

Библиографические ссылки

1. **Richard Boynton.** Using A Spherical Air Bearing To Simulate Weightlessness [Electronic resource] // Berlin, Space Electronics, Inc., 3–5 June 1996, 16 pages. URL:http://www.space-electronics.com/contentAssets/Literature/SAWE_Papers/Spherical_Gas_Bearing_Weightlessness.pdf (accessed 23.05.2016).
2. **Rees Fullmer.** The Development of a Small Satellite Attitude Control Simulator [Electronic resource] / R. Fullmer, G. Peterson, W. Holmans etc. // Utah State University, Logan UT, Departments of Mechanical and Aerospace Engineering and Electrical Engineering, 14 pages. URL:<http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2726&context=smallsat> (accessed 23.05.2016)
3. **Corey Whitcomb Crowell, Prof. David W. Miller.** Development and Analysis of a Small Satellite Attitude Determination and Control System Testbed [Electronic resource] // Department of Aeronautics and Astronautics, June 2011, 269 pages. URL: <http://ssl.mit.edu/publications/theses/SM-2011-CrowellCorey.pdf> (accessed 23.05.2016).
4. Презентація робота-шара в УдГУ [Електронний ресурс]. – Режим доступа: <http://lab.ics.org.ru/news/24-02-2012/prezentaciya-robota-shara-v-udgu/>

Надійшла до редколегії 23.05.2016

УДК 629.76. (0.75.8)

Ю. Д. Шептун, Т. О. Коваленко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

АНАЛІЗ ВИТРАТ ЕНЕРГІЇ НА КЕРУВАННЯ КОСМІЧНИМ СТУПЕНЕМ РАКЕТИ

Представлено результати досліджень проблем динаміки та рекомендації щодо удосконалення органів керування космічним ступенем (КС) ракети за критерієм мінімізації енерговитрат. Проналізовано кількість енергії, що витрачається на обнуління збурень параметрів кутового руху КС, обумовлених короткочасно діючими збурюючими силами та моментами. З використанням діаграм кореневих годографів характеристичних рівнянь ракети, методів класичного варіаційного обчислення, можливостей пакета програм Mathcad досліджено причинно-наслідкові зв'язки, відповідності між параметрами КС і зазначеними витратами енергії. Враховано інерційність і постійні часу виконуючих органів системи керування. У відомих науково-технічних публікаціях з проблем динаміки і керування ступенями ракет-носіїв зазначені причинно-наслідкові відповідності не описано і не використано. Висловлено рекомендації з вибору доцільної, в розумінні витрат енергії, ефективності виконуючих органів системи керування ступенів ракет-носіїв.

Ключові слова: удосконалення, космічний ступінь, динаміка, збурення, параметр, витрати енергії, кореневий годограф, виконуючий двигун, кількість енергії, інерційність, постійні часу.

© Ю.Д. Шептун, Т.О. Коваленко, 2016

Представлены результаты исследований проблем динамики и рекомендации по совершенствованию органов управления космической ступенью (КС) ракеты по критерию энергопотребления. Проанализировано количество энергии, затрачиваемой на обнуление возмущенный параметров движения КС, обусловленных краткосрочно действующими возмущающими силами и моментами. С использованием диаграмм корневых годографов характеристических уравнений ракеты, методов классического вариационного исчисления, возможностей пакета программ Mathcad исследованы причинно-следственные связи, соответствия между параметрами КС и упомянутыми затратами энергии. Учтены инерционность, постоянные времени исполнительных органов системы управления. В известных руководствах по проблемам динамики и управления РН эти связи не описываются и не используются. Высказаны рекомендации по выбору рациональной, в смысле минимизации затрат энергии, эффективности исполнительных органов системы управления.

Ключевые слова: усовершенствование, космическая ступень, возмущение, параметр, расход энергии, корневой годограф, исполнительный двигатель, количество энергии, инерционность, постоянные времени.

Results of researches of problems of dynamics and recommendations for improvement of the space stage (CS) rockets on the criterion of energy consumption are submitted. The amount of energy expended on the zeroing the perturbation motion parameters of the space stage of the rocket due to the short-acting perturbing forces and moments are analyzed. Graphs root locus of the characteristic equation of the rockets, the methods of classical calculus of variations, the capabilities of the software package Mathcad to establish causation between the parameters CS and energy costs are used. The inertia, the time constants of the executive of the jet engines of the control system are taken into account. In the well-known manuals on problems of dynamics and LV these causation are not described and are not used. Recommendations on choosing the rational, in the sense of minimizing the cost of energy, efficiency executive of the jet engines of the control system are submitted.

