Библиографические ссылки

1. **Демидович Б. П.** Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970.
2. **Мартин Ф.** Моделирование на вычислительных машинах / Ф. Мартин. – М. : Сов. радио, 1972.

Надійшла до редколегії 25.09.2014 р.

УДК 519.683

В. И. Усиченко, А. В. Крюков

Государственное предприятие «Конструкторское бюро “Южное” имени М. К. Янгеля»

К ЗАДАЧЕ О РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ ПАРАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ

Запропоновано простий алгоритм отримання верхньої оцінки відстані між парою еліптичних орбіт. Наведено аналіз існуючих методів знаходження відстаней між еліптичними орбітами з огляду на зручність їхнього програмування. Головну увагу приділено методу Галле та доцільності його дискретизації. Аналіз його швидкодії для випадку масових обчислень проведено на прикладі конкретної реалізації методу в середовищі Microsoft Visual C++6.0. Коротко висвітлено історичний аспект задачі про відстані між парами орбіт.

Ключові слова: орбіта, верхня оцінка, метод Галле, ітерація, екстремум.

Предложен простой алгоритм получения верхней оценки расстояния между парой эллиптических орбит. Приведен анализ существующих методов нахождения расстояний между эллиптическими орбитами с точки зрения удобства их программирования. Основное внимание уделено методу Галле и целесообразности его дискретизации. Анализ его быстродействия для случая массовых вычислений выполнен на примере конкретной реализации метода в среде Microsoft Visual C++6.0. Затронут исторический аспект задачи о расстояниях между парами орбит.

Ключевые слова: орбита, верхняя оценка, метод Галле, итерация, экстремум.

The simple algorithm of deriving of the upper estimation of distance between pair of elliptic orbits is offered. The analysis of existing methods for distance estimation between elliptic orbits from the point of view of convenience of their usage in given programming environment was performed. The basic attention is given for Galle's method and expediency of it's discretization. The performance analysis of Galle's method realization, implemented in Microsoft Visual C++ 6.0 programming environment, was performed. The historical aspect of the task about distance between pair of orbits is briefly covered.

Key words: an orbit, the top estimation, a method of Halle, iteration, an extremum.

Постановка и формулировка задачи. Ряд задач космонавтики и астрономии ставят на повестку дня вопросы о сближении и степени совпадения орбит небесних тел. Причем, как известно, задача сближения орбит и задача о степени их совпадения являются принципиально разными, их актуальность для эллиптических орбит особенно очевидна.

Настоящая статья посвящена исключительно задаче сближения эллиптических орбит, на основе которой можно решать задачи отождествления опасных фрагментов небесних тел (как искусственных, так и естественных), выбора безопасных орбит для запуска, а также ряд вопросов, связанных с астрономией малых тел Солнечной системы, включая и некоторые вопросы астероидно-кометной опасности. Именно в астрономи малых тел еще в самом начале XIX в. и была впервые сформулирована задача о сближении эллиптических орбит.

Данная задача в классическом виде формулируется следующим образом. Пусть E и E' – две эллиптические орбиты, а P и P' – произвольные точки на E и E' соответственно. Тогда под расстоянием между орбитами E и E' понимается величина

$$\Delta\left(E,E'\right)=\inf_{\substack{P\in E\\ P'\in E'}} dist\left(P,P'\right), \tag{1}$$

где $dist(P,P')$ – расстояние между двумя расположенными на различных орбитах произвольными точками. Несложно заметить, что расстояние между орбитами в таком понимании удовлетворяет условиям первой и второй теоремы Вейерштрасса, а поэтому имеет наибольшее и наименьшее значения. Другими словами, задача (1) является корректно поставленной.

Совершенно очевидным является тот факт, что в такой постановке задача о сближении пар эллиптических орбит не может претендовать на прогнозирование в реальном времени тесных сближений или столкновений находящихся на этих орбитах тел. Вместе с тем, как будет показано ниже, некоторые следующие из нее оценки могут оказаться весьма полезными на этапе предварительной селекции пар орбитальных объектов, сближающихся на потенциально опасные расстояния.

