УДК 629.78.001

В. В. Авдєєв, В. В. Капцова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ РОЗРОБКИ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ КУТОВОГО ПОЛОЖЕННЯ СУПУТНИКА

З метою обгрунтованого вибору показників системи встановлено зв'язок у вигляді нескладних аналітичних співвідношень коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу при дії лінійного збурення із запасом стійкості, коефіцієнтами похибок, швидкодією і необхідною приведеною потужністю виконавчого пристрою для випадку плоского обертального руху в інерційній системі координат.

Ключові слова: перехідний процес, критерій якості, похибки, швидкодія.

С целью обоснованного выбора показателей системы установлена связь в виде несложных аналитических соотношений коэффициентов критерия качества переходного процесса при воздействии линейного возмущения с запасом устойчивости, коэффициентами ошибок, быстродействием и необходимой приведенной мощностью исполнительного устройства для случая плоского вращательного движения в инерциальной системе координат.

Ключевые слова: переходный процесс, критерий качества, погрешности, быстродействие.

In order of grounded choice of systems indices, relationship as simple analytical expressions for coefficients of a performance criterion of transient process by a linear disturbance impact with stability factor, error quotient, response speed and a necessary normalized power of execution unit for case of a plane rotary motion in inertial coordinate system is established.

Keywords: transient process, performance criterion, stabilization errors, operating speed.

Необхідне для функціонального призначення супутника забезпечення заданого обертального руху має багато специфічних особливостей, тому цьому питанню присвячено десятки робіт, зокрема, [2–5]. Описано методи визначення фактичного кутового положення з використанням таких орієнтирів як лінія горизонту Землі, її магнітне поле, Сонце, інші небесні світила, а також сигналів навігаційних космічних апаратів. Визначено джерела збурювалдьних кутових прискорень та проведено їхню оцінку залежно від параметрів супутника і орбіти. Для вісесиметричного супутника, якому надається обертальний рух навколо певної осі в інерційному просторі, складено диференційні рівняння еволюційного руху, отримано кінцеві кінематичні параметри і встановлено положення рівноваги відповідно до еліпсоїда інерції [7]. Проведено аналіз динамічних характеристик процесів орієнтації і стабілізації з використанням різних видів виконавчих пристроїв, описано способи забезпечення асимптотичної стійкості і компенсації зовнішніх та параметричних збурень. Проведено дослідження нелінійної системи стабілізації заданого режиму обертального руху мікросупутника в орбітальній системі координат з використанням магнітного поля Землі. Шляхом моделювання визначено кількісні характеристики точності та швидкодії. Коефіцієнти закону регулювання вибираються виходячи із умови бажаної швидкості переходу до заданого режиму руху.

У лінійних системах управління для визначення закону регулювання переважно знайшли використання перетворення Лапласа, передатні функції, частотні характеристики, кореневі годографи і аналітичні методи, де за основу береться критерій якості перехідного процесу. При проектуванні системи стабілізації (СС) кутового положення супутника для забезпечення заданих показників нерідко виникає необхідність прийняття компромісних рішень, зокрема, у процесі визначення параметрів контуру корекції – закону регулювання.

До основних показників СС прийнято відносити коефіцієнти помилок при дії збурювальних факторів, запас стійкості та якість перехідних процесів, яку кількісно оцінюють інтегральним критерієм.

У даній роботі ставиться задача встановлення зв'язку між коефіцієнтами критерію якості перехідного процесу та його тривалістю, запасом стійкості і коефіцієнтами похибок стабілізації кутового положення супутника при дії постійного та лінійно зростаючого збурювального прискорення. Наявність такого зв'язку дасть можливість приймати обґрунтовані компромісні рішення про призначення різних показників СС.

