

Результати можуть бути використані для обґрунтування вибору показників системи управління обертальним рухом супутника на початку її розробки.

Наступний етап дослідження – це встановлення зв'язку між показниками СС для моделі об'єкта управління, у якій повніше враховано особливості його роботи.

Бібліографічні посилання

1. **Красовский А.А.** Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А. А. Красовский. – М. : Машиностроение, 1969. – 240 с.
2. **Лебедев Д. В.** Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов / Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко. – К., Наук. думка, 2006. – 300 с.
3. **Павловський М.А.** Системи керування обертальним рухом космічних апаратів: підручник / В. П. Горбулін, О. М. Клименко. – К., Наук. думка, 1997. – 200 с.
4. **Пятак И.А.** Проектирование систем ориентации и стабилизации космических аппаратов : уч. пособ. / И. А. Пятак. – Дніпропетровськ, Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2005. – 60 с.
5. **Раушенбах Б.В.** Управление ориентацией космических аппаратов / Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь. – М. : Наука, 1974. – 600 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.
7. **Ovchinnikov M. Ju.** New one-axis magnetic attitude control in absence of magnetometer readings / M. Ju. Ovchinnikov, D. Roldugin, S. Tkachev, S. Karpenko. – International astronautically congress. – С 1.3.1. – 2014. – 8 p.

Надійшла до редколегії 05.02.2016

УДК 519.8

В. Л. Волошко, Л. В. Волошко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПЛАСТИНИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Досліджено задачу знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння, для розв'язування якої використовується один з варіантів градієнтного методу. На кожному кроці ітераційного процесу розв'язується лінійна крайова задача, яка за допомогою методу потенціалу зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Ефективність алгоритму підтверджується високою точністю отриманих чисельних результатів.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, метод потенціалу, градієнтний метод, оптимальне керування.

Исследована задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения, для решения которой используется один из вариантов градиентного метода. На каждом шаге итерационного процесса решается линейная граничная задача, которая с помощью метода потенциала сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эффективность алгоритма подтверждается высокой точностью полученных численных результатов.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод потенциала, градиентный метод, оптимальное управление.

Problem of optimal right-hand side function finding for inhomogeneous biharmonic equation has been investigated. It was solved with one of the gradients methods. Linear problem was solved on every step of the iterative process. With the help of potential method this linear problem has been reduced to the system of Fredholm first kind integral equations. The effectiveness of algorithm was confirmed by high accuracy of obtained calculations.

Keywords: biharmonic equation, potential method, gradient method, optimal control.

У машинобудуванні пластини складної форми використовуються як силові елементи конструкцій. Процес проектування та виробництва виробів у галузі ракетно-космічної техніки призводить до побудови математичних моделей складних фізичних явищ.

По суті, це постановка та розв'язування задач оптимального керування параметрами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Обране рівняння разом з граничними та початковими умовами зазвичай складають основу математичної моделі об'єкта, що підлягає аналізу [4]. За допомогою різних варіантів градієнтних методів успішно розв'язуються задачі керування параметрами диференціальних рівнянь та оптимального розбиття множин [2]. У роботі [3] наведено типи та характеристика основних обернених задач, вказано на некоректність як основну їх математичну особливість. У цій же роботі розглянуто способи оптимізації параметрів цих задач разом з усуненням їх некоректності. Проте задачі оптимального керування системами, які описані бігармонічними рівняннями, для областей складної форми є мало вивченими. Тому в роботі розглянуто коефіцієнтну задачу оптимізації правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Одним із факторів, який істотно її ускладнює, є неканонічність форми області визначення шуканих функцій. Зрозуміло, що така задача може бути розв'язана лише із застосуванням методів обчислювальної математики.

Без точного розв'язку лінійної задачі, неможливо застосувати градієнтний метод, побудувати збіжний ітераційний процес, з потрібною точністю отримати розв'язок оптимізаційної задачі.