Предыстория и особенности методов решения задачи. Впервые задача определения кратчайшего расстояния между двумя эллиптическими орбитами была поставлена в астрономии в 1802 г., сразу же после открытия первых астероидов. Так, при проверке одной из гипотез происхождения астероидов проводились поиски сближения большого числа орбит в каком-либо одном месте мирового пространства. Уже тогда отмечалось, что (1) представляет собой весьма трудную задачу [2]. Основным источником вычислительных трудностей являлся крайне громоздкий вид получаемых соотношений. Тем большего уважения заслуживают результаты исследователей XIX века, которые уже тогда исследовали орбиты 82 астероидов на предмет взаимного сближения и нашли 333 случая таких сближений.

И даже сегодня, в век всеобъемлющей компьютеризации, едва ли можно назвать задачу (1) простой. Не случайно в последнее время усилия специалистов направлены на поиск оптимальных в смысле минимизации машинного времени алгоритмов ее решения [3]. В настоящее время нам известны пять методов решения, четыре из которых применимы исключительно к эллиптическим орбитам как наиболее часто встречающимся в практике вычислений. Это методы Галле, Дубяго, Свободы, графо-аналитический метод, развитый одесским астрономом Е.Н. Крамером на основе метода Свободы [1], а также предложенный в 1999г. К.В.Холшевниковым [3] алгоритм для решения задачи (1).

Их анализ с точки зрения возможности эффективной программной реализации позволяет констатировать следующее:

– *метод Галле*: является исторически первым из известных нам строгих методов решения задачи сближения эллиптических орбит (1883 г.). Отличительной особенностью данного метода является то, что он требует минимума исходных данных. В отличие от некоторых других методов в нем не требуются ни значения координат точек на орбитах, ни долгота центрального тела – необходимы лишь значения орбитальных параметров двух исследуемых на сближение орбит (большие полуоси, наклоны орбит, эксцентриситеты, долготы восходящих узлов и аргументы перигелиев/перигеев). Этот набор параметров самодостаточен, он обеспечивает функционирование алгоритма (метода) Галле безотносительно к центральному телу. Следовательно, он одинаково пригоден для вычисления сближения двух эллиптических орбит с фокусами в центре Земли (ИСЗ), Солнца (планеты и межпланетные корабли) или какой-либо дальней звезды (экзопланеты). Именно эта особенность метода Галле делает привлекательной его программную реализацию. К тому же он дополнительно дает значение двугранного угла между плоскостями исследуемых орбит и угол между направлениями на их перигелии (перигеи). Относительно возможности его программной реализации хочется отметить, что, на наш взгляд, алгоритм метода Галле не сложнее предложенного недавно и базирующегося на построении тригонометрического многочлена восьмой степени [3] алгоритма;

– *метод Дубяго*: как и метод Галле, он относится к числу классических и имеет то преимущество, что является универсальным, то есть применим, кроме эллиптических, также и к параболическим и гиперболическим орбитам. Однако его алгоритмизация представляет собой более сложную задачу, во всяком случае по сравнению с методом Галле. Если в числе исследуемых орбит отсутствуют орбиты с эксцентриситетом 1 и более, то, на наш взгляд, следует отдать предпочтение именно методу Галле;

– *метод Свободы и графо-аналитический метод Крамера* [1]: изначально были рассчитаны на получение приближенного решения задачи и поэтому едва ли заслуживают первоочередного внимания программиста. К тому же метод Свободы требует большего объема начальных данных, чем, например, метод Галле;

– *метод, предложенный К.В. Холшевниковым* [3]: позиционируется как алгоритм наименьшей сложности. Он базируется на построении тригонометрического многочлена восьмой степени и эффективно решает задачу (1) на больших промежутках времени. Судя по приводимым в [3] результатам его тестирования, быстродействие данного алгоритма несколько выше, чем нашей реализации метода Галле. Его отличительной чертой является применение топологических методов в пространстве кеплеровых орбит. Набор исходных данных в этом методе идентичен таковому в методе Галле.

Даже приведенный краткий анализ известных нам методов ставит под сомнение существующее мнение о том, что до сих пор предпринимались *лишь разрозненные* попытки приближенно оценить наименьшее расстояние между точками на эллиптичеких орбитах – особенно если учесть вышеупомянутые работы начала XIX в.

