УДК 629.7.615

Н. С. Ащепкова

Днепропетровский национальний университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ИЗМЕНЯЕМОЙ КОНФИГУРАЦИИ С УЧЕТОМ НЕЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИИ

Розроблено математичну модель космічного апарата (КА) із дволанковим маніпулятором з урахуванням нетвердості конструкції: люфти приводів і пружні коливання ланок маніпулятора. Урахування нетвердості конструкції дозволяє збільшити точність позиціонування схвату при відпрацьовуванні маніпулятором програмних рухів.

Ключові слова: радіус-вектор, кутова швидкість.

Разработана математическая модель космического аппарата (КА) с двухзвенным манипулятором с учетом нежесткости конструкции: люфты приводов и упругие колебания звеньев манипулятора. Учет нежесткости конструкции позволяет увеличить точность позиционирования схвата при отработке программных движений манипулятора.

Ключевые слова: радиус-вектор, угловая скорость.

The mathematical model of a spacecraft (SC) equipped by the two-tier manipulator is developed in view of deformations of a design: backlash of drives and elastic fluctuations of parts of the manipulator. The account of deformations of a design allows to increase accuracy of positioning gripper at improvement of program movements of the manipulator.

Key words: a radius – vector, angular speed.

Введение. Большинство конструкций современных КА имеют подвижные элементы конструкции малой жесткости – манипуляторы, панели солнечных батарей, исполнительные органы различных механизмов. При эксплуатации КА эти элементы, отклоняясь от корпуса, изменяют геометрию масс системы, что обусловливает:

- изменение положения центра масс системы;
- несоосность главных центральных осей инерции системы с осями связанной с корпусом КА системы координат;
- соизмеримость недиагональных и диагональных элементов тензора инерции, вычисленных относительно связанной с корпусом КА системы координат;
- взаимозависимость каналов управления.

Следовательно, при отработке программного поворота КА изменяемой конфигурации, например по тангажу, могут возникнуть угловые движения по рысканию и крену. Эти движения системой управления воспринимаются как возмущения. Если при выполнении программного поворота КА необходимо обеспечить движение манипулятора, то ошибки позиционирования схвата зависят от:

- точности ориентации корпуса КА;
- жесткости механизма манипулятора;
- люфтов в приводах манипулятора;
- параметров качества системы управления манипулятора;
- внешних возмущений и т.д.

Постановка задачи. В данной статье ставится задача составления математической модели КА с двухзвенным манипулятором с учетом люфтов в приводах и упругих колебаний звеньев манипулятора. Такая модель позволит оценить погрешности точности позиционирования схвата манипулятора, обусловленные изменением ориентации КА и нежесткостью конструкции.

Рассматривается КА с активной релейной системой управления на пассивном участке траектории круговой орбиты. Движение КА изменяемой конфигурации характеризуется скоростью $\vec{v}_0$ полюса O – центра масс системы и вектором угловой скорости $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi} - \dot{\upsilon} \cdot Sin\psi, \\ \Omega_y &= \dot{\psi} \cdot Cos\varphi + \dot{\upsilon} \cdot Sin\varphi \cdot Cos\psi, \\ \Omega_z &= -\dot{\psi} \cdot Sin\varphi + \dot{\upsilon} \cdot Cos\psi \cdot Cos\varphi. \end{aligned}$$

Для определенности, в качестве примера, рассматривается КА, состоящий из цилиндрического корпуса и двухзвенного манипулятора; масса манипулятора с грузом составляет до 10% от массы корпуса КА. Звенья манипулятора – кольцо, вращающееся вокруг корпуса КА, и стержень – соединены ротационной кинематической парой 5-го класса (см. рисунок).