З метою можливості отримання в аналітичному вигляді оцінки показників СС, модель її об'єкта управління (обертальний рух супутника в одній із площин) прийнято в найбільш простому вигляді:

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u + c \cdot m \,, \tag{1}$$

де координати вектора x – це кут повороту та кутова швидкість; u, m – кутові прискорення, що створюються виконавчим пристроєм (ВП) і дією збурень відповідно;

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

У задачах стабілізації критерій якості перехідного процесу приймається у вигляді [1; 6]:

$$I = \int_{t}^{t+T_p} x^T(\tau) \cdot \beta \cdot x(\tau) \cdot d\tau + \int_{t}^{t+T_p} u^T(\tau) \cdot k^{-1} \cdot u(\tau) \cdot d\tau \,, \tag{3}$$

де t – поточний час, T_p – тривалість інтервалу оцінки якості перехідного процесу,

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Оптимальне управління u, яке забезпечує мінімум критерію (3), визначається методом аналітичного конструювання регуляторів [1] при умові повної керованості системи (1), спираючись на матриці a, b, β, коефіцієнт k та матрицю S, елементи якої знаходяться шляхом розв'язку матричного диференційного рівняння Ріккаті у зворотному часі. Необхідна і достатня умова повної керованості об'єкта управління, за Калманом [6], для прийнятої в цій роботі моделі є такою: ранг блочної матриці $[b : ab]$ повинен дорівнювати порядку системи (1), тобто

$$rank[b : ab] = 2 = rank\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Як видно з (4), детермінант матриці (4) не дорівнює нулю, отже умова повної керованості виконується.

Матричне диференційне рівняння Ріккаті у зворотному часі має вигляд:

$$\dot{S} - S \cdot a - a^T \cdot S + S \cdot b \cdot k \cdot b^T \cdot S = \beta \,, \qquad (5)$$

його розв'язок відносно матриці S при нульових початкових значеннях дає можливість визначити оптимальне управління

$$u = -k \cdot b^T \cdot S \cdot x = -k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k \cdot \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k \cdot (S_{21} \cdot x_1 + S_{22} \cdot x_2). \qquad (6)$$

Із урахуванням (2) матричне рівняння (5) еквівалентне системі з трьох нелінійних диференційних рівнянь ($S_{12} = S_{21}$):

$$\dot{S}_{11} = \beta_{11} - k \cdot S_{12}^2, \quad \dot{S}_{12} = S_{11} -, k \cdot S_{12} \cdot S_{22} \quad \dot{S}_{22} = \beta_{22} - k \cdot S_{22}^2 + 2S_{12}. \qquad (7)$$

Розв'язок диференційних рівнянь (5), (7) при зростанні інтервалу інтегрування, тривалість якого залежить від елементів матриці β критерію (3), наближається до усталених значень $\bar{S}$. Вони можуть бути знайдені з алгебраїчного матричного рівняння Лур'є:

$$\bar{S} \cdot a + a^T \cdot \bar{S} - \bar{S} \cdot b \cdot k \cdot b^T \cdot \bar{S} = -\beta \,. \qquad (8)$$

Беручи до уваги, що $\bar{S}_{12} = \bar{S}_{21}$, з рівнянь (8) знаходимо:

$$\bar{S}_{11} = \sqrt{\beta_{11} \cdot (2\sqrt{\beta_{11}/k} + \beta_{22})}, \quad \bar{S}_{12} = \sqrt{\beta_{11}/k}, \quad \bar{S}_{22} = \sqrt{(2\sqrt{\beta_{11}/k} + \beta_{22})/k}\,, \qquad (9)$$

але для математичної моделі (1) в управління u (6) входить тільки друга і третя із величин (9), при цьому диференційне рівняння СС матиме вигляд:

$$\dot{x} = a^* \cdot x + c \cdot m, \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cdot \bar{S}_{12} & -k \cdot \bar{S}_{22} \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Від матриці a^* залежать такі динамічні характеристики системи як запас стійкості η, тривалість перехідного процесу T_p та коефіцієнти помилок.

Як відомо, під запасом стійкості η мається на увазі відстань від уявної осі на площині коренів характеристичного полінома (ХП) матриці a^* до найближчого кореня.

Для випадку дійсних коренів ХП, коли має місце нерівність

$$\beta_{22} \cdot \sqrt{k} - 2\sqrt{\beta_{11}} > 0\,, \qquad (11)$$

після нескладних перетворень отримуємо залежність запасу стійкості СС від коефіцієнтів критерію (3) $\beta_{11}, \beta_{22}, k$:

$$\eta_d = \left[\frac{\beta_{22} \cdot k}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta_{11}}{\beta_{22}^2 \cdot k}} \right) \right]^{0.5}. \qquad (12)$$

Коли нерівність (11) не виконується (комплексні корені ХП), то запас стійкості

$$\eta_k = \left[\sqrt{k} \cdot (\beta_{22}\sqrt{k} + 2\sqrt{\beta_{11}})/4\right]^{0.5}. \quad (13)$$

Порівняння залежностей (12) і (13) показує, що більший запас стійкості має місце, коли нерівність (11) не виконується, тобто для співвідношення коефіцієнтів критерію (3), при якому корені ХП будуть комплексними (рис. 1).