Особенности программной реализации метода Галле. В процессе программной реализации метода Галле в самом начале работы стала очевидной основная трудность, вставшая перед астрономами прошлого. Ведь решение задачи в итоге сводится к нахождению минимума функции от двух эксцентрических аномалий исследуемых орбит. Квадрат этой функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2(E_1,E_2) = a_1^2(1-\sin\varphi_1\cos E_1)^2 + \\
&+a_2^2(1-\sin\varphi_2\cos E_2) - \\
&-2a_1a_2\cos\varepsilon(\cos E_1-\sin\varphi_1)(\cos E_2-\sin\varphi_2) - \\
&-2a_1a_2\cos\xi(\cos E_1-\sin\varphi_1)\cos\varphi_2\sin E_2 - \\
&-2a_1a_2\cos\upsilon(\cos E_2-\sin\varphi_2)\cos\varphi_1\sin E_1 - \\
&-2a_1a_2\cos\eta\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin E_1\sin E_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\Delta(E, E')$ – расстояние между исследуемыми орбитами; a_1, a_2 – большие полуоси орбит; φ_1, φ_2 – углы эксцентриситетов; E_1, E_2 – эксцентрические аномалии; $\varepsilon,\zeta,\upsilon,\eta$ – вводимые в алгоритме Галле вспомагательные углы.

Поэтому еще относительно недавно, даже на заре машинных вычислений, к проверке достаточного условия минимума функции (2), в явном виде выражающегося двумя неравенствами (условия Лагранжа)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\left(\Delta^2\left(E_1,E_2\right)\right)}{\partial E_1^2}\cdot\dfrac{\partial^2\left(\Delta^2\left(E_1,E_2\right)\right)}{\partial E_2^2}-\left(\dfrac{\partial^2\left(\Delta^2\left(E_1,E_2\right)\right)}{\partial E_1\partial E_2}\right)^2>0 \\ \text{и} \\ \dfrac{\partial^2\left(\Delta^2\left(E_1,E_2\right)\right)}{\partial E_1^2}>0 \end{cases}, \quad (3)$$

некоторые авторы даже не приступали, ограничившись выражениями для первых частных производных функции (2), которые, как известно, дают лишь «подозрительные» на экстремум точки. Ведь при подстановке (2) в неравенства (3) действительно получаем громоздкие выражения. Это накладывает свой отпечаток и на удобство программирования задачи.

Однако вычислительные возможности компьютера позволяют упростить программирование задачи, прибегнув при поиске экстремумов функции (2) к вложенным циклам по E_1 и E_2. При этом шаг изменения каждой из переменных E_1 и E_2 задается вручную пользователем. Такая дискретизация, вполне вероятно, увеличит потребное машинное время, но сократит трудозатраты на разработку программы, избавив нас от необходимости построения и кодирования сложных аналитических выражений. Характерно и то, что такой подход дает возможность одновременно найти и наибольшее расстояние между парой эллиптичеких орбит. Реализация метода Галле выполнена в среде *Microsoft Visual C++ 6.0* как диалоговое приложение с использованием библиотеки классов *MFC*.

На рис. 1 показан результат нахождения экстремальных значений расстояния между орбитами астероида 1993 ЕА (5639) и Земли на эпоху 26 февраля 2000 г. Именно в начале 2000 г. упоминалось о возможности сближения этого астероида с Землей примерно на 0,008 а.е. Как видим, такой прогноз не лишен смысла, поскольку наименьшее расстояние между указанными орбитами чуть более 0,005 а.е., а наибольшее равно примерно 3,01 а.е. Расчеты выполнялись с шагом 0,001 радиана (~0,057 градуса) в циклах по E_1 и E_2. Общее время выполнения программы, включая и время подготовки и ввода данных в окна программы, измерялось макросом *clock()CLOCKS_PER_SEC* библиотеки *time.h* и составило 169 секунд, из которых почти 80 занял ввод данных. Поскольку в методе Галле используются оскулирующие элементы орбит, то параметры каждой из них следует приводить на одну и ту же эпоху. В этом заключается подготовка исходных данных для всех без исключения упомянутых методов.

