

9. **Moallemi, C. C.** Consensus propagation [Text] / C. C. Moallemi, B. V. Roy // IEEE Trans. on Information Theory. – 2006. – Vol. 52(11). – P. 4753–4766.
10. **Ren, W.** Information consensus in multivehicle control [Text] / W. Ren, R. W. Beard, E. M. Atkins // IEEE Control Systems Magazine. – 2007. – Vol. 27(2). – P. 71–82.
11. **Wu, C. W.** Synchronization and convergence of linear dynamics in random directed networks [Text] / C. W. Wu // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51(7). – P. 1207–1210.
12. **Alighanbari, M.** Decentralized task assignment for unmanned aerial vehicles [Text] / M. Alighanbari, J. P. How // Proc. of the 44<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control. – 2005. – P. 35–42.
13. **Dionne, D.** Multi-UAV Decentralized Task Allocation with Intermittent Communications: the DTC algorithm [Text] / D. Dionne, C. A. Rabbath // Proc. of the American Control Conf. – 2007. – P. 1158–1164.
14. **Dias M. B** Market-based multirobot coordination: A survey and analysis [Text] / M.B Dias, R. Zlot, N. Kalra, A. Stentz // Proc. of the 45<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control. – 2006. – Vol. 94(7). – P. 1257–1270.
15. **Kwasnica A. M.** A new and improved design for multiobject iterative auctions [Text] / A. M. Kwasnica, J.O. Ledyard, D. Porter, C. DeMartini // Management Science. – 2005. – Vol. 51(3). – P. 419–434.
16. **Atkinson, M. L.** Results Analysis of Using Free Market Auctions to Distribute Control of UAVs [Text] / M.L. Atkinson // AIAA 3<sup>rd</sup> Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit. – 2004. – P. 142–153.
17. **Sujit, P. B.** Distributed Sequential Auctions for Multiple UAV Task Allocation [Text] / P.B. Sujit, R. Beard // Proc. of the American Control Conf. – 2007. – P. 101–109.
18. **Bertsekas, D. P.** The auction algorithm for assignment and other network flow problems [Text] / D. P. Bertsekas // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1989. – Vol. 4(1). – P. 159–172.
19. **Smith, S. L.** Target assignment for robotic networks: Asymptotic performance under limited communication [Text] / S. L. Smith, F. Bullo // Proc. of the American Control Conf. – 2007. – P. 1132–1144.
20. **Wilson, D. B.** Generating random spanning trees more quickly than the cover time [Text] / D. B. Wilson // Proc. of the 28<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. – 1996. – P. 121–133.

*Надійшла до редколегії 31.05.2015*

УДК 519.683

**В. И. Усиченко, А. В. Крюков, Д. Г. Грошелев**

*Государственное предприятие «Конструкторское бюро “Южное”  
имени М. К. Янгеля», г. Днепропетровск*

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ТОЧЕК НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТАХ**

**Показана возможность предвычисления момента встречи находящихся на софокусных эллиптических орбитах тел, исходя из равенства их радиус-векторов в момент встречи. Рассмотрен случай невозмущенного движения.**

*Ключевые слова:* эквидистантная точка, область эквидистантных точек, фазовая кривая, фазовое пространство, истинная аномалия, софокусные орбиты, восходящий участок, нисходящий участок.

**Показано можливість розрахунку моменту зустрічі двох тіл, що перебувають на співфокусних еліптичних орбітах, виходячи з рівності їх радіус-векторів у момент зустрічі. Розглянуто випадок незбуреного руху.**

*Ключові слова:* еквідистантна точка, область еквідистантних точок, фазова крива, фазовий простір, істинна аномалія, співфокусні орбіти, висхідна ділянка, низхідна ділянка.

**If two bodies are in confocal orbits the moment of their collision can be predicted proceeding from equality of radiuses-vectors of the bodies at them to meeting. Attempt to prove this statement is undertaken in this article. Case of presence of perturbations is not considered.**

*Key words:* equidistant point, area of equidistant points, phase curve, phase space, true anomaly, confocal orbits, ascending section, descending section.