Keywords: improvement, space stage, dynamics, energy consumption, perturbation, parameters, root locus, executive, jet engine, cost of energy, inertia, time constants.

Постановка задачі. Забезпечення керованості ракети є одним з найважливіших завдань динамічного проектування, вирішення якого зводиться до вибору типу й ефективності органів керування. Ефективність органів керування оцінюється максимальним керуючим моментом, що створюється органами керування за їх максимального завантаження, або, що є таким самим – максимальним кутовим прискоренням ракети, обумовленим зазначеним керуючим моментом [1]. Важлива вимога – забезпечення керування з мінімальними витратами енергії (палива), або, що є тотожним, мінімальними керуючими моментами.

Органи керування повинні забезпечувати програмний рух ракети і відпрацювання короткочасно та тривало діючих на ракету збурюючих впливів. Момент $M_{кер}(t)$, що утворюється органами керування, умовно можна поділити на три незалежні, змінні за часом, частини

$$M_{кер} = M_{пр}(t) + M_{кор}(t) + M_{тр}(t).$$

Тут $M_{пр}(t)$ – програмний керуючий момент, необхідний для ведення ракети за програмною траєкторією. Якщо значення програмних кутових швидкостей, прискорень малі, то $M_{пр}$ за модулем також не є великим;

$M_{кор}(t)$ – складова керуючого моменту, що витрачається на відпрацювання наслідків короткочасно діючих збурюючих впливів – таких, що виникають і діють протягом перехідних режимів роботи динамічної системи: при виключенні (включенні) двигунної установки, поділі ступенів ракети, скиданні обтічників тощо. Наслідками дії таких впливів є “миттєві” збурення параметрів кутового і поступального рухів ракети;

$M_{mp}(t)$ – складова керуючого моменту, спрямована на відпрацювання тривало діючих на ракету збурюючих впливів. Ця складова повинна бути не меншою (більшою з урахуванням певного заданого запасу надійності) тривало діючого збурюючого впливу.

Можливості мінімізації складових M_{np} , M_{mp} суттєво обмежені. Можливості мінімізації $M_{кор}$, навпаки, в наявності і обумовлені тим, що наслідки короткочасно діючих впливів (збурення параметрів кутового і поступального рухів) відпрацьовуються практично після обнуління названих впливів: процеси відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху ракети описуються однорідними диференціальними рівняннями, процеси відпрацювання наслідків тривало діючих впливів – неоднорідними.

Задачу мінімізації енергії, що витрачається на обнуління “миттєвих” збурень параметрів руху ступенів ракет, в наявній науково-технічній літературі не висвітлено, тому вона є актуальною, особливо стосовно космічних ступенів ракет, маршові двигуни яких за програмою польоту багаторазово вимикаються, вмикаються.

У зв'язку з висловленим доцільно дослідити:

- причинно-наслідкові відповідності між проектними параметрами ракети (масово-інерційними, геометричними, двигунними) та особливостями (періодичний, аперіодичний) перехідних процесів;
- залежність кількості енергії, витрачаємої на відпрацювання збурень параметрів руху ракети в періодичних, аперіодичних режимах, від інерційності виконавчих органів системи керування, постійних часу, коефіцієнтів передачі та ін.

Огляд можливих збурених рухів космічних ступенів ракет.

За термінологією роботи [4], фактичний рух ракети є двічі збуреним, обумовленим наявністю “миттєво” діючих (протягом часу розділення ступенів, відділення обтічників, блоків та ін.) і постійно діючих збурюючих впливів. Перші викликають стрибкоподібні збурення параметрів руху ракети; для їх відпрацювання часто достатньо виконуючих органів незначної ефективності. Другі збурюють рух ракети неперервно, для їх компенсації, як правило, необхідні керуючі органи суттєво більшої ефективності.

Зазначимо, що у разі припустимості застосування методу “заморожених” коефіцієнтів [5], особливості відпрацювання стрибкоподібних збурень параметрів руху характеризує загальне рішення однорідного диференційного рівняння – математичної моделі руху ступеня; частинне рішення відповідного неоднорідного диференційного рівняння – усталений збурений рух ступеня під впливом постійно діючих збурень.

Зв'язок особливостей процесів відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху з ефективністю керуючих органів космічних ступенів ракети наочно відображають кореневі годографи характеристичних рівнянь математичних моделей ракети [1].