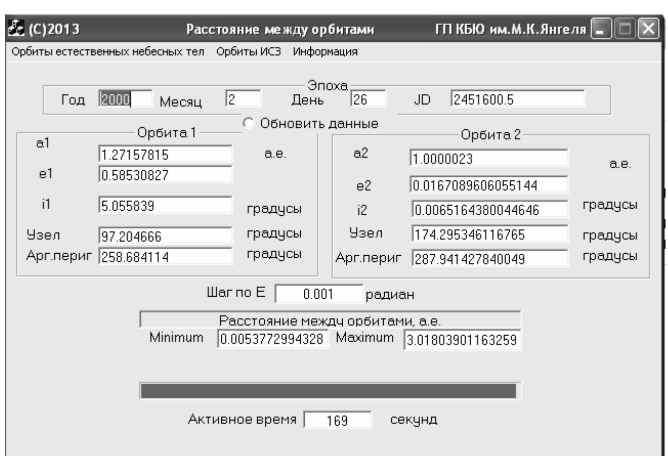

Рис. 1. Результат расчета расстояния между орбитами Земли и астероида 5639 1993 ЕА

За время непосредственно счета задачи (93 сек.) с шагом 0,001 радиана было выполнено $3{,}948 \cdot 10^7$ итераций. В процессе тестирования было установлено, что метод Галле проявляет умеренную чувствительность к изменению шага по эксцентрическим аномалиям в (2). Так, при изменении шага в 5–10 раз результат меняется начиная с четвертого десятичного знака. Этот факт не является неожиданностью, если внимательно проанализировать вид функции (2).

Применение данной программы для пар орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ) не отличается какими-либо особенностями в силу уже отмечавшейся универсальности метода Галле. Однако в программе введенные пользователем в километрах большие полуоси орбит ИСЗ выражаются в экваториальных радиусах Земли. Полученный результат затем снова переводится в километры. Именно таким подходом обусловлено наличие в меню программы (рис. 1) отдельного пункта для спутников. Так, например, для пары орбит спутников RapidEye-1 и RapidEye-2, выведенных на орбиту 29 августа 2008 г., программа дает для расстояния (1) между их орбитами 0,304842289 км, наибольшее же удаление между точками орбит указанных спутников составляет 14004,91896862 км. RapidEye-1 и RapidEye-2 имеют весьма близкие параметры орбит. Однако часто близкими в мировом пространстве оказываются орбиты, из оскулирующих параметров которых вовсе не следует их сближение.

В случае необходимости повышения быстродействия алгоритма, например при необходимости решения задачи (1) для большого числа пар орбит (массовые вычисления), можно прибегнуть к нахождению минимума на основе соотношений (3), выполнив все же соответствующие преобразования с учетом (2).

Случай массового вычисления расстояний между парами орбит и их верхняя оценка. О случае массового вычисления наименьшего расстояния между парами эллиптических орбит, считаем, стоит сказать отдельно. Пусть N – некоторое число тел с эллиптическими орбитами, и требуется вычислить (1) для каждых двух из них. Легко убедиться, что в этом случае метод Галле будет применен

$$\sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{(N-1)\cdot N}{2}$$

раз. Учитывая приведенное выше число итераций на один прогон алгоритма, получим, что в случае N орбит при том же шаге потребуется

$$3{,}948 \cdot 10^7 \cdot \frac{(N-1)\cdot N}{2} \approx 2 \cdot 10^7 \cdot (N-1) \cdot N$$

итераций. Если принять машинное время одного прогона алгоритма равным 93 секунды (как в нашем случае, хотя в целом оно существенно зависит от характеристик используемой вычислительной системы), то общее машинное время расчета минимального расстояния между парами орбит для сотни тел составит уже 460350 секунд, или 127,875 часа. За это время будет выполнено $198 \cdot 10^9$ итераций (время одной итерации $\sim 2{,}3 \cdot 10^{-6}$ с). Аналогичный расчет для 1000 тел дает почти 538 суток потребного машинного времени, поскольку, как видно из последних двух соотношений, число итераций растет пропорционально квадрату числа исследуемых орбит. Задача, как видим, становится критичной по времени выполнения. Одной из мер по повышению быстродействия задачи может быть создание в программе потоков. Практика свидетельствует, что при создании четырех потоков по эксцентрической аномалии (один на каждое ядро процессора) время выполнения программы уменьшается в три-четыре раза.

