

модулем, разработанный продукт может быть включён в состав какого-либо пакета прикладных программ с целью решения более широких задач, например, связанной задачи динамики и аэродинамики БПЛА.

### Библиографические ссылки

1. **Афонин П. М.** Беспилотные летательные аппараты / П. М. Афонин, И. С. Голубев, Н. И. Колотков и др. – М. : Машиностроение, 1967. – 440 с.
2. **Бюшгес Г. С.** Динамика самолёта. Пространственное движение / Г. С. Бюшгес, Р. В. Студнев. – М. : Машиностроение, 1983. – 320 с.
3. **Гордин А. Г.** Беспилотные летательные аппараты как объекты управления / А. Г. Гордин. – Х. : Гос. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2000. – 140 с.
4. **Калиткин Н. Н.** Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
5. **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Гостехиздат, 1955. – Т. II. – 350 с.
6. **Приходько О. А.** Навчальний посібник до вивчення курсу «Розрахунок аеродинамічних характеристик» / О. А. Приходько. – Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2013. – 164 с.

*Надійшла до редколегії 21.06.2017*

УДК 629.78: (621.983)

**Е. Г. Седачова<sup>1</sup>, А. В. Кулик<sup>2</sup>, Н. Н. Убизький<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Днепропетровский колледж ракетно-космического машиностроения

<sup>2</sup> Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

### ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Дан анализ возможностей учета упрочнения и анизотропии свойств листовых материалов при математическом моделировании процессов пластического изменения формы при изготовлении несущих элементов конструкций ракетносителей.

**Ключевые слова:** процессы пластического изменения формы; упрочнение, анизотропия свойств материалов, математическое моделирование; элементы конструкций; ракетносители.

Наведено аналіз можливостей урахування зміцнення та анізотропії властивостей листових матеріалів при математичному моделюванні процесів пластичного зміння форми при виготовленні несучих елементів конструкцій ракетноносіїв.

**Ключові слова:** процеси пластичного зміння форми; зміцнення, анізотропія властивостей матеріалів, математичне моделювання, елементи конструкції, ракетноносії.

The analysis of possibilities of account of work-hardening and anisotropy of properties of sheet materials is given at the mathematical design of processes of plastic change of form at making of bearing elements of constructions of launch vehicles.

**Keywords:** processes of plastic change of form; work-hardening, anisotropy of properties of materials, mathematical design; elements of constructions; launch vehicles.

© Е. Г. Седачова, А. В. Кулик, Н. Н. Убизький, 2017

**Постановка задачі.** К несущим элементам конструкции изделий ракетно-космической техники относятся шпангоуты, обечайки, днища и др. Технологические процессы их изготовления предусматривают операции пластического формообразования (гибки, вытяжки, отбортовки отверстий, обжима раздачи цилиндрических деталей и др.) и, как правило, последующие операции механической обработки. Научную базу процессов пластического формообразования составляют теория пластичности и её приложения.

Основные положения теории процессов пластического формоизменения заготовок разработаны [1–3] Е. А. Поповым, А. Д. Томленовым, Л. А. Шофманом и др.

Теоретический расчет конкретного процесса сводится к составлению системы уравнений, описывающих процесс, и её решению. Возможность получения аналитического решения распространяется лишь на простые описания идеализированных процессов. Результаты такого решения, если трактовать их как расчетные значения параметров реального процесса, часто оказываются далекими от действительности – более далекими, чем значения тех же параметров, вычисленные с помощью эмпирических и табличных зависимостей, приводимых в справочной литературе. Справочные данные ограничены по применяемым материалам, которые предусмотрены конструкциями изделий ракетно-космической техники.

Аналитические же зависимости, применяемые при проектировании процессов пластического формоизменения, основаны на использовании различных допущений, снижающих достоверность результатов проектирования. Широко распространенные в настоящее время численные методы, дискретное математическое моделирование позволяют учесть все существенные особенности деформирования заготовок, в том числе контактное трение, изменение толщины листового материала, упрочнение и анизотропию материала.

