметричністю гравітаційного поля Землі та щільністю атмосфери.

Приймається, що розглянутий космічний маневр, заданий деякими характеристиками початкової і кінцевої орбіт, виключає ймовірність виродження ( $e \neq 0$ ,  $i \neq 0$ ). Супутник має електричний ракетний двигун з певними значеннями питомого імпульсу і тяги. Передбачається, що існує можливість вмикати і вимикати електричний ракетний двигун, а сам закон включення-виключення двигуна може бути вибраний і є управлінням, що підлягає оптимізації.

**Чисельні методи.** Для вирішення поставленої оптимізаційної задачі використовують такі методи [2, 4–6]:

1. **Прямий метод.** Розв'язує двохточкову крайову задачу.

*Переваги:* розв'язок гладкий і досить точний.

*Недоліки:* важко сходиться процес розв'язання, складно обрати початкові припущення.

2. **Непрямий метод.** Перетворює задачу оптимального управління у параметричну задачу оптимізації шляхом дискретизації.

*Переваги:* легше сходиться, ніж непрямий метод, кількість параметрів оптимізації можна збільшити.

*Недоліки:* потребує значного часу обчислення, рішення не є гладким.

3. **Гібридний метод.** Дозволяє не враховувати умови трансверсальності. Базується на методі послідовного квадратичного програмування і є компромісом між прямим і непрямим методом.

У даній роботі для вирішення поставленої задачі використаний третій метод, який має істотні переваги перед двома першими.

Існуючі результати [1, 2] свідчать, що відчутний вплив трансверсальної тяги позначається на величині фокального параметра та ексцентриситету. Це істотно, якщо розглядати питання зміни фазового положення супутників і виража-

ється в різниці висот орбіт і періодів обертання між супутниками у разі різних імпульсів прирощення швидкості. Для вирішення цієї проблеми використаний такий метод. На витку з періодом обертання  $T$  задаються три ділянки руху – розгін від  $(0; t)$ , пасивні рух від  $(t; T-t)$  і гальмування  $(T-t; T)$  при  $t \leq T/2$ . Подібний метод дав можливість здійснювати зсув фазового положення супутника на величину  $7-10^\circ$  за виток (пасивна ділянка відсутня  $t = T/2$ ) без істотних змін інших параметрів орбіти.

**Математична модель.** У спрощеному вигляді система збуреного руху супутника описується таким чином:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = \overline{1, n}$$

або у векторному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  –  $n$ -мірні вектори;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  –  $m$ -мірний вектор управління; вектор  $x$  – фазовий вектор системи або вектор стану.

Потрібно серед допустимих управлінь  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , тобто кусково-безперервних вектор-функцій  $u(t) \in U$ , що переводять фазову точку системи із заданого початкового положення  $x^0$  ( $x(t_0) = x^0$ ) у задане кінцеве положення  $x^1$  ( $x(t_1) = x^1$ ), знайти управління і траєкторію, що обумовлюють мінімум функціоналу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left( k + \left| \delta \frac{n \cdot m}{I_s} \right| \right) dt,$$

де  $k$  – деяке позитивне число;  $n, m, I_s, \delta$  – тягоозброєнність, маса, питома тяга та функція-перемікання роботи рушійної установки супутника.

Цей функціонал є лінійною комбінацією двох функціоналів

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \quad \text{та} \quad J_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left| \delta \frac{n \cdot m}{I_s} \right| dt,$$

один з яких відповідає задачі максимальної швидкодії, а другий – мінімізації витрат палива. Число  $k$  є ваговим коефіцієнтом, за допомогою якого встановлюється компроміс між цими двома критеріями.

Задача розв'язується шляхом використання принципу максимуму Понтрягіна [3], що дозволяє звести оптимізаційну задачу до крайової для системи диференціальних рівнянь. Побудова гамільтоніану, відносно критеріїв оптимізації, складає вагомий труднощі стосовно використання принципу максимуму. У випадку обраної системи рівнянь збуреного руху та функціоналу, гамільтоніан набере вигляду

$$H = \bar{\lambda}_r \cdot \bar{v} + \bar{\lambda}_v \left( -\mu \frac{\bar{r}}{r^3} + \frac{\bar{P}}{m} + \bar{a}_p \right) - \bar{\lambda}_r \frac{|\bar{P}|}{I_s}.$$