Побудуємо годограф, відповідний моделі (1) руху космічного ступеня РН [2]:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ \delta &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут ψ – кут ристання абсолютно жорсткого РН; k_0, k_1 – коефіцієнти підсилення; $K = P \cdot l \cdot J^{-1}$; P – вектор тяги керуючого двигуна; l – плече дії вектора P відносно центру мас ступеня; J – момент інерції ступеня відносно поперечної вісі, що проходить через центр мас ступеня.

Для визначеності покладено [3]:

$$k_0 = 10, k_1 = 5c, l = 3 м, J = 2200 кгс \cdot м \cdot c^2.$$

Характеристичне рівняння, відповідне системі (1), має вигляд

$$s^2 + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{2}$$

З рівняння (2) отримаємо:

– рівняння початкових точок кореневого годографа $s^2 = 0$, початкові точки $s_{1,2} = 0$,

– рівняння кінцевої точки кореневого годографа $k_1 \cdot s + k_0 = 0$, кінцева точка $Z = -k_0(k_1)^{-1}$,

– рівняння кратних точок годографа $\begin{vmatrix} s^2 & k_1 \cdot s + k_0 \\ 2 \cdot s & k_1 \end{vmatrix} = 0$, кратні точки

$$s_{1k} = 0, s_{2k} = 4.$$

Кореневий годограф показано на рис. 1. Площину годографа задано системою координат $ReS \ O \ Im S$. Показано основні точки годографа: початкові точки $s_{1,2} = 0$, що співпадають з початком системи координат O , кінцеву точку $Z = -2$ та кратну точку $B = -4$. Початкові точки відповідають значенню $K = 0$ в характеристичному рівнянні (2), кінцева точка – значенню $K = \infty$.

Дійсна вісь системи координат розбита на траєкторії коренів: дві парні $0, 2\pi$ та одну непарну π .

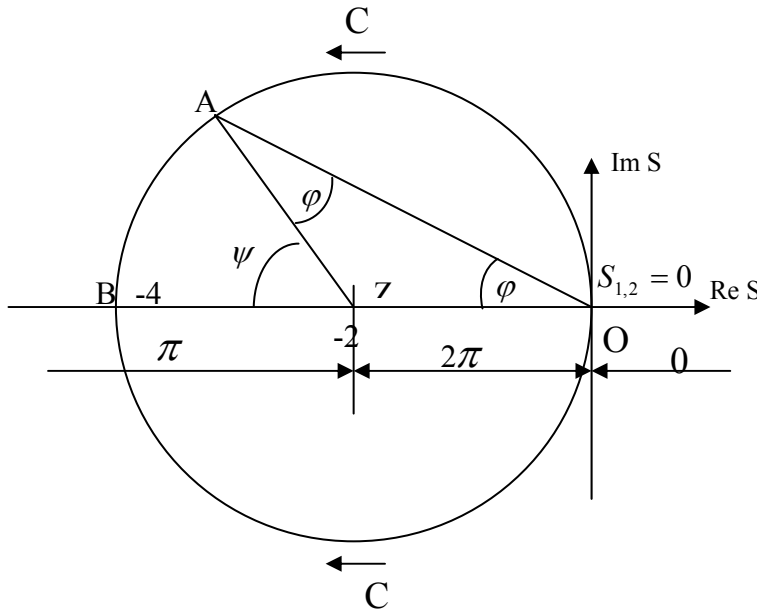


Рис. 1. Кореневий годограф, відповідний математичній моделі (1)

Непарними траєкторіями π годографа є також два півкола $OCAB$ та OCB , тому що точки цих півкіл задовольняють основному фазовому співвідношенню геометричного місця коренів рівняння (2) на площині $ReS O Im S$ [4]:

$$\sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} = N \cdot \pi, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Тут n, m – число початкових, кінцевих точок кореневого годографа відповідно, $\varphi_{\nu}, \psi_{\mu}$ – кути, які утворюють з позитивним напрямком дійсної вісі ReS вектори, проведені з початкових, кінцевих точок годографа в певну точку площини $ReS O Im S$.

Для точки A (рис. 1) умова (3) виконується при $N = 1$ і записується так

$$2 \cdot (\pi - \varphi) - (\pi - \psi) = 2 \cdot (\pi - \varphi) - (\pi - 2 \cdot \varphi) = 2\pi - 2\varphi - \pi + 2\varphi = \pi.$$

Таким чином, півкола $OCAB, OCB$ – непарні траєкторії π кореневого годографа.

Фізичному змісту задачі, що розглядається, відповідають позитивні значення $K > 0$.