Для операций пластического формоизменения листовых и профильных заготовок характерно, что поле напряжений деформаций неоднородно. Различные точки очага деформации получают различные деформации, следовательно, и различное упрочнение. В условиях холодной деформации напряжение текучести является функцией координат. Решение задач по отысканию поля напряжений с учетом упрочнения встречает значительные математические трудности, связанные с решением системы дифференциальных уравнений.

Стремление к получению аналитического решения в виде формул приводит к необходимости аппроксимировать экспериментальные кривые  $\sigma_S = \Phi(\varepsilon)$  при линейном растяжении некоторыми функциональными зависимостями, например степенной зависимостью вида  $\sigma_S = A \varepsilon^n$  или  $\sigma_S = C \psi^m$  (где  $A$ ,  $n$  и  $C$ ,  $m$  – постоянные кривых упрочнения, имеющие определенные значения для каждого конкретного материала,  $\varepsilon$  – относительное удлинение,  $\psi$  – относительное сужение поперечного сечения образцов при испытании на растяжение).

**Основная часть.** При численном моделировании процессов гибки, вытяжки и др. зависимость между напряжениями и деформациями идентичны диаграмме истинных напряжений  $\sigma_S = \Phi(\varepsilon)$  при линейном растяжении.

Діаграми отримують з допомогою стандартних випробувань образців, вирізаних із профіля або листа.

В табл. 1 приведені числові дані о діаграмі розтягнення деяких матеріалів, застосовуваних при виготовленні несучих елементів виробів ракетно-космічної техніки і для Ст.3, отримані експериментально при механічних випробуваннях.

Таблиця 1

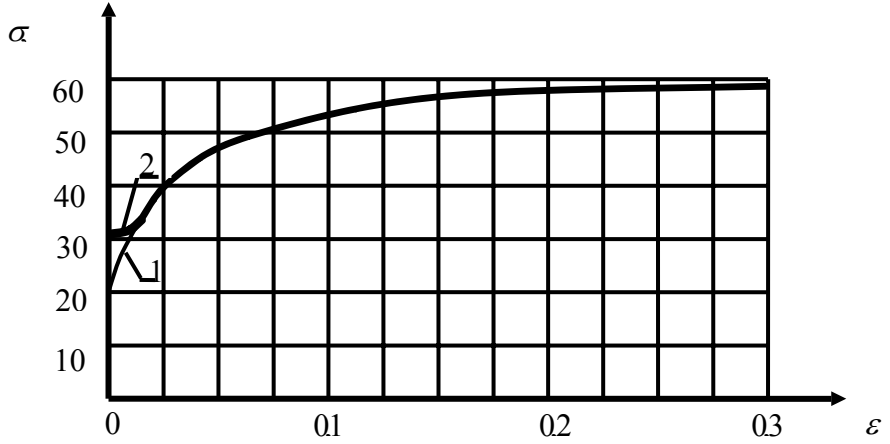
## Табличне задание діаграми упрочнення для деяких матеріалів

(1 – АМг6-М Катаний; 2 – АМг6-М Пресований; 3 – сталь Ст.3 ГОСТ 8509-72)

№ п/п	1		2		3	
	$\varepsilon$	$\sigma$ , МПа	$\varepsilon$	$\sigma$ , МПа	$\varepsilon$	$\sigma$ , МПа
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,003	207,0	0,003	180,0	0,001	294,0
3	0,018	232,0	0,005	193,7	0,028	310,0
4	0,030	251,0	0,008	206,5	0,036	338,0
5	0,042	278,0	0,013	220,0	0,048	360,0
6	0,073	305,0	0,021	242,0	0,061	384,0
7	0,099	334,0	0,031	268,0	0,075	409,0
8	0,120	356,0	0,051	311,0	0,095	436,0
9	0,143	369,0	0,071	346,0	0,125	468,0
10	0,162	382,0	0,091	374,0	0,173	510,0
11	0,183	394,0	0,111	400,0	0,219	538,0
12	0,240	407,0	0,131	420,0	0,257	556,0
13	0,225	420,0	0,161	445,0	0,296	576,0