Успішно подолати цю проблему дозволяє алгоритм розв'язування лінійної крайової задачі за допомогою граничних інтегральних рівнянь. Аналіз отриманих розв'язків, їх точність, простота алгоритму, затрачений машинний час свідчать про перспективність застосування цього підходу до інших граничних задач математичної фізики.

Постановка основної задачі. Розглянемо неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

з граничними умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де замкнутий контур Γ оточує область $\Omega \in R^2$, функції крайових умов $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in L^2(\Gamma)$ задані на контурі Γ , n – внутрішня нормаль у точці $(x, y) \in \Gamma$. Функція правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння

$f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$ задана в області Ω , де \bar{B} – деяка, обмежена певними умовами, замкнена підмножина функціонального простору. Функція $w(x, y) \in C^4(\bar{\Omega})$ є розв’язком задачі (1) – (2). В [7] доведено існування і єдиність розв’язку цієї задачі.

Очевидно, що розв’язок задачі (1) – (2) залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. У припущенні, що функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ задані, поставимо задачу знаходження такої функції $f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy,$$

де $w(x, y; f(x, y))$ – розв’язок крайової задачі (1) – (2), який відповідає функції правої частини рівняння (1).

Скорочено задача записується таким чином:

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}}. \tag{3}$$

Зауваження. Частинним випадком задачі (1) – (2) є наведена нижче задача теорії пластин:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega \\ w = \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{dw}{dn} &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \\ I(f(\cdot, \cdot)) &= \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}}, \end{aligned}$$

де Ω – серединна площа пластини, обмежена контуром Γ , $q(x, y)$ – поперечне навантаження на пластину, $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, h – товщина пластини, E – модуль пружності першого роду і σ – коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови означають, що точки контура пластини не переміщуються $\varphi(x, y) = 0$, а кут нахилу їх закріплення визначений, тобто $tg(\alpha(x, y)) = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$. Задача полягає у відшуканні такого навантаження $q(x, y)$, щоб згин у кожній точці пластини був якомога меншим з урахуванням заданих крайових умов (рис. 1).

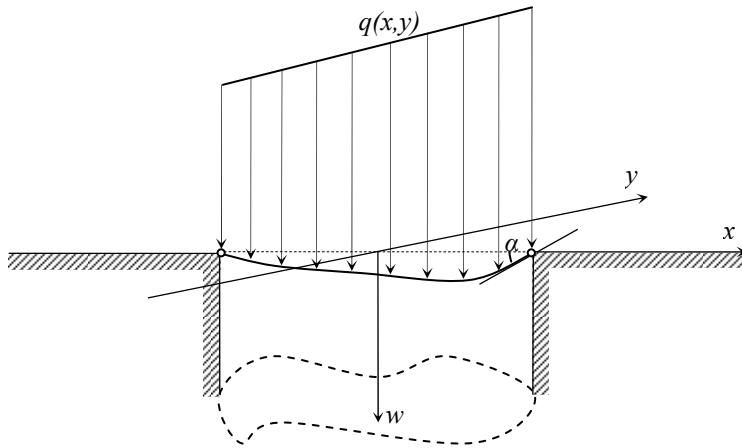


Рис. 1. Згин пластини під дією навантаження $q(x,y)$

Важливою складовою розв’язку задачі (1) – (3) є лінійна задача (1) – (2). Тому спочатку розглянемо алгоритм її розв’язування із застосуванням методу потенціалу.

Метод розв’язування лінійної крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння. Згідно з [4], розв’язок задачі (1) – (2) будемо шукати у вигляді

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y), \tag{4}$$

Функція $w_1(x, y)$ є частинним розв’язком неоднорідного бігармонічного рівняння

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \tag{5}$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, (x, y) – точка спостереження, (ξ, η) – змінна інтегрування і функція $w_2(x, y)$ є розв’язком задачі для однорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta w_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{6}$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} w_2 &= \varphi(x, y) - w_1(x, y), \\ \frac{dw_2}{dn} &= \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y), \end{aligned} \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{7}$$

Розв’язок задачі (6) – (7) є сумою бігармонічних потенціалів [7]

$$w_2(x, y) = \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma, \tag{8}$$

де $\mu_1, \mu_2 \in L^2$ – поки що довільні і невідомі функції щільності, ν – внутрішня нормаль у точці $(\xi, \eta) \in \Gamma$.