Відповідно до теорії кореневого годографа, при зміні K від 0 до ∞ корені рівняння (2) виходять з початкових точок, рухаються по непарних траєкторіях до кінцевих точок або плинуть у нескінченність.

При зміні K від 0 до ∞ два кореня рівняння (2) виходять з кратної початкової точки O , рухаються по непарних траєкторіях π (це півкола $OCAB, OCB$) до кратної точки B . В кратній точці корені зливаються, утворюють кратний негативний дійсний корінь $s_{1k} = s_{2k} = -4$ (в числовому прикладі) і далі розходяться: один за траєкторією π рухається вправо до кінцевої точки Z , другий за траєкторією π плине вліво у нескінченність.

Значення K , відповідне точці B , в якій утворюється кратний корінь, визначимо за формулою параметра [1]

$$K = \frac{\prod_{\nu=1}^n |s^* - s_{\nu}|}{\prod_{\mu=1}^m |s^* - z_{\mu}|} \cdot (-1)^{(N+1)}. \quad (4)$$

Для точки B отримуємо $K = \frac{|-4 - 0| \cdot |-4 - 0|}{|-4 - (-2)|} \cdot (-1)^{1+1} = 8c^{-2}$.

Визначимо значення тяги керуючого двигуна, відповідне значенню $K = 8 c^{-2}$:

$$K = \frac{P \cdot l}{J}, P = \frac{K \cdot J}{l} = \frac{8c^{-2} \cdot 2200 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{3 \text{ м}} = 5,867 \cdot 10^3 \text{ кгс}.$$

Висновки з кореневого годографа, відповідного системі рівнянь (1):

1. Три параметри (K, k_0, k_1) визначають корені характеристичного рівняння. Параметр K – узагальнений, визначається через конструктивні параметри ступеня ракети.
2. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до значення, відповідного точці B , рис. 1 (в числовому прикладі $P_B = 5867$ кгс) корені характеристичного рівняння комплексні спряжені з негативними дійсними частками. Дійсні частки змінюються від нуля до $\alpha_B = -4$. Коефіцієнти ω при $j = \sqrt{-1}$ збільшуються від нуля до $\omega = 2c^{-1}$ і далі спадають до нуля (в числовому прикладі).
3. Кореням характеристичного рівняння $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$ відповідає рух динамічної системи, що є періодичним з частотою ω і ступенем стійкості руху α .
4. З п. 2 випливає, що зі збільшенням P від 0 до P_{\max} (в числовому прикладі $P = 5867$ кгс) частоти коливань ступеня РН спочатку збільшуються від 0 до ω_{\max} і далі спадають від ω_{\max} до 0 (в числовому прикладі від 0 до $\omega = 2c^{-1}$ і далі від $\omega = 2c^{-1}$ до 0).
5. Зі збільшенням P від значення P_B (в числовому прикладі $P_B = 5867$ кгс) корені характеристичного рівняння динамічної системи дійсні, негативні, рух ступеня – аперіодичний.
6. Рух ступеня РН стійкий при будь-яких значеннях параметрів K, k_0, k_1 математичної моделі (1).

Побудуємо годограф, відповідний моделі (5) руху космічного ступеня РН [2, 3],

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ T \cdot \dot{\delta} + \delta &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут T – постійна часу; для визначеності покладемо $T = 0,1$ с.

Характеристичне рівняння, відповідне системі (5), має вигляд

$$(T \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{6}$$

З рівняння (6) отримаємо:

– рівняння початкових точок годографа $T \cdot s^3 + s^2 = 0$, початкові точки $s_{1,2} = 0$,

$$s_3 = -\frac{1}{T} = -10,$$

– рівняння кінцевої точки годографа $k_1 \cdot s + k_0 = 0$, кінцева точка

$$z = -k_0(k_1)^{-1} = -2,$$

– рівняння кратних точок годографа $\begin{vmatrix} (T \cdot s^3 + s^2) & (k_1 \cdot s + k_0) \\ (T \cdot s^2 + 2 \cdot s) & k_1 \end{vmatrix} = 0$, кратна точка

$$s_{1k} = 0.$$

На рис. 2 показано основні точки годографа: початкові точки $s_{1,2} = 0$, що співпадають з точкою O – початком системи координат $ReS \ O \ ImS$, та $s_3 = -10$; кінцева точка $Z = -2$ і центр асимптот $a^* = -4$.