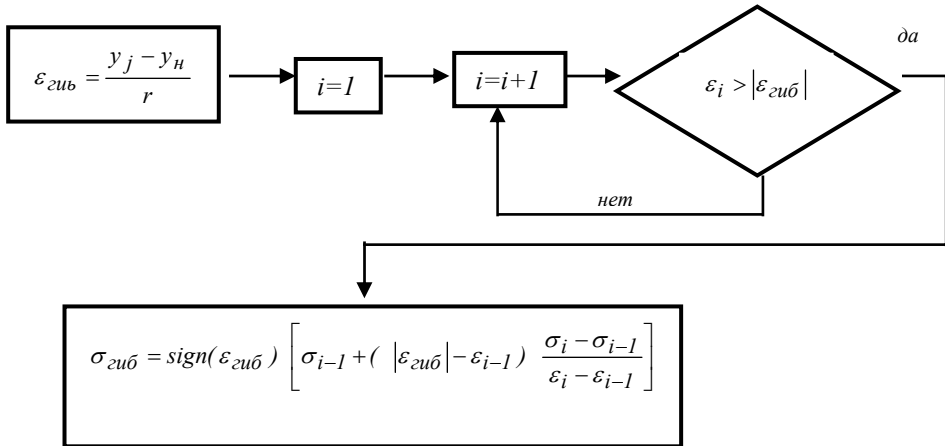
Кожна діаграма представлена 14 точками залежності  $\sigma = \Phi(\varepsilon)$  в порядку зростання деформації. В розрахунках цілесообразно використовувати табличні дані о діаграмі розтягнення з застосуванням лінійної інтерполяції. Застосування лінійної інтерполяції означає, що ділянки кривої замінюються відрізками, з'єднуючими задані точки. Погрешність при цьому дуже мала по порівнянню з погрешністю при використанні регулярних (некусочних) апроксимуючих функцій. Особливо це суттєво для матеріалів, діаграми упрочнення яких мають площадку текучесті (рис. 1).

Аналогічним образом можно учитывать упрочнение и при пластическом формообразовании из листового материала (операциях вытяжки, обжима и раздачи трубных и осесимметричных заготовок), профилей, труб и др.



**Рис. 1. Аппроксимация диаграммы упрочнения:**  
1 – кусочно-линейной функцией; 2 – степенной функцией

Например, на рис. 2 представлен алгоритм процедуры учета упрочнения материала, заданного таблично, при гибке профилей с использованием кусочно-линейной функции истинных напряжений  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots$  – номера заданных точек диаграммы истинных напряжений. Напряжения гибки рассчитаны как функции деформаций:  $\sigma_{гиб} = \Phi(\varepsilon_{гиб})$ ;  $\varepsilon_{гиб} = \frac{y - y_H}{r}$ ; где  $r$  – радиус гибки,  $y$  – текущее значение ординаты наружного слоя,  $y_H$  – ордината нейтральной линии в конечный момент деформирования.



**Рис. 2. Алгоритм расчета напряжений гибки**

Аналогічним образом можно учитывать упрочнение и при пластическом формообразовании из листового материала (операциях вытяжки, обжима и раздачи трубных и осесимметричных заготовок), профилей, труб и др. Однако при численном моделировании процессов вытяжки из листовых заготовок необходимо учитывать тот факт, что листовый материал обладает значительной листовой анизотропией.

Анизотропия механических свойств оказывает значительное влияние на способность материала к вытяжке [4].

