3. **Голубек А. В.** Анализ характеристик сближения ракеты-носителя с космическими объектами в процессе выведения на экваториальные орбиты / А. В. Голубек // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-косм. техніка. – 2015. – Т. 23, № 4. – С. 32–41.
4. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измеренеий / Б. Ф. Жданюк. – М. : Сов. радио, 1978. – 384 с.
5. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
6. **Назаренко А. И.** Моделирование космического мусора: монография / А. И. Назаренко. – М. : ИКИ РАН, 2013. 216 с.
7. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений / П. Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
8. **Firooz A.** Safety Design For Space Operations / A. Firooz, I. Rongier, P. D. Wilde, T. Sgobba. – Oxford: Elsevier Ltd., 2013. – 1081 p.
9. **Klinkrad H.** Space Debris Models and Risk Analysis / H. Klinkrad. – Chichester: Praxis Publishing Ltd., 2006. – 430 p.
10. **Liou J.-C.** «Stability of the Future LEO Environment»: status review / J.-C. Liou // 28th IADC Meeting. – 8–12 Mar. 2010. – Trivandrum.
11. Current Debris Environment in Low Earth Orbit // Orbital Debris Quarterly News. NASA. – 2009. – June – Vol. 13, iss. 3. – P. 7.
12. **Steel D.** The Orbital Debris Collision Hazard for Proposed Satellite Constellations [Electronic resourse] / D. Steel. – Access mode: http://www.duncansteel.com/archives/1515. – 30.04.2015. – Title from the screen.

Надійшла до редколегії 28.04.2016

УДК 519.258

С. В. Клименко, В. Д. Халипова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАНЖИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ВЫБОРОК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Разработаны математические модели ранжирования экспериментальных и теоретических выборок и проведено исследование возможности использования ранжирования измерений в условиях отсутствия знаний о статистических закономерностях в задачах сравнения и обнаружения изменений параметров и их законов распределения вероятностей.
Ключеые слова: измерения, математическая модель, выборка, закон распределения, вероятность.

Розроблено математичні моделі ранжування експериментальних і теоретичних вибірок і проведено дослідження можливості використання ранжування вимірювань в умовах відсутності знань про статистичі закономірності в задачах порівняння і виявлення змін параметрів і їх законів розподілу ймовірностей.
Ключові слова: вимірювання, математична модель, вибірка, закон розподілу, ймовірність.

The mathematical models ranging experimental and theoretical sampling and investigated the possibility of using measurements of ranking in the absence of knowledge about the statistical patterns in the problems of comparison and the detection of changes of parameters and their probability distribution laws.
Keywords: measuring, mathematical model, selection, law of distribution, probability.

В процессе разработки и модернизации ракетно-космической техники информация о ее состоянии и качестве при проведении испытаний содержится в выборках экспериментальных измерений с неизвестными как причинно-следственными связями, так и статистическими закономерностями. При исследовании экспериментальных выборок используются различные методы непараметрической статистики сравнения сдвигов, масштабов, коррелированности, стационарности. Сравнение выборок как систем заменяется сравнением их параметров [1].

Известен еще один метод изучения экспериментальных выборок случайных величин путем их ранжирования и исследования их собственных рангов [2]. Любую выборку случайных величин $x(k)$ можно представить в виде упорядоченной (ранжированной) выборки $x^*(i)$. Это тоже случайные величины $x(k)$, но заданные в порядке их увеличения

$$x^*(1) < x^*(2) < \ldots < x^*(i) < \ldots < x^*(n-1) x^*(n),$$

где $x^*(1) = x(i/\min)$, а $x(n) = x(i/\max)$ – минимальная и максимальная случайная величина этой выборки. В табл. 1 представлена выборка случайных величин (*n = 10*) $x(k)$, ее упорядоченная выборка $x^*(i)$ и ранги исследуемой выборки $R(x(k)) = r(k)$.