Ситуация кардинально упрощается, если задача о сближении пар эллиптических орбит несколько видоизменена и требуется оценить величину (1) снизу и сверху, то есть найти значения

$$\underline{\Delta}\left(E, E^{'}\right) = \inf_{\substack{P \in E \\ P' \in E'}} \inf_{\substack{P \in E \\ P' \in E'}} dist(P, P')$$

и (4)

$$\overline{\Delta}\left(E, E^{'}\right) = \sup_{\substack{P \in E \\ P' \in E'}} \inf_{\substack{P \in E \\ P' \in E'}} dist(P, P').$$

Из первого соотношения в (4) для случая пересечения орбит легко получаем очевидное равенство $\underline{\Delta}(E,E')=0$. Для второго же соотношения в (4) несложно получить неравенство

$$\overline{\Delta}\left(E, E'\right) \le 2\max\left\{a_1 \cdot \left(1 + e_1\right), a_2 \cdot \left(1 + e_2\right)\right\}, \tag{5}$$

где $a_{1,2}$ и $e_{1,2}$ соответственно большие полуоси и эксцентриситеты исследуемых орбит.

В самом деле, пусть как и ранее, E и E' – две эллиптические орбиты, а P и P' – произвольные точки на E и E' соответственно, r, r' – радиусы-векторы, а λ, λ' и β, β' – эклиптические сферические координаты точек P и P'. Несложно показать, что в любой момент времени

$$dist^2\left(P, P'\right) = r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \Phi, \tag{6}$$

где $\Phi = \cos\beta\cos\beta^{'}\cos\left(\lambda - \lambda'\right) + \sin\beta\sin\beta'$ (аналогичное соотношение имеет место и для сферических экваториальных координат).

Понятно, что в силу того, что слагаемые в выражении для Φ не могут одновременно иметь модули, равные единице, имеют место следующие оценки:

$$\max_{\substack{\beta,\beta' \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \lambda,\lambda' \in [0,2\pi]}} \Phi\left(\beta, \lambda, \beta', \lambda'\right) = 1$$

и

$$\min_{\substack{\beta,\beta' \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \lambda,\lambda' \in [0,2\pi]}} \Phi\left(\beta, \lambda, \beta', \lambda'\right) = -1\,.$$

Это непосредственно иллюстрируется рис. 2 и 3.

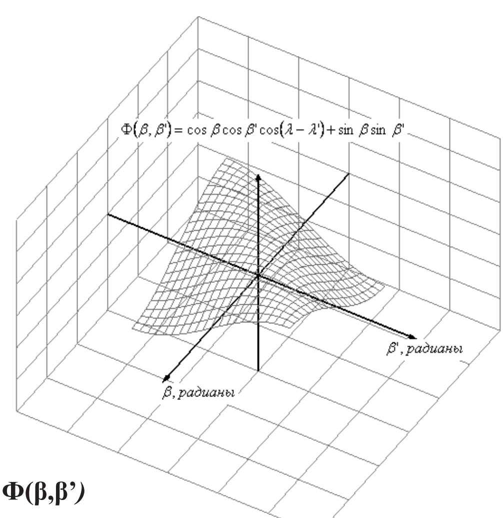

Рис. 2. Общий вид поверхности Φ(β,β'*)* при cos(λ – λ') = 1

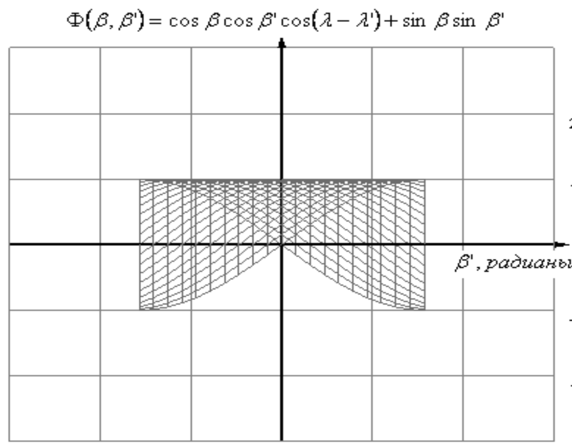

Рис. 3. Проекция поверхности Φ(β,β') на плоскость β' ОФ

Тогда из (6) получаем двойное неравенство

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \le dist^2(P, P') \le r^2 + r'^2 + 2rr'. \tag{7}$$

Если $q_{1,2} = a_{1,2}\cdot(1\text{-}e_{1,2})$ и $Q_{1,2} = a_{1,2}\cdot(1+e_{1,2})$ – соответственно перигелийные (перигейные) и афелийные (апогейные) расстояния на каждой из двух орбит, то, сводя левую часть в (7) к наименьшему из возможных значений, а правую к наибольшему, получим следующие неравенства:

$$2\left(\min^2\{q_1, q_2\} - \max^2\{Q_1, Q_2\}\right) \le dist^2(P, P') \tag{8}$$