**Принятая терминология и исходные положения.** Под *космическим объектом* (КО) в дальнейшем будем понимать искусственное или естественное небесное тело, находящееся на эллиптической орбите с фокусом в центре масс центрального тела с известным гравитационным параметром  $K$ . Две равноудаленные от фокуса точки эллиптической орбиты будем называть эквидистантными точками (ЭДТ). Указанные точки могут находиться как на одной и той же, так и на различных эллиптических орбитах, имеющих общий фокус (общее центральное тело). Участок эллиптической орбиты, на котором космический объект движется от перицентра к апоцентру, для краткости будем называть восходящим. Для истинной аномалии  $\nu$ , находящегося на восходящем участке орбиты космического объекта, очевидно неравенство

$$0 \leq \nu \leq \pi.$$

Участок эллиптической орбиты, на котором выполняется неравенство

$$\pi < \nu < 2\pi,$$

соответственно будем называть нисходящим.

Пусть дано два набора оскулирующих орбитальных параметров

$$\{a_k, i_k, e_k, \Omega_k, \omega_k, \tau_{0k}\}_{k=1}^2 \quad (1)$$

для эллиптических орбит  $E_1$  и  $E_2$  соответственно. Здесь через  $\tau_0$  обозначен момент прохождения космическим объектом перицентра, остальные обозначения общепринятые.

Будем считать в первом приближении космические объекты, находящиеся на софокусных эллиптических орбитах, материальными точками. Очевидно, что столкновение (встреча) любых двух из них возможно лишь в эквидистантных точках, поскольку в момент столкновения объекты находятся в одной и той же точке мирового пространства, а следовательно, равноудалены от общего фокуса орбит. Точку же их встречи можно рассматривать как две совпадающие, но находящиеся на разных орбитах ЭДТ. Если же объекты в один и тот же момент времени  $t'$  находятся в физически различных ЭДТ, то их столкновение исключено. В случае же их прохождения через одну и ту же точку в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  возможно их тесное сближение, если  $|t_1 - t_2|$  достаточно малое. В общем же случае тесное сближение двух КО может быть и вне ЭДТ, как результат одновременного прохождения объектами близко расположенных в мировом пространстве участков орбит. Поэтому в дальнейшем речь будет идти почти исключительно о возможности встречи двух КО.

Статья посвящена рассмотрению вопроса о возможности построения, исходя из заданных выше орбитальных параметров (1), алгоритма выделения ЭДТ, в которых два КО окажутся одновременно (встреча) или в весьма близкие моменты времени (тесное сближение).

**Базовые соотношения, положенные в основу метода.** Рассмотрим случай невозмущенного движения двух космических объектов с орбитальными параметрами (1) по эллиптическим орбитам вокруг общего фокуса. При этом силами взаимного притяжения между объектами пренебрежем, что для искусственных небесных тел вполне допустимо.

Пусть в некоторый момент времени  $t$  каждый из указанных объектов равноудален от общего фокуса на расстояние  $r$ . Это равносильно утверждению о том, что они находятся или в одной и той же точке пространства (для случая столкновения) или в двух несовпадающих эквидистантных точках, расположенных на орбитах  $E_1$  и  $E_2$ . Тогда в момент  $t$  для модулей радиус-векторов  $r_{1,2}$  рассматриваемых объектов получим  $r_1(t) = r_2(t) = r$ . Из уравнений орбит  $E_1$  и  $E_2$  в полярных координатах немедленно следуют равенства

$$\frac{p_1}{1 + e_1 \cdot \cos \mathcal{Q}_1} = \frac{p_2}{1 + e_2 \cdot \cos \mathcal{Q}_2} = r, \quad (2)$$

где  $p_{1,2} = a_{1,2} \cdot (1 - e_{1,2}^2)$  – фокальные параметры каждой из орбит  $E_1$  и  $E_2$ ;  $v_{1,2}$  – истинные аномалии на момент  $t$ , а  $r$  может принимать значения только в непустой области  $D$  эквидистантных точек (рисунок, штриховка), имеющей вид