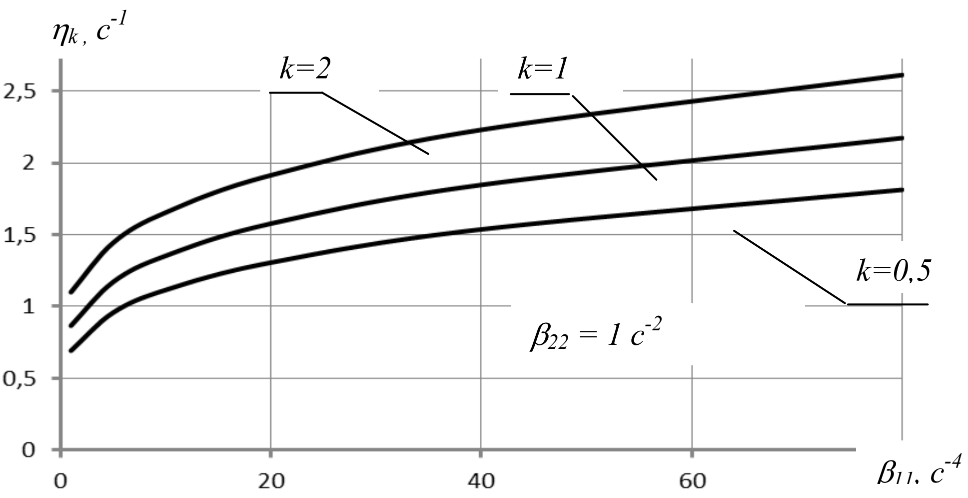

Рис. 1. Запас стійкості на площині коренів ХП

Якщо за тривалість перехідного процесу T_p прийняти інтервал часу від початку дії збурення до досягнення 95 % усталеного значення, то визначена чисельним шляхом похибка відомої оцінки $T_p = 3/\eta_k$ знаходиться у діапазоні -35 ... +35 % (рис. 2).

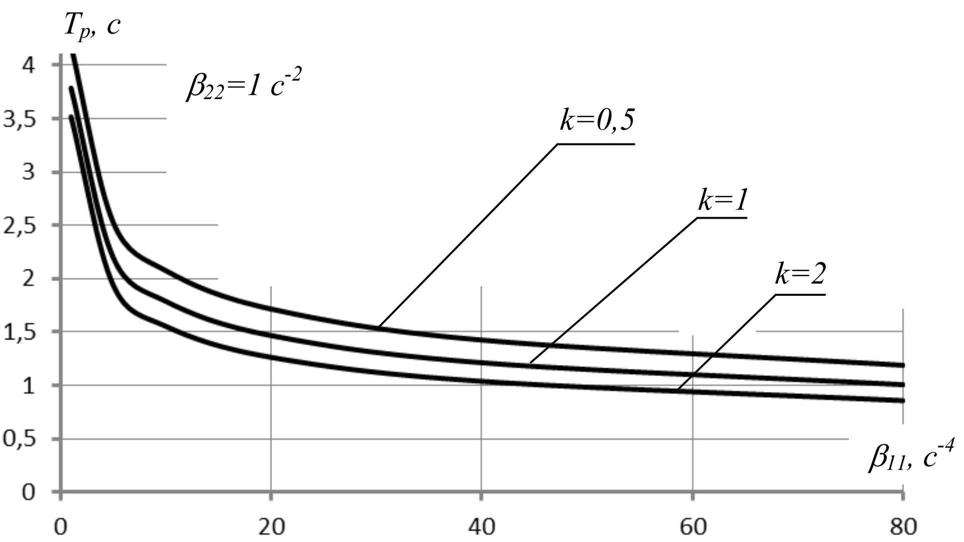

Рис. 2. Тривалість перехідного процесу

Залежність векторів коефіцієнтів помилок СС від коефіцієнтів критерію (3) встановимо для випадку, коли у рівнянні (1) збурювальне прискорення залежить від часу лінійно:

$$m = m_0 + \dot{m}_0 \cdot t . \quad (14)$$

При цьому визначаються тільки два вектори коефіцієнтів помилок, які залежать від матриць, що входять у рівняння (2), (10):

$$ER_0 = -(a^*)^{-1} \cdot c, \quad ER_1 = -(a^*)^{-2} \cdot c . \quad (15)$$

Коли на СС діє збурювальне прискорення (14), то вектори (15) визначають її стан x_k після закінчення перехідного процесу:

$$x_k = \dot{m}_0 \cdot (ER_0 \cdot t + ER_1) + ER_0 \cdot m_0 .$$

З урахуванням (9) після нескладних перетворень встановлюємо залежність векторів (15) від коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу (3):

$$ER_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k \cdot \beta_{11}}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ER_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\beta_{11}} \sqrt{\dfrac{2\sqrt{\beta_{11}} + \beta_{22}\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{k \cdot \beta_{11}}} \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Як видно з (16), похибки стабілізації кутового положення супутника обернено пропорційні коефіцієнтам β_{11} та k критерію (3) та пропорційні коефіцієнту β_{22} (рис. 3, 4).

Якщо пріоритетним показником СС є статична похибка $\Delta\varphi$ компенсації постійного збурювального прискорення m_0, то, виходячи із умови кратних коренів ХП матриці (10), при яких має місце найбільший запас стійкості η_{max} на площині коренів, можна встановити зв'язок η_{max} з коефіцієнтом похибки ER_{01} (16) і, відповідно, з величиною кута повороту супутника при дії збурення m_0, а також з коефіцієнтами β_{11}, k критерію якості перехідного процесу:

$$\eta_{max} = \sqrt{1 / ER_{01}} = \sqrt{m_0 / \Delta\varphi} = (k \cdot \beta_{11})^{0.25} . \quad (17)$$

Встановимо залежність потужності ВП, необхідної для забезпечення заданої орієнтації супутника, від коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу (3). Елементарна робота ВП дорівнює добутку його обертального моменту на елементарний кут повороту, тому приведена поточна потужність P в перерахунку на одиницю моменту інерції та одиницю початкового відхилення x_{10} від заданої орієнтації визначається добутком обертального прискорення (6), яке створює ВП, на кутову швидкість (координата x_2 вектора стану):

$$P = -k \cdot (\bar{S}_{12} \cdot x_1 + \bar{S}_{22} \cdot x_2) \cdot x_2 . \quad (18)$$

Розв’язок системи (1) при початковій умові $x_{10} \neq 0$ для випадку комплексних коренів ХП $-\alpha \pm j \cdot \beta, (j^2 = -1)$, коли має місце більший запас стійкості у порівнянні з дійсними коренями, такий:

$$x_1(t) = x_{10} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot (\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t + \cos\beta t); \quad x_2(t) = -x_{10} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin\beta t \,. \quad (19)$$