и

$$dist^2(P, P') \le 4\max^2\{Q_1, Q_2\}. \tag{9}$$

Левая часть неравенства (8) явно отрицательная, поэтому в итоге из (7) получаем

$$0 \le dist^2(P, P') \le 4\max^2\{Q_1, Q_2\}, \tag{10}$$

откуда

$$\overline{\Delta}(E, E') = \sup_{\substack{P \in E \\ P' \in E'}} dist\,(P, P') \le 2\max\{Q_1, Q_2\}.$$

Полученная только что мажоранта для расстояния между двумя эллиптическими орбитами есть не что иное, как неравенство (5). Следовательно, расстояние между точками на двух эллиптических орбитах не превосходит удвоенного значения большего из двух афелийных (апогейных в случае ИСЗ) расстояний. Последнее выражение, равно как и (5'), использует всего два орбитальных параметра – большие полуоси и эксцентриситеты пары орбит. Поэтому даже в случае массовых вычислений верхней границы расстояния между парами эллиптических орбит задача становится заурядной в плане потребного машинного времени.

Иное дело, что задача в виде (4) далеко не всегда может оказаться приемлемой, так как отвечает на вопрос о верхней границе расстояния между парой эллиптических орбит при данных орбитальных параметрах и не дает точного значения величины (1).

В заключение следует отметить, что в некоторых особых случаях, например при коллинеарности линий апсид исследуемой пары орбит, возможно нахождение точного значения величины $\overline{\Delta}(E, E')$.

Библиографические ссылки

1. **Крамер Е. Н.** Кометные радианты и связь метеорных потоков с кометами / Е. Н. Крамер // Известия астрономической обсерватории. – К. : Изд-во КГУ, 1953. – Т. 3.
2. **Литровъ І. І.** Тайны неба / І. І. Литровъ. – СПб., 1904.
3. **Холшевников К. В.** Топология и метрика пар кеплеровских орбит: лекция, прочитанная на XXX студенческой научной конференции «Физика космоса» в 2001 году.

Надійшла до редколегії 25.09.2014 р.

УДК 57.087.1

М. В. Чорненко, А. Н. Петренко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Розглянуто важливість проблем інтелектуалізації прийняття рішень. У цьому зв'язку обрано напрям розробки систем експертної діагностики на базі нечіткої логіки. Проаналізовано чинники навколоземного простору, що мають вплив на стан здоров’я людини. Описано модель інформаційної системи прийняття рішення на базі нечіткої логіки. Розроблено схему інформаційної системи. Зроблено висновок про ефективність розробки такої системи аналізу впливу навколоземних факторів на людину.

Ключові слова: магнітне поле Землі, геомагнітні бурі, космічні промені, теорія нечітких множин, програмне забезпечення, скринінг.

Рассмотрена важность проблем интеллектуализации принятия решений. В этой связи выбрано направление разработки систем экспертной диагностики на базе нечеткой логики. Проанализированы факторы околоземного пространства, оказывающие влияние на состояние здоровья человека. Описана модель информационной системы принятия решения на базе нечеткой логики. Разработана схема информационной системы. Сделан вывод об эффективности разработки такой системы анализа воздействия околоземных факторов на человека.

Ключевые слова: магнитное поле Земли, геомагнитные бури, космические лучи, теория нечетких множеств, программное обеспечение, скрининг.

We consider the importance of the problems of intellectualization decision. In this regard, the development direction of the selected systems expert diagnosis, based on fuzzy logic. Would-if analyzes factors of near-Earth space, affecting the states-set man. The model of information system decision-making based on fuzzy logic. A scheme of the information system. It is concluded that the effectiveness of time-processing of such a system analysis of the impact factors on the Earth human.

Key words: Earth's magnetic field, geomagnetic storms, cosmic rays theory of fuzzy sets, software screening.

Введение. Земля окружена множеством космических аппаратов, и настало время применить их не только для технических задач, но и на благо здоровья человека. Изучение факторов околоземного пространства весьма важно для дальнейшего анализа их влияния на организм человека. Необходима в связи с этим разработка информационной технологии для обработки данных о таком влиянии, и, что немаловажно, данная технология должна быть доступна обычным пользователям.

Для разработки указанной информации применяется теория нечетких множеств. Концепция нечеткого множества зародилась у Заде – как неудовлетворен-