$$D = [q_1, Q_1] \cap [q_2, Q_2], \quad (3)$$

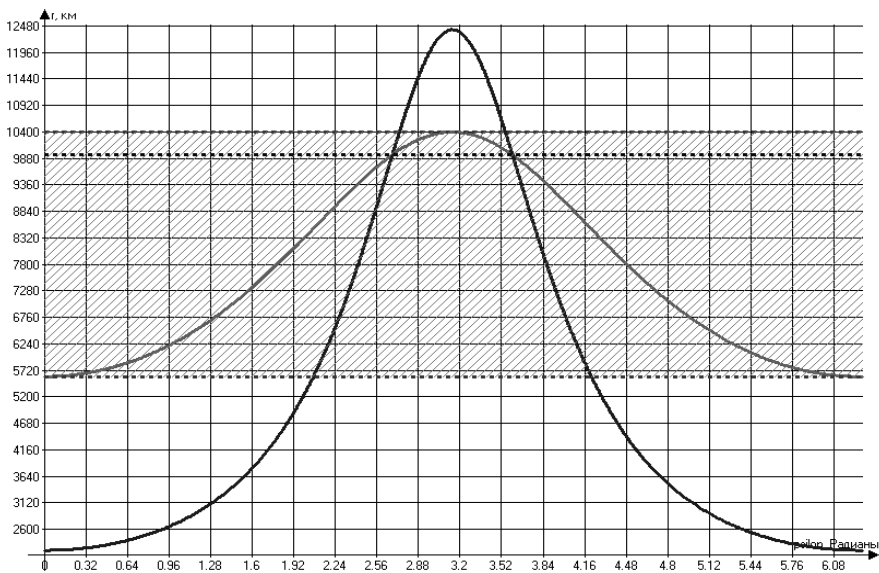
где  $q_{1,2} = a_{1,2} \cdot (1 - e_{1,2})$ ,  $Q_{1,2} = a_{1,2} \cdot (1 + e_{1,2})$  – соответственно перигейные (перигелийные) и апогейные (афелийные) расстояния первого и второго объектов.

Если  $D = \emptyset$ , то эквидистантных точек, находящихся на различных орбитах и удовлетворяющих (2), нет. В этом случае должно выполняться одно из двух неравенств  $q_1 > Q_2$  или  $q_2 > Q_1$ , что равносильно условию

$$\max\{q_1, q_2\} > \min\{Q_1, Q_2\}.$$

Последнее неравенство исключает возможность столкновения находящихся на таких орбитах космических объектов.

Область эквидистантных точек



**Область эквидистантных точек для объектов, находящихся на геоцентрических орбитах с большими полуосями  $a_1=8000$  км,  $a_2=7300$  км и эксцентриситетами  $e_1=0,3$  и  $e_2=0,7$**

На рисунку по осі абсцисс отложена истинная аномалия  $v$ , а по осі ординат – расстояние  $r$  объекта от фокуса орбиты. Если плоскость  $(v, r)$  рассматривать как двумерное фазовое пространство, то соотношения (2) дадут уравнения фазовых кривых, а точки их пересечения с прямой  $r = const \in D$  – две пары эквидистантных точек на орбитах  $E_1$  и  $E_2$ , а именно две точки на восходящих участках орбит и две на нисходящих. Особый интерес представляют точки пересечения самих фазовых кривых, о которых будет сказано несколько позже.

Далее для фиксированного  $r$  из (3) из соотношений (2) для истинных аномалий эквидистантных точек на восходящих участках орбит  $E_1$  и  $E_2$  получим

$$v_{1,2\text{восх}} = \arccos\left(\frac{p_{1,2} - r}{re_{1,2}}\right). \quad (4)$$

Для истинных аномалий ЭДТ на нисходящих участках орбит можно воспользоваться соотношениями

$$v_{1,2\text{нисх}} = 2\pi - v_{1,2\text{восх}}. \quad (5)$$

В эквидистантных точках с истинными аномалиями (4) для данного  $r$  объекты окажутся в следующие моменты времени:

– первое тело в ЭДТ на восходящем участке будет в момент времени

$$\tau(v_{1\text{восх}}) = \tau_{01} + \sqrt{\frac{p_1^3}{K}} \int_0^{v_{1\text{восх}}} \frac{d\eta}{(1 + e_1 \cos \eta)^2}; \quad (6)$$

– второе тело в эквидистантной точке на восходящей ветви орбиты будет в момент

$$\tau(v_{2\text{восх}}) = \tau_{02} + \sqrt{\frac{p_2^3}{K}} \int_0^{v_{2\text{восх}}} \frac{d\eta}{(1 + e_2 \cos \eta)^2}. \quad (7)$$