Таблица 1

Выборка случайных величин, упорядоченная выборка и ранги исследуемой выборки

k, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(k)$	3,1	13,5	19,2	11,7	7,2	15,3	12,1	2,2	8,6	18,1
$x^*(i)$	2,2	3,1	7,2	8,6	11,7	12,1	13,5	15,3	18,1	19,2
$r(k)$	2	7	10	5	3	8	6	1	4	9

Ранги вычисляются по сравнительно простой формуле

$$R^*(x(k)) = r^*(k) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}[x(k) - x^*(i)], \tag{1}$$

где *sgn(z)* – функция единичного скачка, равная единице, если $z \geq 0$ и равная нулю, если $z < 0$.

Любая выборка дискретных или непрерывных случайных величин после преобразования (1) представляется как выборка целых чисел от 1 до *n.* Эти числа называются рангами случайных величин $x(k)$. В первой выборке случайными являются их числовые показатели $x(k)$, их измерения. В выборке рангов $r(k)$ случайными являются их номера и равно числу их перестановок в упорядоченной выборке. Число вариантов упорядочивания выборки равно размеру выборки. Статистические закономерности описываются функцией распределения, математическую модель которой можно получить из выражения (1). Полагая $x(k)$ как непрерывную случайную величину, рассмотрим функцию

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}[x(k) - x^*(i)] = F^*(x / |x|) \tag{2}$$

где $|x|$ – упорядоченная выборка случайных величин $x^*(i)$. В выражении (2) справа математическая модель эмпирической функции распределения вероятностей случайной величины x в интервале $x_{\min} - x_{\max}$. Если функция распределения случайных величин известна $F(x)$, то из (2) следует, что ранжирование можно моделировать путем преобразования случайных величин по формуле

$$R^*(x) = nF(x). \tag{3}$$

Таким образом, теоретическое значение ранга $r(k)$ случайной величины $x(k)$ – это результат преобразования случайной величины x в случайную величину $r = nF(x)$ и если известен закон распределения $W(x)$, то можно определить закон распределения $W(r)$. Полагая ранжирование безинерционным процессом, запишем закон сохранения вероятности

$$W(r)dr = W(x)dx.$$

Если известна функция $\Psi(r/k)$, обратная функции $F(x)$, то математическая модель закона распределения вероятности рангов $W(r)$ запишется в виде

$$W(r) = W_x(\Psi(r))\left|\frac{dx}{dr}\right| = W_x(\Psi(r))\Psi'(r). \tag{4}$$

Используя (4), можно исследовать статистические закономерности не только собственных рангов, но и рангов случайных величин, преобразованных на других выборках, которые называются опорными. Выборки рангов на опорных выборках содержат данные об однородности или неоднородности исследуемых выборок случайных величин, о влиянии на ранжирование видов их законов распределения вероятностей, параметров и размеров выборок. Математическое моделирование ранжирования позволяет получать априорную информацию о статистических закономерностях экспериментальных рангов путем проведения вычислительных экспериментов и факторного анализа их результатов.

Математическое моделирование ранжирования выборок случайных величин. Исследуем законы распределения рангов двух выборок $x_1(k)$ и $x_2(k)$ экспоненциальных случайных величин размером n_1 и n_2, полагая известными их законы и функции распределения

$$W(x_i) = \frac{1}{\lambda_i}\exp(-\frac{x_i}{\lambda_i}),\ F(x_i) = 1 - \exp(-\frac{x_i}{\lambda_i}),\ i = 1, 2.$$

По двум выборкам случайных величин можно сформировать две выборки r_{11} и r_{22} однородных рангов и две выборки r_{12} и r_{21} рангов на опорных выборках. Обратные функции и их производные экспоненциальных случайных величин равны

$$\Psi(r/n) = \lambda\ln(\frac{n}{n-r}),\ \frac{d\Psi}{dr} = \Psi'(r) = \frac{\lambda}{n-r}.$$

Полагая опорной выборку $x_2(k)$, процесс ранжирования $x_1(k)$ запишется в виде

$$R_1(x_1) = r_{12} = n_2(1 - \exp(-\frac{x_1}{\lambda_2})),\ \Psi(r_{12}) = \lambda_2\ln(\frac{n_2}{n_2 - r_{12}}),$$

$$\frac{d\Psi}{dr_{12}} = \Psi'(r_{12}) = \lambda_2(n_2 - r_{12})^{-1}.$$

В результате получим

$$W(r_{12})=\frac{\lambda_2}{\lambda_1(n_2-r_{12})}\left(\frac{n_2-r_{12}}{n_2}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \qquad W(r_{21})=\frac{\lambda_1}{\lambda_2(n_1-r_{21})}\left(\frac{n_1-r_{21}}{n_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{5}$$

Если выборки однородные, то $\lambda_2=\lambda_1$ и законы распределения вероятностей рангов равномерные в интервалах от 0 до n_1 и n_2.