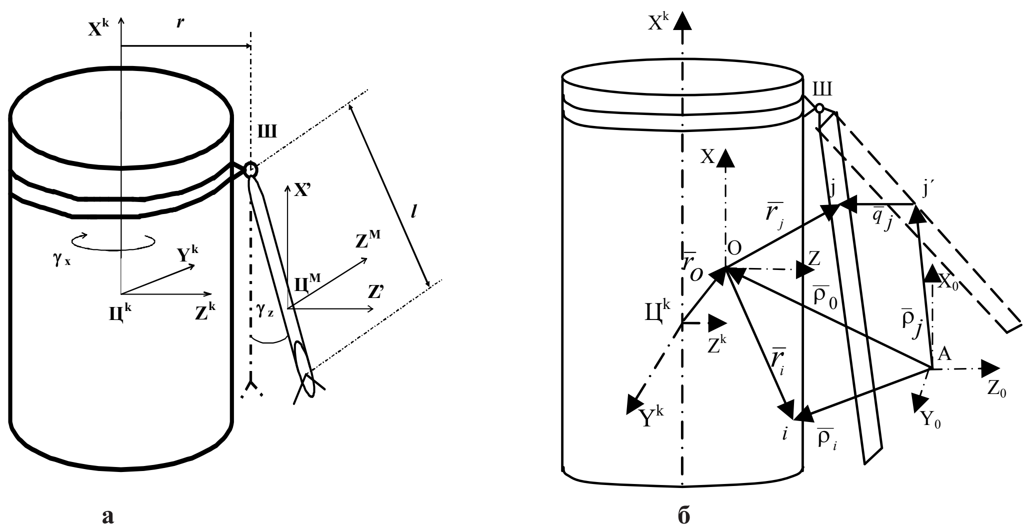

Рисунок: а – космический аппарат с двухзвенным манипулятором;
б – схема систем координат

Математическая модель динамической системы, полученная с учетом нестационарности и недиагональности тензора инерции, описывает:

– угловое движение «КА с манипулятором» в инерциальной системе отсчета;

– относительное движение манипулятора с учетом нежесткости конструкции;

– уравнения сил, действующих на систему «КА с манипулятором»;

– уравнения системы управления.

Уравнения движения получены в скалярной форме с учетом недиагональности тензора инерции для дальнейшего анализа взаимного влияния каналов управления.

Для анализа результатов математического моделирования динамики системы «КА с манипулятором» примем выполняющимися следующие допущения и предположения:

– корпус КА – абсолютно твердый жесткий цилиндр с равномерным распределением массы с плотностью ρ = 2 г/см³, радиусом R = 0,25 м и длиной L = 1,0 м;

– звенья манипулятора имеют равномерное распределение массы с плотностью ρ = 2 г/см³;

– геометрические размеры двухзвенного манипулятора: l = 1м, r = 0,26 м (см. рисунок).

Введем следующие правые системы координат (см. рисунок, б):

$AX_0Y_0Z_0$ – инерциальная система координат;

OXYZ – связанная система координат I. Начало отсчета совмещено с центром масс системы двух тел. Оси параллельны главным центральным осям инерции корпуса КА. Ось OX направлена в сторону шарнира Ш;

$Ц^kX^kY^kZ^k$ – связанная система координат II. Начало отсчета совмещено с центром масс корпуса КА. Оси совпадают с главными центральными осями инерции КА. $Ц^kX^k$ совпадает с осью симметрии корпуса КА и направлена к шарниру Ш;

$ШX^kY^kZ^k$ – связанная система координат III. Начало отсчета совмещено с шарниром Ш. Оси параллельны осям системы координат II.

$ШX^MY^MZ^M$ – связанная система координат IV. Начало отсчета совмещено с шарниром Ш. Оси $ШX^M$, $ШZ^M$ совпадают со строительными осями манипулятора, $ШY^M$ дополняет систему координат до правой;

$OX'Y'Z'$ – базовая система координат. Начало отсчета совмещено с центром масс системы двух тел. Ось OX' совпадает с местной вертикалью и направлена вверх, OZ' расположена в плоскости орбиты и направлена в сторону движения, ось OY' перпендикулярна плоскости орбиты и дополняет систему координат до правой.