Аналогично для того же  $r$  первое тело в ЭДТ на нисходящем участке будет в момент

$$\tau(v_{1\text{нисх}}) = \tau_{01} + \sqrt{\frac{p_1^3}{K}} \int_0^{v_{1\text{нисх}}} \frac{d\eta}{(1 + e_1 \cos \eta)^2}, \quad (8)$$

а второе в эквидистантной точке нисходящего участка –

$$\tau(v_{2\text{нисх}}) = \tau_{02} + \sqrt{\frac{p_2^3}{K}} \int_0^{v_{2\text{нисх}}} \frac{d\eta}{(1 + e_2 \cos \eta)^2}. \quad (9)$$

Из изложенного следует, что в случае *одновременного* прохождения объектов через эквидистантные точки при заданном  $r$  выполняется не более двух из четырех нижеследующих равенств:

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{G}_{1\text{нисх}}) &= \tau(\mathcal{G}_{2\text{нисх}}); \\ \tau(\mathcal{G}_{1\text{нисх}}) &= \tau(\mathcal{G}_{2\text{восх}}); \\ \tau(\mathcal{G}_{1\text{восх}}) &= \tau(\mathcal{G}_{2\text{нисх}}); \\ \tau(\mathcal{G}_{1\text{восх}}) &= \tau(\mathcal{G}_{2\text{восх}}). \end{aligned} \quad (10)$$

Если хотя бы одно (в исключительных случаях два) из равенств (10) выполняется, то отсюда *вовсе не следует* факт столкновения космических объектов, поскольку истинность одного из равенств (10) есть лишь необходимое, но отнюдь не достаточное условие *возможного* столкновения. Ведь для столкновения требуется, чтобы объекты не просто в один и тот же момент времени оказались на равных расстояниях от общего фокуса, но и в одной и той же точке про-

странства, которая является общей, при данном  $r$ , для обеих орбит. Поэтому возникает необходимость оценки степени сближения в пространстве двух одновременно проходимых эквидистантных точек, что, вообще говоря, сделать несложно.

Действительно, пусть имеет место, например, третье из равенств (10), то есть при некотором  $r$  первый объект находится в эквидистантной точке на восходящем участке орбиты, а второй в этот же момент времени – в эквидистантной точке на нисходящей ветви своей орбиты. Тогда аргумент широты  $u_1$  в рассматриваемый момент времени для первого объекта будет равен

$$u_1 = v_{1\text{восх}} + \omega_1.$$

Соответственно для второго объекта получим

$$u_2 = v_{2\text{нисх}} + \omega_2.$$

Далее находим экваториальные прямоугольные координаты каждой из одновременно проходимых эквидистантных точек [1; 3]

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= r \left( \cos u_{1,2} \cos \Omega_{1,2} - \sin u_{1,2} \sin \Omega_{1,2} \cos i_{1,2} \right); \\ Y_{1,2} &= r \left( \cos u_{1,2} \sin \Omega_{1,2} + \sin u_{1,2} \cos \Omega_{1,2} \cos i_{1,2} \right); \\ Z_{1,2} &= r \sin u_{1,2} \sin i_{1,2} \end{aligned} \quad (11)$$

и расстояние  $\Delta$  между ними

$$\Delta = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}. \quad (12)$$

Выполнение одного из равенств (10) (в нашем предположении третьего) в сочетании с выполнением условия  $\Delta=0$  для соответствующих эквидистантных точек уже можно рассматривать как достаточное условие столкновения двух КО, рассматриваемых как материальные точки. В случае реальных объектов условие  $\Delta=0$  можно заменить менее строгим, имеющим вид  $\Delta \leq R_{\text{кр}1} + R_{\text{кр}2}$ , где  $R_{\text{кр}1,2}$  – критические радиусы объектов [2].