Розв'язок (8) має задовольняти крайовим умовам (7), що призводить до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} r^2 \ln r \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) = \\ \quad = \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n \partial v} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) = \\ \quad = \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

звідки будуть знайдені $\mu_1(\xi, \eta)$, $\mu_2(\xi, \eta)$. Цю систему запишемо в матричному вигляді

$$\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) \Big|_{(x,y) \in \Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де матричне ядро

$$A(\xi, \eta; x, y) = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \\ \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) & \frac{\partial}{\partial n \partial v} (r^2 \ln r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 \\ \partial \tilde{G}_1 & \partial \tilde{G}_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \end{pmatrix} = (\tilde{G}_1 \quad \tilde{G}_2).$$

Наявність в ядрах системи рівнянь (9) логарифмічних особливостей дозволяє досягти регуляризуючого ефекту їх розв'язування прямими обчислювальними методами. Їх суть полягає в тому, що систему інтегральних рівнянь (9) за допомогою формул типу Сімпсона зведемо до системи алгебраїчних. Для цього контур Γ розбиваємо на елементарні дуги, на кожній з яких обираємо серединну точку. Систему інтегральних рівнянь наближено, заміною інтегралів по елементарних дугах, представляємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних відносно $\mu_1(\xi, \eta)$, $\mu_2(\xi, \eta)$ на ділянках контура [1].

Тепер наведемо розв'язок (4) у детальному вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (\tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta), \tilde{G}_2(x, y; \xi, \eta)) \Big|_{(x,y) \in \Omega} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta). \quad (11)$$

Далі, розв'язок (11) запишемо таким чином, щоб у явному вигляді були присутні функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$.

Для інтегрального оператора $\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) d\Gamma(\xi, \eta)$ існує обернений, оскільки

головна діагональ матричного ядра (10) має логарифмічну особливість, а недиагональні елементи неперервні [6]. Тому запишемо розв'язок системи інтегральних рівнянь (9) у вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \tilde{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(\xi, \eta; x, y) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta).$$

Позначивши

$$G(x, y; \xi, \eta) = (G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)) = \tilde{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(x, y; \xi, \eta),$$

остаточно отримаємо розв’язок задачі (1) – (2) в такому вигляді:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta), \tag{12}$$

де $G(x, y; \xi, \eta)$ – називають контурною функцією Гріна.

Таким чином, було отримано аналітичний розв’язок задачі (1) – (2) у вигляді (12), який покладено в основу побудови обчислювального алгоритму розв’язування цієї задачі методом потенціалу, детально описаного в [1]. Далі розглянемо конкретні приклади, які дозволяють оцінювати ефективність такого підходу.

Чисельний розв’язок лінійної задачі методом потенціалу. Розглянемо такі крайові задачі (1) – (2), для яких розв’язок відомий заздалегідь. Для перевірки достовірності розв’язку наведемо приклади різних модельних функцій $g(x, y)$, визначивши $f(x, y)$ таким чином: $\Delta g(x, y) = f(x, y)$, а також розглянемо різні форми областей Ω . Визначивши значення $g(x, y)$ і її нормальної похідної в точках контура, визначимо крайові умови $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Таким чином, у силу єдиності розв’язку прямої задачі, має місце $g(x, y) \equiv w(x, y)$ для внутрішніх точок області, тобто $(x, y) \in \Omega$.