Центр асимптот годографа визначається формулою
$$a^* = \frac{\sum_{v=1}^n s_v - \sum_{\mu=1}^m z_{\mu}}{n - m}.$$

Тут s_v, z_{μ} – початкова і кінцева точки годографа; n, m – кількість початкових і кінцевих точок годографа.

Асимптоти $\pm \pi, \pm 2\pi$ розходяться з центру асимптот a^* під кутами $\varphi_v = \frac{\pi}{n - m} \cdot v$, де $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для прийнятих вихідних даних маємо

$$a^* = -6, \quad \varphi_v = \frac{\pi}{3}.$$

Початкові точки відповідають значенню $K = 0$ в характеристичному рівнянні (6), кінцева точка – значенню $K = \infty$.

Дійсна вісь системи координат розбита на траєкторії коренів: три траєкторії парні $0, 2\pi$ (дві траєкторії) та одну непарну π . При зміні K від 0 до ∞ два кореня рівняння (6) виходять з кратної початкової точки $s_{1,2}$, рухаються по непарних траєкторіях $\pm \pi$ і плинуть до асимптот a^*, a^*b . З початкової точки $s_3 = -10$ виходить корінь, який за непарною траєкторією π рухається в кінцеву точку $Z = -2$.

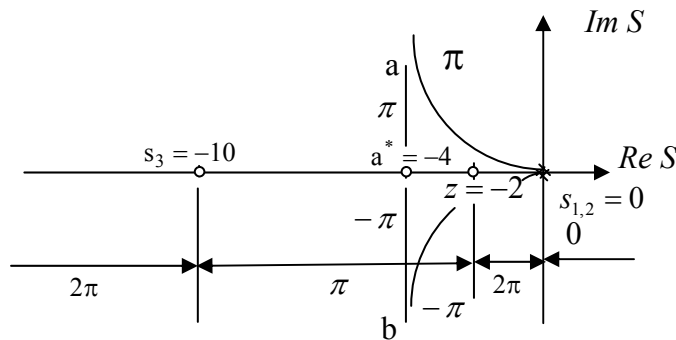


Рис. 2. Кореневий годограф, відповідний математичній моделі (5)

Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (5):

1. Зі збільшенням параметра K від нуля до нескінченності корені характеристичного рівняння комплексні спряжені $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$ з негативними дійсними частками.

2. При будь-яких значеннях $K > 0$ рух динамічної системи є періодичним з частотою ω і ступенем стійкості руху α .

Побудуємо годограф, відповідний моделі (7) руху космічного ступеня РН [2; 3]

$$\ddot{\psi} = -K \cdot \delta, \tag{7}$$

$$T^2 \cdot \ddot{\delta} + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot \dot{\delta} + \delta = k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}.$$

Тут ζ – коефіцієнт демпфірування; для визначеності покладемо $\zeta = 1$.
Характеристичне рівняння, відповідне системі (7), має вигляд

$$(T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{8}$$

З рівняння (8) отримуємо [4]:

– рівняння початкових точок годографа $T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2 = 0$,

– початкові точки $s_{1,2} = 0, s_{3,4} = -\frac{-2 \cdot T \cdot \zeta \pm \sqrt{4 \cdot T^2 \cdot \zeta^2 - 4 \cdot T^2}}{2 \cdot T^2}$,

$$s_{3,4} = -10.$$

– рівняння кінцевої точки годографа $k_1 \cdot s + k_0 = 0$,

– кінцева точка $z = -k_0 / (k_1)^{-1} = -2$,

– рівняння кратних точок годографа

$$\begin{vmatrix} T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2 & k_0 + k_1 \cdot s \\ 4 \cdot T^2 \cdot s^3 + 6 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^2 + 2 \cdot s & k_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Рівняння (9) має два дійсних кореня: 0 та -10 і два комплексних спряжених кореня: $-3 \pm 2,082 \cdot j$. Кратним точкам відповідають лише дійсні корені. Тому кратні точки годографа – це точки $s_{1k} = 0, s_{2k} = -10$.

Годограф, відповідний математичній моделі (7) кутового руху космічного ступеня РН [3], показано на рис. 3. Значення коренів, відповідні певним значенням параметра K , представлено в табл. 1.