Ранги по опорным выборкам с различными параметрами и законами распределения вероятностей существенно отличаются друг от друга. Отличаются их математические ожидания и дисперсии. В рассматриваемом случае они равны

$$M[r_{12}]=\frac{n_2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},\; M[r_{21}]=\frac{n_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \tag{6}$$

$$D[r_{12}]=\frac{n_2^2\lambda_2\lambda_1^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2(2\lambda_1+\lambda_2)},\; D[r_{21}]=\frac{n_1^2\lambda_2^2\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2(2\lambda_2+\lambda_1)}. \tag{7}$$

Математические ожидания и дисперсии собственных и опорных экспериментальных рангов равны [3]:

$$M[r_{11}]=0{,}5(n+1),\; D[r_{11}]=\frac{1}{12}(n^2+1),$$

$$M[r_{12}]=0{,}5n_2,\; D[r_{12}]=\frac{1}{12}(n_2^2+n_2).$$

Ранги взаимно коррелированны и их коэффициент корреляции зависит от размеров выборок и равны для собственных рангов $\rho=-(n+1)^{-1}$, для опорных рангов $\rho=(n_2+2)^{-1}$.

Законы распределения рангов по опорным выборкам отличаются от равномерных, если исследуемые выборки отличаются только видом своих распределений даже при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях. Например, закон распределения рангов лапласовских случайных величин на опорной выборке случайных величин с логистическим распределением

$$W(x_1)=\frac{2}{\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}},\; F(x_2)=(1-\exp\left(-\frac{\pi x_2}{\sqrt{3D}}\right)^{-1}$$

записывается в виде

$$W(r)=\frac{2\sqrt{3D}}{\pi\lambda}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\right)\exp\left(\frac{-\sqrt{3D}}{\pi\lambda}\left|\ln\left(\frac{n-r}{r}\right)\right|\right). \tag{8}$$

Из анализа (8) следует, что хотя их дисперсии равны $(D=2\lambda^2)$, но закон распределения рангов существенно отличается от равномерного распределения.

Исследованы опорные ранги выборок случайных величин с ассиметричными распределениями Релея и экспоненциальным. Их законы распределения записываются в виде

$$W_1(r) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma[n-r]} \exp\left(\frac{-\lambda^2 \ln^2\left(\frac{n}{n-r}\right)}{2\sigma^2}\right),$$

$$W_2(r) = \frac{\lambda^2 \ln\left(\frac{n}{n-r}\right)}{b^2(n-r)} \exp\left(\frac{-\lambda^2 \ln^2\left(\frac{n}{n-r}\right)}{2b^2}\right). \quad (9)$$

Эти законы распределения отличаются друг от друга, если у них одинаковые или математические ожидания, или дисперсии.

Теоретические модели собственных рангов сравнивались с экспериментальными путем проведения компьютерных вычислительных экспериментов. Экспериментальные $r_Э(k)$ и теоретические $r_T(k)$ значения рангов

$$r_Э(k) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(x(k) - x(i)), \; r_T(k) = nF(x(k)) \quad (10)$$

отличаются друг от друга и при $n \to \infty$ ранжирование асимптотически эквивалентно преобразованию (3). Исследовались среднеквадратические значения разностей рангов $\Delta r(k) = r_T(k) - r_Э(k)$ выборок *x(k)* различного размера с экспоненциальными законами распределения вероятностей. При n = 25 для собственных рангов их значения равны 0,06 и 0,027 при $n = 100$.