**Допустимые расстояния для области эквидистантных точек, организация алгоритма и некоторые особые случаи.** Из соотношения (3) следует, что множество находящихся на различных орбитах эквидистантных точек будет не пустым, если для  $r$  из (2) выполняется двойное неравенство (рисунок),

$$\max \{q_1, q_2\} \leq r \leq \min \{Q_1, Q_2\}, \quad (13)$$

где, как и ранее,

$$q_{1,2} = a_{1,2} \cdot (1 - e_{1,2}), \quad Q_{1,2} = a_{1,2} \cdot (1 + e_{1,2})$$

соответственно перигейные и апогейные расстояния объектов.

Из всего вышесказанного теперь можно сделать вывод, что для поиска моментов одновременного прохождения двумя КО эквидистантных точек следует для всех  $r$  из (13) вычислить величины (4), (5), затем времена (6) – (9). В случае выполнения одного из равенств (10) – вычислить (12) и по величине  $\Delta$  сделать вывод о наличии столкновения или тесного сближения вблизи эквидистантных точек.

Необходимо отметить, что не исключены случаи выполнения двух из четырех равенств (10) для одного и того же  $r$ , например четвертого и первого. Это будет иметь место, если время перелета от эквидистантных точек на восходящих участках орбит до эквидистантных точек на нисходящих участках одно и то же для каждого из объектов, то есть если  $I_1 = I_2$ , где

$$I_{1,2} = \sqrt{\frac{p_{1,2}^3}{K}} \int_{v_{1,2\text{восх}}}^{v_{1,2\text{нисх}}} \frac{dv}{(1 + e_{1,2} \cos v)^2}. \quad (14)$$

При необходимости можно рассмотреть и другие возможные случаи с получением соответствующих критериев.

Возможен также случай, когда при некотором  $r$  эквидистантные точки на восходящих и нисходящих участках орбит имеют равные истинные аномалии. Значения этих аномалий несложно получить из (2), положив  $v_1 = v_2$ . Указанному случаю соответствует проходящая через точки пересечения кривых пунктирная прямая на рисунке .

**Выводы.** Применение рассмотренного метода прогнозирования встречи КО в результате выделения области эквидистантных точек (13) позволяет избежать расчета расстояния (12) для всех без исключения точек обеих орбит. Такое «лобовое» решение задачи неизбежно потребует организации двойного цикла по истинным аномалиям и отрицательно скажется на быстродействии алгоритма.

В случае пустоты множества (3) рассмотренный метод позволяет без каких-либо вычислений определять пары софокусных эллиптических орбит, заведомо исключающих столкновения находящихся на них КО.

В случае возмущенного движения элементы орбиты есть функции времени. Кеплерова орбита, задаваемая элементами (1), касается истинной (возмущенной) орбиты в точке, где КО находился на момент получения орбитальных параметров (1). В течении некоторого промежутка времени (его длительность зависит от величины и характера возмущений), когда кеплерова орбита остается очень близкой к истинной, можно предположить применимость метода ЭДТ для невозмущенного случая. В дальнейшем фазовые кривые рисунка постепенно «плывут», меняют свою форму, и вычисление моментов прохождения телами ЭДТ усложняется необходимостью учета вариаций орбитальных параметров. Случай возмущенного движения, очевидно, представляет собой самостоятельную задачу и будет рассмотрен отдельно.

### Библиографические ссылки

1. Основы теории полета космических аппаратов [Текст] / под ред.: Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. – М.: Машиностроение, 1972. – 576 с.
2. **Лабуткина, Т. В.** Информационная система для задач анализа конфликтности многоэлементного множества орбитальных объектов [Текст] / Т. В. Лабуткина, А. Н. Петренко // Радиоэлектрон. та комп'ютер. системи. – 2013. – №3(62) – С. 92 – 101.
3. **Бордовицына, Т. В.** Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы [Текст] / Т. В. Бордовицына, В. А. Авдюшев – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2007. – 175 с.

*Надійшла до редколегії 14.05.2015*

УДК 678.049:[665.11+547.7]:678.074:678.01

**В. А. Федорук, К. Е. Варлан, Э. А. Спорягин**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **ВЛИЯНИЕ ЭФИРСОДЕРЖАЩИХ ПЛАСТИФИКАТОРОВ ИЗ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО СЫРЬЯ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СМЕСЕВЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИЙ**

**В результате реологических исследований высоконаполненных композиций на основе жидкого каучука СКН-10 КТР доказана возможность замены пластифи-**