Приклад 1. Нехай модельна функція $g(x, y) = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6$, тоді $\Delta g = 361x^2 + 2y^2$,

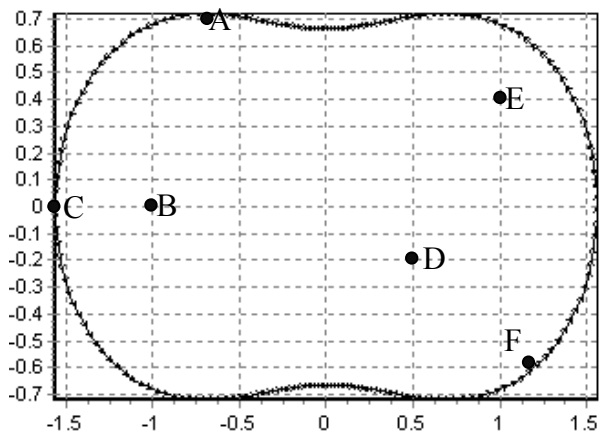
тобто $f \equiv 361x^2 + 2y^2$, $(x, y) \in \Omega$, $\varphi = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6$,

$$\psi = \left(\frac{xy^4}{12} + 6x^5 \right) \cos(n^{\wedge} x) + \frac{x^2 y^3}{6} \cos(n^{\wedge} y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Обираємо неканонічний контур Γ – овал Касіні (рис. 2), який задається рівнянням

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi},$$

де (ρ, φ) – полярні координати, а розрахунки зроблено для параметрів $a = 1.2$, $c = 1$. Чисельний розв’язок наведено в табл. 1.

Рис. 2. Область Ω і точки, в яких наведено розв'язок

Таблиця 1

Порівняння обчислень модельної і знайденої функцій в деяких точках області Ω

| Точка (x,y) | Наближене $w(x,y)$ | Точне $w(x,y)$ | Похибка |
|-----------------|--------------------|----------------|---------|
| A $(-0,7; 0,7)$ | 0,12134 | 0,12255 | 0,00121 |
| B $(-1,0; 0,0)$ | 1,00195 | 0,99998 | 0,00197 |
| C $(-1,5; 0,0)$ | 11,39234 | 11,39063 | 0,00171 |
| D $(0,5; -0,2)$ | 0,01511 | 0,01564 | 0,00053 |
| E $(1,0; 0,4)$ | 1,00249 | 1,00107 | 0,00142 |
| F $(1,2; -0,6)$ | 2,99920 | 2,99376 | 0,00544 |

Відносна похибка складає 0,05 %.

Приклад 2. Тепер розглянемо класичну задачу лінійної теорії пластин.

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x,y)}{D}, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x,y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma.$$

У монографії [5] наведено розв'язок задачі для випадку, коли жорстко закріплена пластина має форму квадрата зі стороною a і навантаженням, розподіленим за гідростатичним законом $q(x,y) = \left(\frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a} \right)$.

Нехай $a = 4$, $q_0 = 175000$ н/м.кв. Відповідно до [5] згин у центрі симетрії квадратної пластини знаходиться за формулою $w(0;0) = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$, де $\alpha = 0,00063$ – емпіричний коефіцієнт. У результаті обчислень за цією формулою маємо $w(0;0) = 0,0114$. Точний розв’язок, отриманий викладеним методом потенціалу $w(0;0) = 0,0115$. Відносна похибка складає 0,8 %.

Аналіз отриманих даних свідчить про високу точність розв’язку задачі (1) – (2), в тому числі для області складної форми. Тому цей метод будемо застосовувати для розв’язування поставленої задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння.

Опис методу розв’язування основної задачі (1) – (3) знаходження оптимальної правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Повернемося до постановки задачі (1) – (3):

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}},$$

де $I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy$,

а стан керованого об’єкта описується диференціальним рівнянням

$$\Delta \Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

з крайовими умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Більш детально, з урахуванням аналітичного розв’язку (12) лінійної крайової задачі (1) – (2), функціонал $I(f(\cdot, \cdot))$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f(\cdot, \cdot)) = & \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \left(\varphi(x, y) - w_1(x, y) \right) \cdot \left(\psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \right) d\Gamma(\xi, \eta) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in L^2(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Функціонал (13) – опуклий напівніперервний знизу на $\bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$, тому, в силу теореми Вейерштраса, досягає своєї нижньої грані в єдиній точці $f^*(\cdot, \cdot) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$.