Таблиця 1

№ з/п	K	$s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$	s_3	s_4
1	1	$-0.927 \pm 4.47 \cdot j$	-15.326	-2.820
2	1.5	$-0.593 \pm 5.962 \cdot j$	-16.241	-2.573
3	2	$-0.255 \pm 7.085 \cdot j$	-17.173	-2.317
4	2.5	$-0.061 \pm 7.897 \cdot j$	-17.88	-2.242
5	3	$0.349 \pm 8.586 \cdot j$	-18.503	-2.196

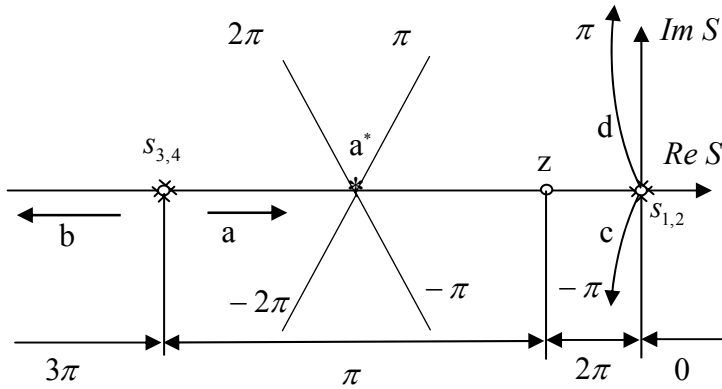


Рис. 3. Кореневий годограф, відповідний системі рівнянь (7)

Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (7):

1. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до нескінченності два нульових кореня характеристичного рівняння виходять з кратної початкової точки $s_{1,2}$, стають комплексними спряженими $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$, переходять з лівої півплощини в праву (ступінь РН стає за рухом нестійкою) і у нескінченності плинуть до асимптот $\pm \pi$ (дугові стрілочки c, d). Два дійсних кореня $s_{3,4} = -10$ виходять з кратної початкової точки $s_{3,4}$. Один іде вправо за непарною траєкторією π в кінцеву точку $z = -2$. Другий іде вліво за непарною траєкторією 3π у нескінченність (стрілочки a, b).

2. Режим відпрацювання ступенем РН стрибкоподібних збурень параметрів руху – коливальний. Частоти коливань зі збільшенням K збільшуються.

Побудуємо годограф, відповідний моделі (10) руху космічного ступеня РН [3],

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ (T_1 \cdot \dot{\delta} + 1) \cdot (T_2^2 \cdot \ddot{\delta} + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta \cdot \dot{\delta} + \delta) &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тут T_1, T_2 – постійні часу. Для визначеності покладемо $T_1 = 0,15, T_2 = 0,1, \zeta = 1$. Характеристичне рівняння, відповідне системі (10), має вигляд

$$(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{11}$$

Основні точки годографу $s_{1,2} = 0, s_{3,4} = 0, s_5 = -6,7, z = -2$. Центр асимптот і кут між асимптотами $a^* = -6, \varphi_v = \pi / 3$.

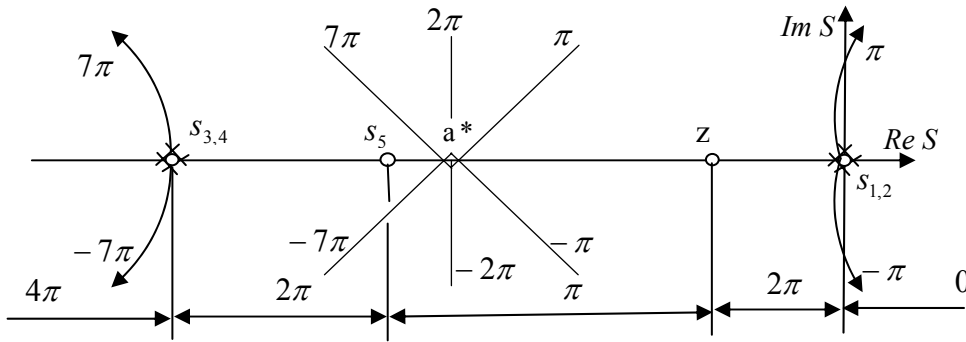


Рис. 4. Кореневий годограф, відповідний системі рівнянь (10)

Значення коренів, відповідні певним значенням параметра K , представлено в табл. 2.