Загалом для розв'язання задач оптимізації траєкторій КА з двигунами малої тяги використовують різноманітні модифікації методу Ньютона, але їх використання вагомо залежить від вибраних початкових умов, що іноді призводить до виродження розв'язку. За умов роботи рушійної установки малої тяги на управління накладається обмеження

$$P = \delta \cdot P_{\max}, \quad -1 \leq \delta \leq 1.$$

Унаслідок зроблених припущень остаточною системою для вирішення та крайових умов формально матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t); & \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0, & x(t_0) = x_0; \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}; & & x(t_k) = x_k. \end{cases}$$

Відповідно до структури угруповання та залежністю збільшення радіуса кругової орбіти за один виток від тягоозброєності, складаються вирази щодо встановлення крайових умов. За умови зменшення кутової відстані між супутниками на кінцевій орбіті слід встановити такі крайові умови, щоб введення додаткового супутника було можливим, врахувавши його динаміку руху відносно угруповання.

Крайові умови на правому кінці загалом залежать від взаємного розташування супутників на кінцевій орбіті, що можна виразити через аргумент широти:

$$u_i = \Delta u + \frac{2\pi}{i_{\max}}(i-1),$$

де  $i_{\max}$  – кількість супутників у кінцевій фазі;  $\Delta u$  – кутове зміщення взаємного положення додаткового супутника відносно угруповання.

Відповідно до [1], за формулою оцінки часу досягнення кінцевої орбіти визначимо кутові відстані, які пройнуть за цей час супутник в угрупованні та окремий супутник:

$$\Delta u_g = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{I_s}{n} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{\sqrt{\mu/r_1}}{I_s g} \left( 1 - \sqrt{r_1/r_2} \right) \right] \right); \quad \Delta u^* = \frac{(r_2 - r_1)}{1,7 \cdot g \cdot n \frac{r_1^3}{\mu}},$$

де  $T$  – період обертання супутника на номінальній орбіті;  $r_1, r_2$  – радіуси резервної та кінцевої орбіти.

Для задачі оптимізації сумарних витрат палива однією з умов слід передбачити, що кінцеве положення введеного супутника повинно бути в околі вершини нової структури угруповання і сума всіх активних ділянок повинна бути мінімальною.

$$\Delta \varphi_{\max} = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi \left( \frac{i+1}{N_2} - \frac{i}{N_1} \right); \quad \Delta u^* - \Delta u_g = \frac{2\pi}{N_2},$$

де  $N_1, N_2$  – початкова та кінцева кількість супутників у групі.

Зазначені вирази доцільні тільки за умови, що початкове кутове положення супутника, що вводиться, збігається хоча б з одним в угрупованні, в іншому випадку вони коректуються на величину зсуву фаз.

**Моделювання.** За модель супутника взято параметри угруповання Iridium:

висота робочої орбіти – 780 км;

висота орбіти для резервного супутника – 760 км;

нахилення орбіти – 86,5°;

ексцентриситет –  $8,5 \times 10^{-4}$ ;

маса супутника – 650 кг;

характерна площа – 28 м<sup>2</sup>;

аеродинамічний коефіцієнт опору – 2,2;

період обертання – 100 хв;

тягоозброєність –  $5 \times 10^{-4}$ ;

питомий імпульс тяги – 800 с.

Розглядається побудова угруповань, при якій до складу початкової групи супутників вводиться додатковий, резервний, супутник. Метою моделювання є пошук траєкторії перельоту, яка забезпечує перехід із початкового положення у кінцеве за умов дотримання геометричної структури, мінімального часу побудови та витрат палива.

Результати розв'язання поставленої задачі представлені на рис. 1–2. На рис. 1 зображено діаграми роботи рушійних установок для угруповання з чотирьох супутників у випадку: а) приймається нульове зміщення початкових фаз між угрупованням і додатковим супутником (кутове положення резервного супутника 4