Опишемо алгоритм розв’язування задачі (1) – (2), (13), побудований на основі градієнтного методу з дробленням кроку [8]. Попередньо запишемо аналітичний вигляд похідної Фреше функціоналу (13) в кожній точці $(\xi, \eta) \in \Omega$

$$\frac{\partial \tilde{I}(f(\hat{\xi}, \hat{\eta}))}{\partial f(\hat{\xi}, \hat{\eta})} = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \bar{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\bar{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta}) - \bar{G}_1(x, y; \xi, \eta) \int_{\Gamma} G_1(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) - \frac{\partial \bar{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta})}{\partial n} \int_{\Gamma} G_2(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right) \right] dx dy. \quad (14)$$

Алгоритм

Початковий етап

Крок 1. Обрати довільне початкове наближення $f^0(x, y)$ і початковий крок градієнтного методу $\alpha^0 > 0$, задати сітку, яка розіб'є область Ω на $N \times M$ точок (ξ, η) , встановити лічильник ітерацій $k = 0$ та точність $\varepsilon > 0$.

Крок 2. Обчислити наближено $\tilde{I}(f^0(x, y))$. Перейти до основного етапу.

Основний етап

Крок 1. Обчислити наближено похідну Фреше (14) в кожній точці $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ області Ω , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$.

Крок 2. Знайти $k + 1$ наближення функції $f(x, y)$ за правилом

$$f^{k+1}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = P_{\bar{B}} \left(f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij}) - \alpha^k \frac{\partial \tilde{I}(f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij}))}{\partial f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij})} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де $P_{\bar{B}}$ – проекція наближення функції $f(x, y)$ на замкнену множину \bar{B} . Обчислити значення функціоналу $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y))$.

Крок 3. Перевірити умову монотонності спадання значень функціоналу (13) $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y)) < \tilde{I}(f^k(x, y))$. Якщо вона виконується, покласти $\alpha^{k+1} = \alpha^k$ і перейти до кроку 4, у протилежному випадку – величину кроку α^k поділити навпіл і повернутися до кроку 2. Виконувати дроблення кроку α^k до тих пір, поки не відновиться монотонність.

Крок 4. Здійснити перевірку умови завершення ітераційного процесу $\sqrt{\frac{1}{N \cdot M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |f^{k+1}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) - f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij})|^2} < \varepsilon$. У випадку її невиконання заміняємо k на $k + 1$ і повертаємося до кроку 1. Алгоритм описано.

Таким чином, розв'язок задачі (1) – (3) зводиться до побудови мінімізуючої послідовності $\{f^k(x, y)\}$ за формулою (15), при цьому на кожній ітерації розв'язується лінійна задача (1) – (2) за допомогою методу потенціалу.

Обчислювальний експеримент. Для перевірки достовірності роботи описаного вище алгоритму складемо таку модельну задачу. Розглянемо функцію

$$g(x, y; \lambda) = (\lambda^2 + 1) \cdot (1 - (x^2 + y^2))^2 + (1 - (x^2 + y^2)), \quad \lambda \in [0; 1], \quad (16)$$

в області Ω , яка обмежена контуром $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$. Аналогічно до використання модельної функції для лінійної задачі (1) – (2), задачу (1) – (3) представимо у вигляді:

$$I(g) \rightarrow \min_{f \in L^2(\Omega)}, \quad (17)$$

$$\text{де } I(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; \lambda) dx dy,$$

$$\Delta g = f(x, y) \equiv 64(\lambda^2 + 1), \quad (x, y) \in \Omega \quad (18)$$

$$g(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\left(\frac{dg}{dn}(x, y; \lambda) \right) = \psi(x, y) \equiv (-4x(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2x) \cos(n^{\wedge} x) + \quad (19)$$

$$+ (-4y(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2y) \cos(n^{\wedge} y) = 2, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Функція $g(x, y; \lambda)$ підібрана таким чином, щоб параметр λ був відсутній у правій частині другої крайової умови (19) і при цьому виконувалася перша. З аналізу (16) і (18) випливає, що при значенні параметра $\lambda = 0$

$$I_{\min}(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; 0) dx dy$$

і при цьому права частина неоднорідного бігармонічного рівняння $f(x, y) \equiv 64$, $(x, y) \in \Omega$. В якості початкового наближення функції $f(x, y)$ можна взяти, наприклад, функцію (18) при різних $\lambda \neq 0$. Згідно з ітераційною формулою (15), функціональна послідовність збігається до розв'язку $f(x, y) = 64$, а значення функціоналу досягає мінімуму.