В теории пластичности анизотропных материалов, разработанной Р. Хиллом [5], упрочнение изотропно. Начальная анизотропия симметрична относительно ортогональных координат, в направлении которых свойство материала характеризуется экстремальными значениями. Р. Хилл использует три показателя анизотропии:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} \right); \\ F_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} \right); \\ G_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{xT}$ ,  $\sigma_{yT}$ ,  $\sigma_{zT}$  – начальные значения напряжений текучести в направлениях осей симметрии анизотропии.

Соотношения между приращениями деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{3d\varepsilon_{\text{экв}}}{2(H_0 + F_0 + G_0)\sigma_{\text{экв}}} [H_0(\sigma_x - \sigma_y) + G_0(\sigma_x - \sigma_z)]; \\ d\varepsilon_y &= \frac{3d\varepsilon_{\text{экв}}}{2(H_0 + F_0 + G_0)\sigma_{\text{экв}}} [F_0(\sigma_y - \sigma_z) + H_0(\sigma_y - \sigma_x)]; \\ d\varepsilon_z &= \frac{3d\varepsilon_{\text{экв}}}{2(H_0 + F_0 + G_0)\sigma_{\text{экв}}} [G_0(\sigma_z - \sigma_x) + F_0(\sigma_z - \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Эквивалентное напряжение и эквивалентное приращение деформации выражаются через главные напряжения и приращения линейных деформаций следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \left\{ \frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)} \left[ H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] \right\}^{1/2}, \\ d\varepsilon_{\text{экв}} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}(H_0 + F_0 + G_0)}}{H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0} \left[ H_0(F_0d\varepsilon_x - G_0d\varepsilon_y)^2 + F_0(G_0d\varepsilon_y - H_0d\varepsilon_z)^2 + \right. \\ &\quad \left. + G_0(H_0d\varepsilon_z - F_0d\varepsilon_x)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Величини  $\sigma_{\text{эКВ}}$  и  $\varepsilon_{\text{эКВ}}$  связаны между собой зависимостью, которая может быть установлена с помощью экспериментальной диаграммы растяжения материала  $\sigma_S = \Phi(\varepsilon)$ :

$$\sigma_{\text{эКВ}} = a \sigma_S; \quad \varepsilon_{\text{эКВ}} = \frac{\varepsilon}{a}. \quad (4)$$

Величина  $a$  выражается через коэффициенты  $K_x = H_0 / G_0$ ,  $K_y = H_0 / F_0$ . Если диаграмма  $\sigma_S = \Phi(\varepsilon)$  определяется растяжением в

направлении  $x$ , то  $a = \sqrt{\frac{1,5(K_x + 1)K_y}{K_x + K_x K_y + K_y}}$ .

Учет анизотропии усложняет математическое моделирование процессов штамповки. В частности, оказывается невыполнимым условие осевой симметрии. Поэтому нередко прибегают к упрощенной модели, называемой трансверсальной, согласно которой не принимается во внимание различия свойств в направлениях, совпадающих с плоскостью листа. Действительно, анизотропия сильнее всего проявляется при сравнении свойств листового материала в направлении нормали к поверхности со свойствами в направлении касательной, и это проявление анизотропии наиболее существенно, если речь идет о формоизменении листового материала.

Трансверсальная анизотропия характеризуется одним коэффициентом  $K = K_x = K_y$ , так как  $\sigma_{xT} = \sigma_{yT}$ ,  $F_0 = G_0$  согласно (1).

При  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , а  $K = \frac{d\varepsilon_y}{d\varepsilon_z}$  согласно (2), что позволяет экспериментально определять  $K$  как отношение сужения листового образца к его утонению при линейном растяжении.

В формулах (4) для трансверсально-изотропного материала

$$a = \sqrt{\frac{3(K+1)}{2(K+2)}}. \quad (5)$$

Перейдем для элемента оболочки вращения к системе координат  $\alpha, \theta, \gamma$ , где  $\alpha, \theta, \gamma$  ортогональны. Причем  $\theta$  – угловая координата, а  $\alpha$  и  $\gamma$  – линейные размеры.