Адекватность статистических моделей законов распределения теоретических и экспериментальных рангов исследована путем проведения вычислительных экспериментов. На рис. 1 показаны дискретные гистограммы относительных рангов $\frac{r}{n}$ и их законы распределения на опорных выборках измерений $x_1(k)$ и $x_2(k)$ с экспоненциальным законом распределения ($\lambda = 1$ и $\lambda = 2$, $n = 20$).

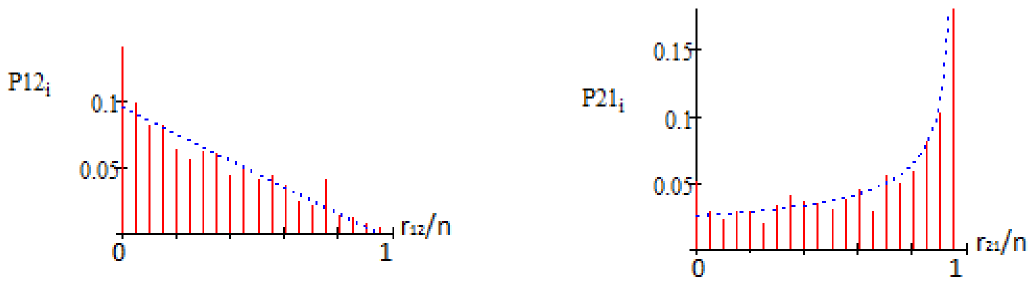

Рис. 1. Гистограммы рангов экспериментальных измерений

На рис. 1 видно, что статистические закономерности экспериментальных рангов существенно влияют на параметры опорных выборок исследуемых измерений.

По результатам проведенных исследований можно сделать вывод о возможности использования ранжирования измерений в условиях полного незнания их статистических закономерностей в задачах их сравнения, обнаружения изменений не только параметров, но и законов распределения вероятностей, а также, используя их математические модели, проведен факторный анализ

влияния на выборки рангов тех или иных изменений параметров и статистических закономерностей исследуемых измерений.

Библиографические ссылки

1. **Кобзарь А.И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных сотрудников / А.И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
2. **Гаек Я.** Теория ранговых критериев / Я. Гаек, Е. Шидак // Главная редакция физико-математической литературы изд-во «Наука». – М. – 1971. – 376 с.
3. **Лапий В.Ю.** Устройства ранговой обработки информации / В.Ю. Лапий, А.Я. Калюжный, Л.Г. Красный // Техніка. – Киев. – 1986. – 120 с.

Надійшла до редколегії 17.06.2016

УДК 629.78.533.6.013:621.45

Т. А. Коваленко[1] , Ю. Д. Шептун[2] , Н. П. Сироткина[1]

[1] Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
[2] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ КОСМИЧЕСКОЙ СТУПЕНИ РАКЕТЫ–НОСИТЕЛЯ ТИПА «ЦИКЛОН-3» ПРИ ИЗМЕНЯЕМОЙ В ПОЛЕТЕ МАССОВОЙ АСИММЕТРИИ

Бифункциональная система управления вектором тяги, основанная на совместном использовании управляющих выхлопных сопел турбины и газодинамической системы управления вектором тяги, позволяет расширить диапазон регулирования вектора тяги двигателя при сохранении качества управления полетом ступени и ее габаритно-массовых характеристик.
Ключевые слова: система управления вектором тяги, совместное использование, диапазон регулирования, надежность работы, функциональные возможности.

Біфункціональна система управління вектором тяги, яка основана на сумісному використанні управляючих вихлопних сопел турбіни та газодинамічної системи управління вектором тяги, дозволяє розширити діапазон регулювання вектора тяги двигуна при збереженні якості управління польотом ступені та її габаритно-масових характеристик.
Ключові слова: системи управління вектором тяги, сумісне використання, діапазон регулювання, надійність роботи, функціональні можливості.

Bifunctional control system by the vector of traction, based on sharing of managing exhaust nozzles of turbine and gas-dynamic control system allows to extend the range of adjusting of vector of traction of engine the vector of traction at maintenance of management quality by flight of the stage and her overall-mass descriptions.
Keywords: control system by the vector of traction, sharing, range of регу-лирования, reliability of work, functional possibilities.