Изгиб звена учтён с помощью радиус-вектора $\overline{q}_j$, соединяющего предполагаемое положение j'-й точки жесткого манипулятора с фактическим положением j-й точки деформируемого звена. Люфты в приводах вращения кольца и стержневого звена манипулятора учтём с помощью углов $\alpha_{x\,1}$ и $\alpha_{z\,2}$ соответственно. Дополним, таким образом, математическую модель КА с манипулятором, полученную в [1].

Из теоремы об изменении кинетического момента получим

$$\frac{d}{dt}\sum_i \overline{\rho_i} \times m_i \cdot \overline{V_i} + \frac{d}{dt}\sum_j \overline{\rho_j} \times m_j \cdot \overline{V_j} = \overline{M_\Sigma}\,, \tag{1}$$

где ρ_i – радиус-вектор i-й точки КА в инерционной системе координат $\overline{\rho_i} = \overline{\rho_0} + \overline{r_i}$, $\overline{\rho_0}$ – радиус-вектор центра масс системы КА с манипулятором относительно начала инерционной системы координат, $\overline{r_i}$ – радиус-вектор i-й точки КА в связанной системе координат 2; ρ_j – радиус-вектор j-й точки манипулятора в инерционной системе координат, $\overline{\rho_j} = \overline{\rho_0} + \overline{r_j} + \overline{q}_j$; $\overline{r_j}$ – радиус-вектор j-й точки манипулятора в связанной системе координат 2; m_i – масса i-й точки КА, m_j – масса j-й точки манипулятора, $\overline{V_i} = \dfrac{d\overline{\rho_i}}{dt}$ – скорость i-й точки КА в инерциальной системе координат, $\overline{V_j} = \dfrac{d\overline{\rho_j}}{dt}$ – скорость j-й точки манипулятора в инерциальной системе отсчета. Преобразуем первое слагаемое в (1)

$$\frac{d}{dt}\sum_i \overline{\rho_i} \times m_i \cdot \overline{V_i} = \sum_i \frac{d\overline{\rho_i}}{dt} \times m_i \cdot \overline{V_i} + \sum_i \overline{\rho_i} \times m_i \cdot \frac{d\overline{V_i}}{dt} = \sum_i \overline{\rho_i} \times m_i \frac{d\overline{V_i}}{dt}\,, \tag{2}$$

где $\dfrac{d\overline{\rho_i}}{dt} \times m_i \cdot \overline{V_i} = 0$, как векторное произведение коллинеарных векторов. Так как $\overline{\rho_i} = \overline{\rho_0} + \overline{r_i}$ (см. рисунок, а), то

$$\frac{d\overline{\rho_i}}{dt} = \frac{d\overline{\rho_0}}{dt} + \frac{d\overline{r_i}}{dt}\,, \tag{3}$$

используя понятие локальной производной, можно записать:

$$\frac{d\overline{\rho_0}}{dt} = \frac{\delta\overline{\rho_0}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{\rho_0}\,, \tag{4}$$

$$\frac{d\overline{r_i}}{dt} = \frac{\delta\overline{r_i}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{r_i}\,, \tag{5}$$

Подставив (3) – (5) в (2), получим

$$\sum_i \overline{\rho_i} \times m_i \frac{d\overline{V_i}}{dt} = \sum_i \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right) \times m_i \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{d\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right)}{dt}\right\} = \sum_i \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right) \times m_i \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{d\overline{\rho_0}}{dt} + \frac{d\overline{r_i}}{dt}\right\} =$$

$$= \sum_i \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right) \times m_i \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta\overline{\rho_0}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{\rho_0} + \frac{\delta\overline{r_i}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{r_i}\right\} = \tag{6}$$

$$= \sum_i \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right) \times m_i \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta}{dt}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right) + \overline{\Omega} \times \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_i}\right)\right\}.$$

Преобразуем второе слагаемое в (1)

$$\frac{d}{dt}\sum_j \overline{\rho_j} \times m_j \cdot \overline{V_j} = \sum_j \frac{d\overline{\rho_j}}{dt} \times m_j \cdot \overline{V_j} + \sum_j \overline{\rho_j} \times m_j \frac{d\overline{V_j}}{dt} = \sum_j \overline{\rho_j} \times m_j \frac{d\overline{V_j}}{dt}, \tag{7}$$

где $\frac{d\overline{\rho_j}}{dt} \times m_j \cdot \overline{V_j} = 0$, как векторное произведение коллинеарных векторов.