Для выделяемого элемента оболочки вращения его размеры в направлениях  $\alpha$  и  $\theta$  равны единице, а в направлении  $\gamma$   $h$  – толщина элемента оболочки. Уравнение срединной поверхности оболочки вращения:  $\gamma = \theta$  или (в цилиндрических координатах)  $\rho = \rho(z)$ . Вышеизложенное позволяет преобразовать выражения (3) к следующему далее с заменой  $K_x = H_0 / F_0 = H_0 / G_0$ ,  $d\varepsilon_\gamma = -d\varepsilon_\alpha - d\varepsilon_\theta$  и с учетом плоского вида напряженного состояния, характерного, например, для процессов осесимметричной вытяжки:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = a \sqrt{\sigma_\alpha^2 - \frac{2K}{K+1} \sigma_\alpha \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}, \quad (6)$$

$$d\epsilon_{\text{эКВ}} = \frac{K+1}{a\sqrt{2K+1}} \sqrt{d\epsilon_{\alpha}^2 + \frac{2K}{K+1} d\epsilon_{\alpha} d\epsilon_{\theta} + d\epsilon_{\theta}^2}. \quad (7)$$

Аналогичным образом из уравнений связи приращений деформаций и напряжениями (2) можно вывести следующие соотношения:

$$\frac{d\epsilon_{\alpha}}{(K+1)\sigma_{\alpha} - K\sigma_{\theta}} = \frac{d\epsilon_{\theta}}{(K+1)\sigma_{\theta} - K\sigma_{\alpha}} = \frac{-d\epsilon_{\gamma}}{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\theta}} = \frac{3d\epsilon_{\text{эКВ}}}{2(K+2)\sigma_{\text{эКВ}}} = \frac{d\epsilon}{(K+1)\sigma}. \quad (8)$$

**Выводы.** При численном моделировании процессов гибки, вытяжки и др. зависимость между напряжениями и деформациями идентичны диаграмме истинных напряжений  $\sigma_S = \Phi(\epsilon)$  при линейном растяжении. Диаграммы следует получать с помощью стандартных испытаний на растяжение образцов, вырезанных из профиля или листа. При математическом моделировании целесообразно использовать табличные данные о диаграмме растяжения с применением линейной интерполяции. Применение линейной интерполяции означает, что участки кривой заменяются отрезками, соединяющими заданные точки. Погрешность при этом весьма мала по сравнению с погрешностью при использовании регулярных (некусочных) аппроксимирующих функций. Особенно это существенно для материалов, диаграммы упрочнения которых имеют площадку текучести. Процедуры учета упрочнения материала, заданного таблично, при математическом моделировании процессов пластического формообразования целесообразно выполнять с использованием кусочно-линейной функции истинных напряжений  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots$  – номера заданных точек диаграммы истинных напряжений. Для учета анизотропии листового материала при математическом моделировании процессов пластического формообразования целесообразно использовать упрощенную модель учета анизотропии листового материала, так называемую трансверсальную, согласно которой не принимаются во внимание различия свойств в направлениях, совпадающих с плоскостью листа.

Действительно, анизотропия сильнее всего проявляется при сравнении свойств листового материала в направлении нормали к поверхности со свойствами в направлении касательной, и это проявление анизотропии наиболее существенно, если речь идет об определении предельно допустимых степеней деформирования листового материала.

### Библиографические ссылки

1. **Попов Е. А.** Основы теории листовой штамповки / Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1968. – 281 с.
2. **Томленов А. Д.** Механика процессов обработки металлов давлением / А. Д. Томленов. – М. : Машгиз, 1963. – 234 с.
3. **Шофман Л. Д.** Теория и расчеты процессов холодной штамповки / Л. Д. Шофман. – М. : Машиностроение, 1964. – 365 с.
4. **Овчинников А. Г.** Прогрессивные технологические процессы холодной штамповки / под общ. ред. А. Г. Овчинникова. – М. : Машиностроение, 1985. – 184 с.
5. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТЛ, 1956. – 407 с.