Таблиця 2

№ з/п	K	$s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$	$s_{3,4} = \alpha \pm \omega \cdot j$	s_5
1	0.05	$-0.088 \pm 0.868 \cdot j$	$-0.213 \pm 1.249 \cdot j$	-272.731
2	0.1	$-0.093 \pm 0.654 \cdot j$	$-0.202 \pm 2.357 \cdot j$	-272.745
3	0.2	$-0.068 \pm 2.252 \cdot j$	$-0.226 \pm 0.955 \cdot j$	-272.745
4	0.3	$0.127 \pm 2.182 \cdot j$	$-0.422 \pm 1.165 \cdot j$	-272.745
5	4	$0.33 \pm 2.197 \cdot j$	$-0.624 \pm 1.262 \cdot j$	-272.745

Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (10):

1. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до нескінченності два нульових кореня характеристичного рівняння виходять з кратної початкової точки $s_{1,2}$, стають комплексними спряженими $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$ і у нескінченності плінуть до асимптот $\pm \pi$. Два дійсних кореня $s_{3,4} = -10$ виходять з кратної початкової точки $s_{3,4}$, стають комплексними спряженими $s_{3,4} = \alpha_3 \pm \omega_3 \cdot j$ і у нескінченності плінуть до асимптот $\pm 7\pi$.

Режим відпрацювання ступенем РН “миттєвих” збурень параметрів руху – коливальний. Частоти коливань зі збільшенням P збільшуються.

2. В перехідному процесі відпрацювання збурень параметрів руху ступеня РН проявляються дві властиві частоти коливань.

Витрати енергії на відпрацювання збурень. Розглянемо залежність кількості енергії, що витрачається на відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів кутового руху космічного ступеня РН від ефективності K керуючих органів ракети. Оцінку витрат енергії виконаємо на основі припущення, що кількість енергії, витрачаємої ракетним двигуном ступеня РН на відпрацювання “миттєвого”

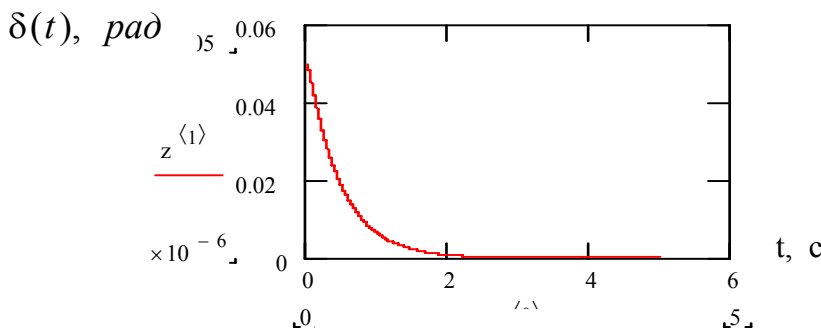
збурення координати кутового руху ψ_0 протягом заданого часу t_3 , пропорційна

$$Q(\delta) = \int_0^{t_3} |\delta(t)| dt.$$

Результати математичного моделювання процесів відпрацювання керуючими двигунами ступенів ракет “миттєвих” збурень координат кутового руху ракет представлено на рис. 5–8. В усіх випадках початкові значення збурень приймалися рівними $\psi(0) = 0,051$ рад (3 кутових градуса). Моделювання проводилося з використанням пакета програм Mathcad. На кожному рисунку представлені: початкове значення вектора стану ступеня РН (у форматі матриці – стовпчика координат), відповідного одній із зазначених вище математичних моделей (1), (5), (8), (10); функція Mathcad $D(t, x)$, яка повертає значення у вигляді вектора з n елементів, що містять перші похідні невідомих функцій; функція Mathcad $rkfixed$, що розраховує числові значення рішення системи диференціальних рівнянь; показники витрат енергії $q(\delta)$.

I. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (1)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -80 \cdot x_0 - 40 \cdot x_1 \end{pmatrix} \quad z := rkfixed(x, 0, 5, 10000, D)$$

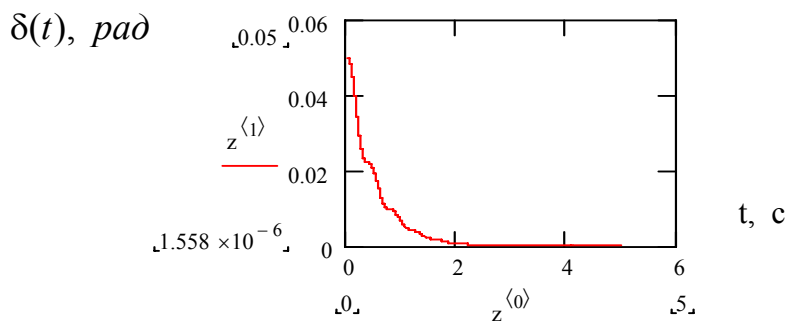


$$Q(\delta) = \int_0^4 |\delta(t)| dt = 4,85$$

Рис. 5. Графік зміни за часом функції $\delta(t)$, відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (1)

II. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (5)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -(0.15)^{-1} \cdot (80 \cdot x_0 + 40 \cdot x_1 + x_2) \end{pmatrix} \quad z := rkfixed(x, 0, 5, 10000, D)$$



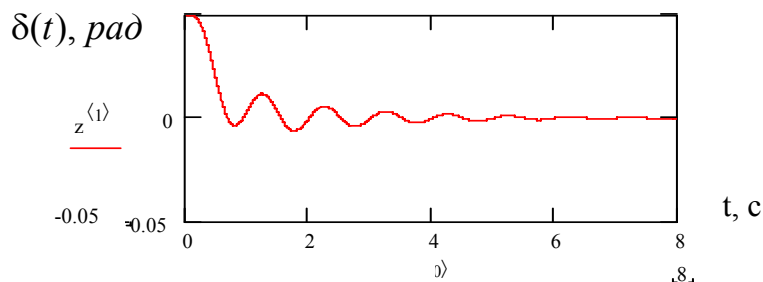
$$Q(\delta) = 4,631$$

Рис. 6. Графік зміни за часом функції $\delta(t)$, відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (5)

III. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (8)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -(0.01)^{-1} \cdot (16 \cdot x_0 + 8 \cdot x_1 + x_2 + 0.2 \cdot x_3) \end{bmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 8, 10000, D)$$



$$Q(\delta) = 5,505$$

Рис. 7. Графік зміни за часом функції $\delta(t)$, відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (8)

IV. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (10)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ (-0.0015)^{-1} \cdot (6 \cdot x_0 + 3 \cdot x_1 + x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.04 \cdot x_4) \end{bmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 200, 10000, D)$$

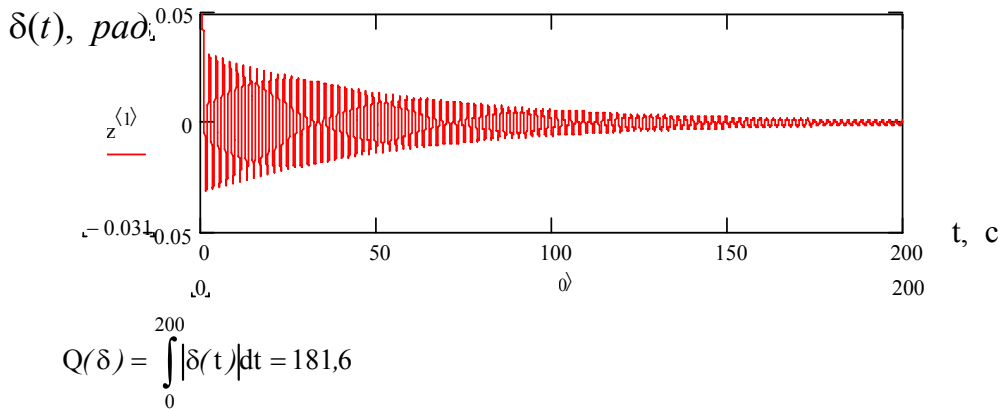


Рис. 8. Графік зміни за часом функції $\delta(t)$, відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (10)

Висновки. Процеси відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху ступеня РН суттєво залежать від структури і постійних часу слідкуючих приводів керуючого двигуна.

Аперіодичні перехідні процеси, умови стійкості руху і найменші витрати енергії на відпрацювання збурень параметрів руху реалізуються при використанні приводів нульового і першого порядків: рух приводу описується алгебраїчним або диференціальним першого порядку рівняннями.

В разі використання приводів другого і третього порядків (математичні моделі приводів – диференціальні рівняння другого, третього порядків) перехідні процеси характеризуються коливальністю і обмеженими запасами стійкості руху.

Бібліографічні посилання

1. **Бендриков Г.А.** Теория корней линейных автоматических систем / Г.А. Бендриков, К.Ф. Теодорчик. – М. : Машиностроение, 1965. – 156 с.
2. **Игдалов И.М.** Ракета как объект управления / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. акад. С. Н. Конюхова. – Д. : Арт-Пресс, 2004. – 542 с.
3. **Игдалов И. М.** Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и их космических ступеней / И. М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д. : Изд-во ДНУ, 2010. – 264 с.
4. **Карачаров К.А.** Введение в техническую теорию устойчивости движения / К.А. Карачаров, А.Г. Пилютик. – М. : Физматгиз, 1962. – 244 с.
5. **Лебедев А.А.** Баллистика ракет / А.А. Лебедев, Н.Ф. Герасюта. – М. : Машиностроение, 1970. – 224 с.

Надійшла до редколегії 27.04.2016