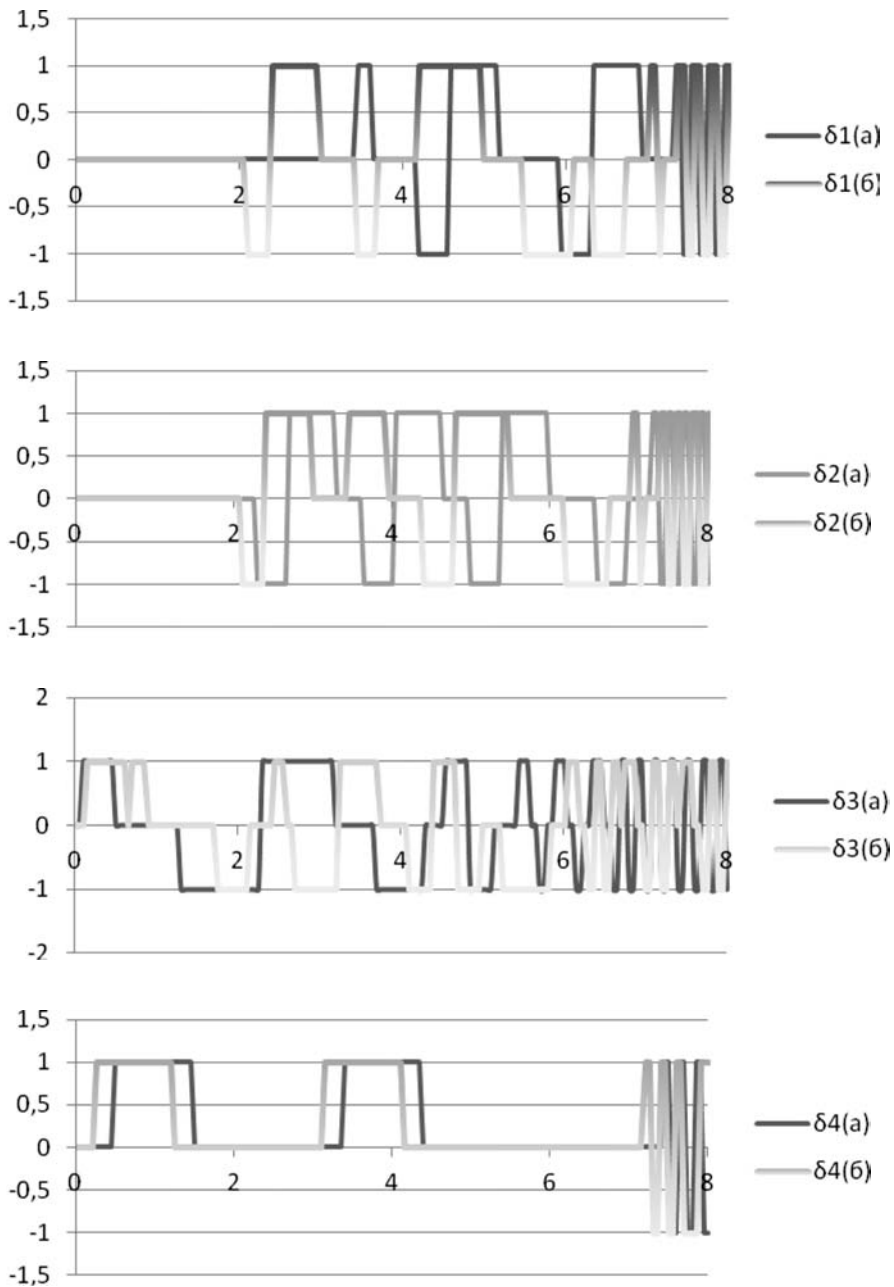
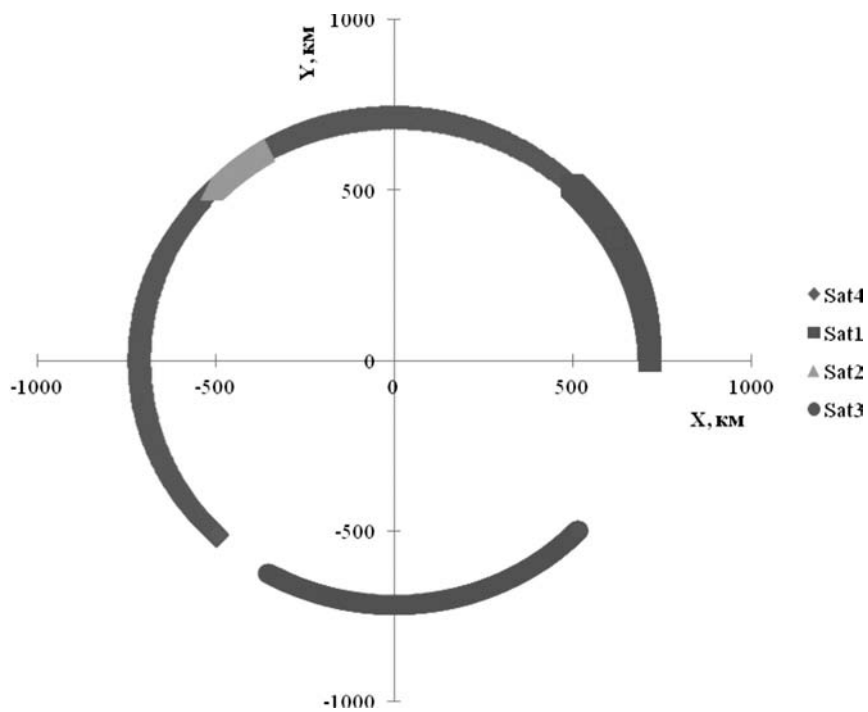
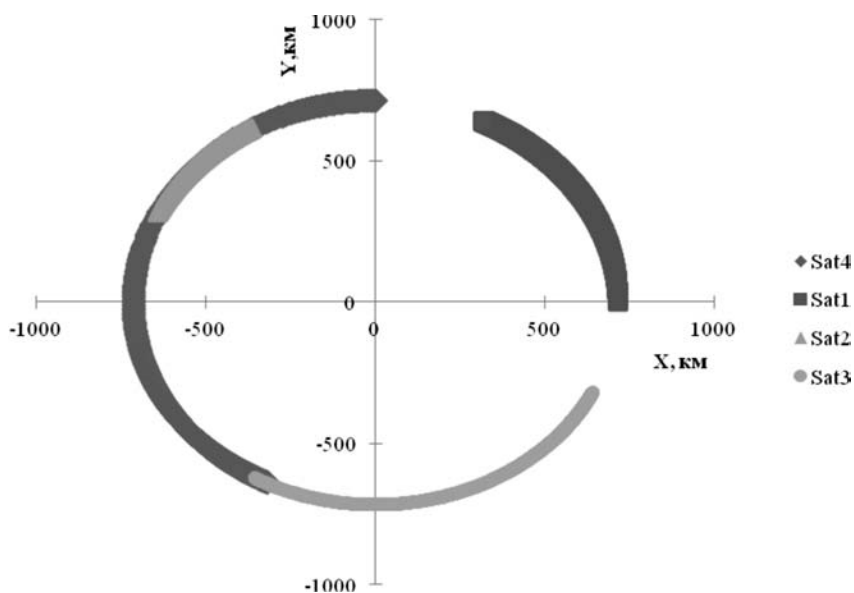