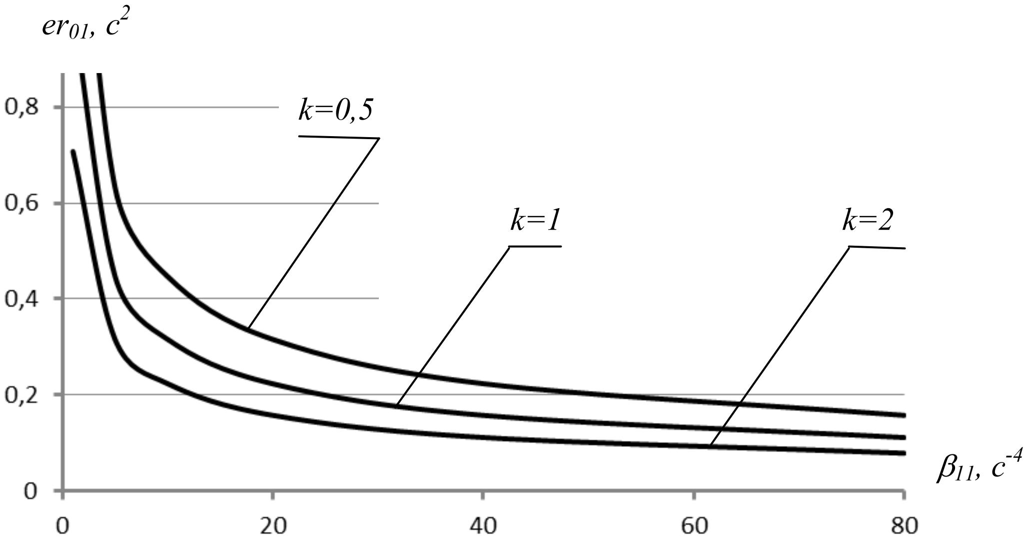

Рис. 3. Коефіцієнт похибки при постійному збурювальному прискоренні

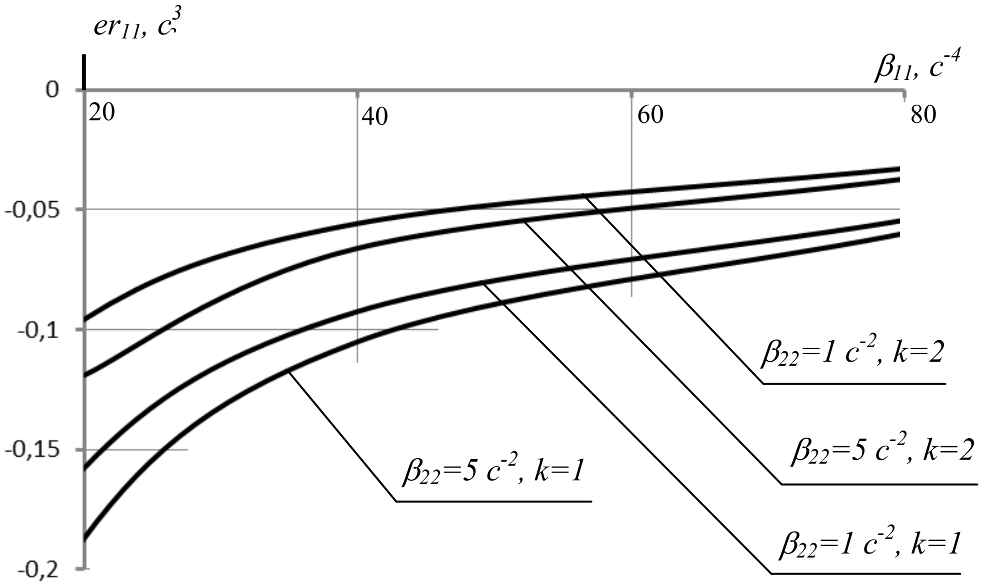

Рис. 4. Коефіцієнт похибки при лінійному збуренні

Відповідно до поняття запасу стійкості на площині коренів ХП $\alpha = \eta_k$ (13), $\beta = (2\sqrt{k\beta_{11}} - \beta_{22}k)/2$. Беручи до уваги, що $\alpha^2 + \beta^2 = k \cdot \bar{S}_{12}$

і $\alpha = k \cdot \bar{S}_{22} / 2$ з урахуванням (18), (19) приведену потужність ВП отримаємо у вигляді:

$$P = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\beta} e^{-2\alpha t} (\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t) \cdot \sin \beta t . \quad (20)$$

Співвідношення (20) показує, що максимальне значення потужності матиме місце на початковому інтервалі часу компенсації відхилення і його величина, відповідно до (9), є пропорційною коефіцієнтам k, β_{11} критерію (3) та обернено пропорційною коефіцієнту β_{22} (рис. 5).