Представим совокупность точек манипулятора как сумму всех точек кольца и всех точек руки, тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_j \overline{\rho_j} \times m_j \cdot \frac{d\overline{V_j}}{dt} = \sum_m \overline{\rho_m} \times m_m \cdot \frac{d\overline{V_m}}{dt} + \sum_n \overline{\rho_n} \times m_n \frac{d\overline{V_n}}{dt}, \tag{8}$$

где $m_j = m_n + m_m$; m – число точек кольца, n – число точек руки манипулятора,

$$\overline{\rho_m} = \overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'; \quad \overline{\rho_n} = \overline{\rho_0} + \overline{r_2} + \overline{r_{2n}} + \overline{r_{2n}}';$$

где $\overline{r_1}$ – радиус-вектор центра масс кольца в связанной системе координат 2, $\overline{r_{1m}}$ – радиус-вектор m-й точки кольца в связанной системе координат, $\overline{r_{1m}}'$ – изменение радиус-вектора m-й точки кольца в связанной системе координат, обусловленное нежесткостью конструкции.

$\overline{r_2}$ – радиус-вектор центра масс руки манипулятора в связанной системе координат, $\overline{r_{2n}}$ – радиус-вектор n-й точки руки манипулятора в связанной системе координат, $\overline{r_{2n}}'$ – изменение радиус-вектора n-й точки руки манипулятора в связанной системе координат, обусловленное нежесткостью конструкции.

Преобразуем первое слагаемое в (8):

$$\sum_m \overline{\rho_m} \times m_m \cdot \frac{d\overline{V_m}}{dt} = \sum_m \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) =$$

$$= \sum_m \overline{\rho_0} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) + \sum_m \overline{r_1} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) + \tag{9}$$

$$+ \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) + \sum_m \overline{r_{1m}}' \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right).$$

а)

$$\sum_m \overline{\rho_0} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) = \overline{\rho_0} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1}\right) + \overline{\rho_0} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) =$$

$$= \overline{\rho_0} \times m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1}\right) + \overline{\rho_0} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right);$$

б)

$$\sum_m \overline{r_1} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) = \overline{r_1} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1}\right) + \overline{r_1} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right) =$$

$$= \overline{r_1} \cdot m_1 \times \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1}\right) + \overline{r_1} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}'\right);$$

в)

$$\sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}+\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) = \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) =$$

$$= \sum_m \overline{r_{1m}} \cdot m_m \times \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) = \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right),$$

так как $\sum_m \overline{r_{1m}} \cdot m_m = 0$ – как статический момент массы относительно центра масс кольца;

г)

$$\sum_m \overline{r_{1m}'} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}+\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) = \sum_m \overline{r_{1m}'} \cdot m_m \times \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \sum_m \overline{r_{1m}'} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right).$$

Подставим полученные выражения в (9).

$$\begin{gathered}
\sum_m \overline{\rho_m} \times m_m \cdot \frac{d\overline{V_m}}{dt} = \overline{\rho_0} \times m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \overline{\rho_0} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) + \\
+\overline{r_1} \cdot m_1 \times \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \overline{r_1} \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) + \sum_m \overline{r_{1m}} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) + \qquad (10) \\
+\sum_m \overline{r_{1m}'} \cdot m_m \times \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \sum_m \overline{r_{1m}'} \times m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) = \\
= \left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}+\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right) \times m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right) + \left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}+\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}}\right) \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}'}\right).
\end{gathered}$$

Вычислим производные

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{r_{1m}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}}\right);$$

$$\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}} = \frac{\delta\overline{r_{1m}}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{r_{1m}} = \frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt} + \overline{\omega_1} \times \overline{r_{1m}} + \overline{\Omega} \times \overline{r_{1m}} = \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}} + \frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{r_{1m}'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}'}\right);$$

$$\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}'} = \frac{\delta\overline{r_{1m}'}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{r_{1m}'} = \frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt} + \overline{\omega_1} \times \overline{r_{1m}'} + \overline{\Omega} \times \overline{r_{1m}'} = \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}'} + \frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt};$$

где $\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt}$, $\frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt}$ – локальные производные в системе координат, связанной с кольцом манипулятора.