Рис. 1. Діаграми включення двигунів малої тяги групи супутників



а)



б)

**Рис. 2.** Побудова угруповання з чотирьох супутників.

Приведена траекторія відносно характерної кількості витків зі зміщенням фаз:

- а)  $\Delta u = 0^\circ$ , час побудови – 579 500 с (98 витків), сумарна характерна швидкість  $\Delta v = 8,55$  м/с;  
б)  $\Delta u = 90^\circ$ , час побудови – 732 050 с (126 витків), сумарна характерна швидкість  $\Delta v = 10,87$  м/с

збігається з супутником 1); б) приймається зміщення початкових фаз  $90^\circ$  між угрупованням і додатковим супутником (кутове положення резервного супутника 4 знаходиться на осі  $OY$ ).

З отриманих результатів можна встановити залежність, що час побудови загалом залежить від набутої за виток характерної швидкості та від залежності на скільки рознесені кутові положення КА та початкова і кінцева орбіти і приблизно дорівнює часу, який потрібен для корекції кутового положення у разі найбільшого відхилення, за умови, що різниця висот початкової і кінцевої орбіт, яка виражена часом переходу, достатня для корекції кутового положення групи з урахуванням резервного супутника.

**Висновки.** Розв'язано задачу оптимального керування узгодженого руху низькоорбітальних супутників в умовах зовнішніх збурюючих сил. Проведено аналіз методів оптимального керування і вибір одного з них, за яким був сформульований алгоритм. За запропонованим алгоритмом розв'язано крайову задачу та побудовано траєкторії перельоту для угруповання.

Запропоновану методику можна розширити шляхом збільшення кількості резервних супутників, задіяних у маневрі.

### Бібліографічні посилання

1. **Авдєєв В. В.** Збільшення висоти орбіти космічного апарата малою тягою трансверсального напрямку / В. В. Авдєєв // Космічна наука і технологія. – 2009. – 15, № 1. – С. 9–12.
2. **Лебедев Д. В.** Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов / Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко. – Киев : Наук. думка, 2006. – 298 с.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1976.
4. **Наконечний С. І.** Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
5. **Салмин В. В.** Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой / В. В. Салмин, С. А. Ишков, О. Л. Старинова. – Самара : СНЦ РАН, 2006. – 162 с.
6. **Улыбышев Ю. П.** О некоторых актуальных проблемах современной астродинамики: взгляд инженера-практика / Ю. П. Улыбышев // Труды МФТИ. – 2009. – Т. 1, № 32. – С. 40–51.

*Надійшла до редколегії 16.05.2013.*