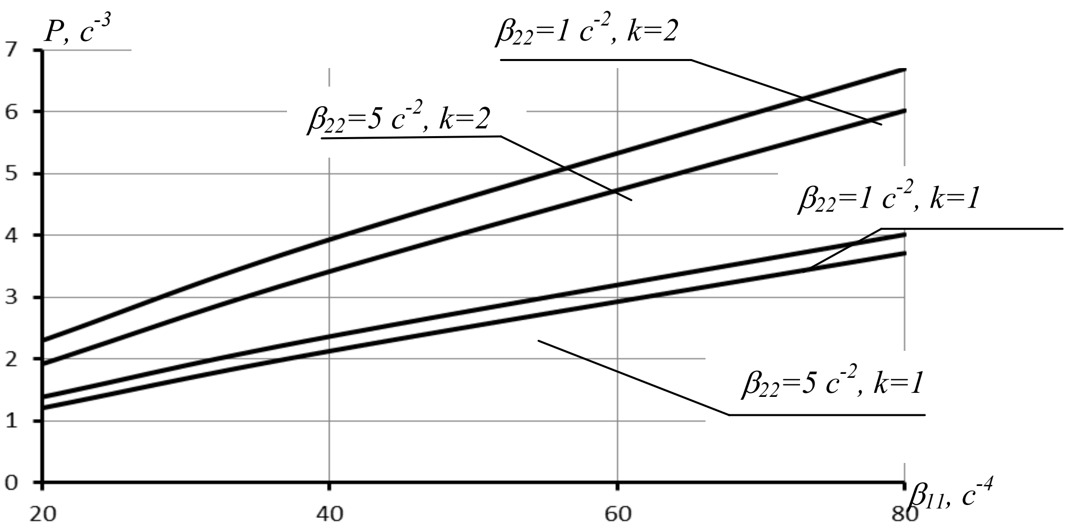

Рис. 5. Приведена потужність виконавчого пристрою

Висновки. Методом аналітичного конструювання контурів управління – шляхом розв’язку матричного алгебраїчного рівняння Лур’є – отримано залежність обертального прискорення (6), (9), що створюється виконавчим пристроєм СС, від коефіцієнтів $\beta_{11}, \beta_{22}, k$ критерію (3), який кількісно характеризує якість перехідного процесу.

Встановлено зв'язок між коефіцієнтами $\beta_{11}, \beta_{22}, k$ критерію (3) і запасом стійкості (12), (13), тривалістю перехідного процесу, векторами коефіцієнтів похибок (16) та приведеною потужністю виконавчого пристрою (9), (20), необхідною для компенсації відхилення положення супутника від зданої орієнтації. Показано, що запас стійкості пропорційний коефіцієнтам β_{11}, k, відповідно, тривалість перехідного процесу обернено пропорційна цим коефіцієнтам; абсолютні величини похибок пропорційні коефіцієнту β_{22} і обернено пропорційні коефіцієнтам β_{11}, k; отримано обмеження зверху запасу стійкості на площині коефіцієнтів характеристичного полінома (17), коли пріоритетним показником СС є статична похибка при дії постійного збурювального обертального моменту.

Результати можуть бути використані для обґрунтування вибору показників системи управління обертальним рухом супутника на початку її розробки.

Наступний етап дослідження – це встановлення зв’язку між показниками СС для моделі об’єкта управління, у якій повніше враховано особливості його роботи.

Бібліографічні посилання

1. **Красовский А.А.** Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А. А. Красовский. – М. : Машиностроение, 1969. – 240 с.
2. **Лебедев Д. В.** Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов / Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко. – К., Наук. думка, 2006. – 300 с.
3. **Павловський М.А.** Системи керування обертальним рухом космічних апаратів: підручник / В. П. Горбулін, О. М. Клименко. – К., Наук. думка, 1997. – 200 с.
4. **Пятак И.А.** Проектирование систем ориентации и стабилизации космических аппаратов : уч. пособ. / И. А. Пятак. – Дніпропетровськ, Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2005. – 60 с.
5. **Раушенбах Б.В.** Управление ориентацией космических аппаратов / Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь. – М. : Наука, 1974. – 600 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.
7. **Ovchinnikov M. Ju.** New one-axis magnetic attitude control in absence of magnetometer readings / M. Ju. Ovchinnikov, D. Roldugin, S. Tkachev, S. Karpenko. – International astronautically congress. – C 1.3.1. – 2014. – 8 p.

Надійшла до редколегії 05.02.2016

УДК 519.8

В. Л. Волошко, Л. В. Волошко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПЛАСТИНИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Досліджено задачу знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння, для розв’язування якої використовується один з варіантів градієнтного методу. На кожному кроці ітераційного процесу розв’язується лінійна крайова задача, яка за допомогою методу потенціалу зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Ефективність алгоритму підтверджується високою точністю отриманих чисельних результатів.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, метод потенціалу, градієнтний метод, оптимальне керування.

Исследована задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения, для решения которой используется один из вариантов градиентного метода. На каждом шаге итерационного процесса решается линейная граничная задача, которая с помощью метода потенциала сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эффективность алгоритма подтверждается высокой точностью полученных численных результатов.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод потенциала, градиентный метод, оптимальное управление.