Висновок. Таким чином, у роботі викладено спосіб розв'язування задачі оптимального керування правою частиною рівняння та схема обчислювального експерименту для практичної перевірки достовірності отриманих результатів. Для цього було використано градієнтний метод, на кожній ітерації якого методом потенціалу розв'язувалася лінійна крайова задача. Результати аналогічних обчислювальних експериментів для оптимізації крайових умов у відповідній задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння дозволяють зробити висновок про ефективність викладеного підходу. Практична програмна реалізація свідчить про можливість застосування цього підходу для визначення оптимальних параметрів конструкцій, елементами яких служать пластини складної форми.

Бібліографічні посилання

1. **Волошко В.Л.** Зворотна задача для пластини складної форми з гідростатичним навантаженням / В.Л. Волошко, Л.В. Волошко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-космічна техніка. – 2012. – Т. 20. – С. 44–48.
2. **Киселева Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
3. **Ободан Н.І.** Обернені задачі ідентифікації моделей / Н.І. Ободан, Н.А. Гук. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2013. – 47 с.

4. **Сергієнко І.В.** Наукові ідеї В.М. Глушкова та розвиток актуальних напрямів інформатики. – К. : Наук. думка, 2013. – 288 с.
5. **Тимошенко С.П.** Пластинки и оболочки Theory of plates and shells / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : USSR, 2009. – 635 р.
6. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 287 с.
7. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.
8. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко, – М.: Наука, 1978. – 487 с.

Надійшла до редколегії 01.06.2016

УДК 629.764

А. В. Голубек

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

АНАЛИЗ СБЛИЖЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ С КАТАЛОГИЗИРОВАННЫМИ КОСМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ В ПРОЦЕССЕ ВЫВЕДЕНИЯ НА ОРБИТЫ С НАКЛОНЕНИЕМ 45°

Получены распределения основных параметров сближения ракеты-носителя с каталогизированными космическими объектами. Определена аналитическая зависимость средней концентрации космических объектов в районе траектории ракеты-носителя от наклона и высоты полёта. Проведена оценка средней вероятности сближения в запуске на предельные расстояния.

Ключевые слова: ракета-носитель, каталогизированные космические объекты, совместное движение, вероятность сближения, относительная скорость сближения, относительное расстояние сближения, угол встречи, концентрация космических объектов.

Одержано розподіл основних параметрів зближення ракети-носія із каталогізованими космічними об'єктами. Визначено аналітичну залежність середньої концентрації космічних об'єктів у районі траєкторії ракети-носія від нахилу і висоти польоту. Оцінено середню імовірність зближення в запуску на граничні відстані.

Ключові слова: ракета-носіє, каталогізовані космічні об'єкти, сумісний рух, імовірність зближення, відносна швидкість зближення, відносна відстань зближення, кут зустрічі, концентрація космічних об'єктів.

Distributions of key parameters of approach of the launch vehicle with the catalogued space objects are received. Analytical dependence of average concentration of space objects around a trajectory of the launch vehicle from an inclination and flight altitude is defined. The estimation of average probability of rendezvous in launch on limit distances is carried out.

Keywords: launch vehicle, catalogued space objects, mutual motion, probability of rendezvous, relative velocity of approach, relative distance of approach, angle of meeting, spatial density of space objects.

Введение. На основании приведенных в [2; 3] результатов моделирования совместного движения ракеты-носителя (РН), выводящей полезную нагрузку на солнечно-синхронные и экваториальные орбиты можно сделать вывод о том, что космический мусор уже представляет реальную угрозу полётам РН на участке выведения космического аппарата.