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dt^2}\overline{r_{1m}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt}\right) + \frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}} + \\
+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \frac{d}{dt}\overline{r_{1m}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt}\right) + \frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \left[\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}}\right], \qquad (11)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dt^2}\overline{r_{1m}'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overline{r_{1m}'}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}'}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt}\right) + \frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}'} + \\
+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \frac{d}{dt}\overline{r_{1m}'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt}\right) + \frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}'} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \left[\frac{\delta'\overline{r_{1m}'}}{dt} + \left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}'}\right]. \qquad (12)
\end{gathered}$$

С учётом (11), (12) можно записать:

$$\sum_m \left\{ m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{1m}} \right\} = \sum_m m_m \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} \right) \right\} + \sum_m \left\{ m_m \cdot \frac{d\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}} \right\} +$$

$$+ \sum_m m_m \cdot \left\{ \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \left[\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} + \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}} \right] \right\} =$$

$$= \sum_m m_m \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} \right) \right\} + \sum_m \left\{ \frac{d\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}} m_m \right\} +$$

$$+ \sum_m m_m \cdot \left\{ \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} + \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \left[\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}} \right] \right\} =$$

$$= \sum_m m_m \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} \right) \right\} + \sum_m m_m \cdot \left\{ \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} \right\} + \sum_m m_m \cdot \left\{ \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \left[\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}} \right] \right\}, \quad (13)$$

так как $\sum_m \overline{r_{1m}} m_m = 0$ – как статический момент массы относительно центра масс кольца,

$$\sum_m \left\{ m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{1m}}' \right\} = \sum_m \left\{ m_m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}'}{dt} \right) \right\} + \sum_m \left\{ m_m \cdot \frac{d\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}}' \right\} +$$

$$+ \sum_m m_m \cdot \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \frac{\delta' \overline{r_{1m}}'}{dt} + \sum_m \left\{ m_m \cdot \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \left[\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}}' \right] \right\}. \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в (10), получим

$$\sum_m \overline{\rho_m} \times m_m \cdot \frac{d\overline{V_m}}{dt} \overline{\rho_m} = \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}' \right) \times m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} \right) +$$

$$+ \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}' \right) \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{1m}} +$$

$$+ \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}' \right) \times \sum_m m_m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{1m}}' = \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}' \right) \times m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} \right) +$$

$$+ \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_1} + \overline{r_{1m}} + \overline{r_{1m}}' \right) \times \sum_m m_m \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} \right) + (\overline{\omega}_1 + \overline{\Omega}) \times \left[\frac{\delta' \overline{r_{1m}}}{dt} + \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r}_{1m} \right] + \right. \quad (15)$$

$$\left. + \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta' \overline{r_{1m}}'}{dt} \right) + \frac{d\left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right)}{dt} \times \overline{r_{1m}}' + \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \left[\frac{\delta' \overline{r_{1m}}'}{dt} + \left(\overline{\omega_1} + \overline{\Omega}\right) \times \overline{r_{1m}}' \right] \right\}.$$

Если провести аналогичные преобразования для второго слагаемого (8), то получим

$$\sum_n \overline{\rho_n} \times m_n \cdot \frac{d\overline{V_n}}{dt} \overline{\rho_n} = \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} + \overline{r_{2n}} + \overline{r_{2n}}' \right) \times m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} \right) +$$

$$+ \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} + \overline{r_{2n}} + \overline{r_{2n}}' \right) \times \sum_n m_n \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{2n}} +$$

$$+ \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} + \overline{r_{2n}} + \overline{r_{2n}}' \right) \times \sum_n m_n \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{r_{2n}}' = \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} + \overline{r_{2n}} + \overline{r_{2n}}' \right) \times m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\overline{\rho_0} + \overline{r_2} \right) +$$

$$+\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_2}+\overline{r_{2n}}+\overline{r_{2n}}'\right)\times\sum_n m_n\cdot\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{2n}}}{dt}\right)+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\left[\frac{\delta''\overline{r_{2n}}}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r_{2n}}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta''\overline{r_{2n}}'}{dt}\right)+\frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)}{dt}\times\overline{r_{2n}}'+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\left[\frac{\delta''\overline{r_{2n}}'}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r_{2n}}'\right]\right\}. \qquad (16)$$

Подставим (6) и (8) с учётом (15) и (16) в (1) и получим

$$\overline{M_\Sigma}=\sum_i\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_i}\right)\times m_i\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta}{dt}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_i}\right)+\overline{\Omega}\times\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_i}\right)\right\}+$$
$$+\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right)\times m_1\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right)+\sum_m\overline{r_{1m}}'\cdot m_m\times\frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}\right)+$$
$$+\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_1}+\overline{r_{1m}}+\overline{r_{1m}}'\right)\times\sum_m m_m\cdot\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt}\right)+(\overline{\omega}_1+\overline{\Omega})\times\left[\frac{\delta'\overline{r_{1m}}}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r}_{1m}\right]+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{1m}}'}{dt}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)}{dt}\times\overline{r_{1m}}'+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)\times\left[\frac{\delta'\overline{r_{1m}}'}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r_{1m}}'\right]\right\}+$$
$$+\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_2}\right)\times m_2\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_2}\right)+\sum_n\overline{r_{2n}}'\cdot m_n\times\frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_2}\right)+$$
$$+\left(\overline{\rho_0}+\overline{r_2}+\overline{r_{2n}}+\overline{r_{2n}}'\right)\times\sum_n m_n\cdot\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta'\overline{r_{2n}}}{dt}\right)+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\left[\frac{\delta''\overline{r_{2n}}}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r}_{2n}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta''\overline{r_{2n}}'}{dt}\right)+\frac{d\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)}{dt}\times\overline{r_{2n}}'+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\left[\frac{\delta''\overline{r_{2n}}'}{dt}+\left(\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}+\overline{\Omega}\right)\times\overline{r_{2n}}'\right]\right\}. \qquad (17)$$

Уравнение (17) – это уравнение движения КА с манипулятором относительно центра масс системы.

Выводы. Учет нежесткости конструкции позволяет увеличить точность позиционирования схвата при отработке программных движений манипулятора во время манёвров КА. Для примера приведём результаты математического моделирования в предположении, что массово-габаритные параметры и характеристики систем управления для двух КА одинаковы, конструктивная схема соответствует рисунку. При повороте корпуса КА на 0,1 рад по тангажу манипулятор выполняет поворот кольца на 0,17 рад и отклонение руки на 0,1 рад. Продолжительность переходного процесса для жесткого манипулятора составила 400 с, для нежесткого – 600 с; точность позиционирования схвата жесткого манипулятора составила 0 рад, для нежесткого – 0,075 рад (≈ 4,3°).

Библиографические ссылки

1. **Ащепкова Н. С.** Математическая модель движения космического аппарата с манипулятором / Н. С. Ащепкова, Ю. Д. Шептун // Космічна наука і технологія. – К., 1997. – Т. 3, № 5/6. – С. 34–42.

2. **Ащепкова Н. С.** Инерционные характеристики малогабаритного космического аппарата с манипулятором / Н. С. Ащепкова, Ю. Д. Шептун // Приднепровский научный вестник. Серия «Машиностроение». – Днепропетровск, 1997. – Вып. 45 (56), ч. I. – С. 11–17.

3. **Болотник Н. Н.** Оптимизация управления манипуляционными роботами / Н. Н. Болотник, Ф. Л. Черноусько // Техническая кибернетика. – М.,1990. – № 1. – С. 180–215.

Надійшла до редколегії 05.06.2014 р.