

УДК 629.764

В. В. Авдєєв

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ВПЛИВ НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВЕКТОР СТАНУ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ РАКЕТИ

Для випадку плоского обертального руху розроблено послідовність встановлення зв'язку коефіцієнтів рівнянь збуреного руху і закону регулювання, в якому присутні усі координати вектора стану відповідно прийнятій моделі, з векторами похибок і роботою інерційного виконавчого пристрою на перехідному процесі компенсації постійного збурювального прискорення. Наведені приклади залежності запасу стійкості і роботи виконавчого пристрою від тих коефіцієнтів закону регулювання, які можуть дорівнювати нулю при умові забезпечення заданих значень названих показників системи.

Ключові слова: закон регулювання, запас стійкості, точність стабілізації.

Для случая плоского вращательного движения разработана последовательность установления связи коэффициентов уравнений возмущенного движения и закона регулирования, в котором присутствуют все координаты вектора состояния соответственно принятой модели, с векторами погрешностей и работой инерционного исполнительного устройства на переходном процессе компенсации постоянного возмущающего ускорения. Приведены примеры зависимости запаса устойчивости и работы исполнительного устройства от тех коэффициентов закона регулирования, которые могут равняться нулю при условии обеспечения заданных значений названных показателей системы.

Ключевые слова: закон регулирования, запас устойчивости, точность стабилизации.

Methodology for an establishing connection between coefficients in equations of disturbance motion and control law with all state vector coordinates according chosen model, and vectors of errors as well as the work of an inertial actuating link during transient process of compensation a constant disturbing acceleration for the case of a plane rotation movement are developed. Given examples of dependence of stability factor and an actuating link work on those control law coefficients which may be equal zero under condition of support the specified values of the called system's indices.

Keywords: control law, stability factor, stabilization precision.

Особливість ракети космічного призначення (РКП) як об'єкта управління полягає в широкому діапазоні масово-інерційних характеристик, швидкості, висоти і в наявності коливальних ланок, обумовлених кінцевою жорсткістю корпусу і рухом вільної поверхні компонентів палива.

Залежно від поставленої задачі розроблено різного рівня складності математичні моделі збуреного руху РКП в околі програмного положення; для оцінки запасу стійкості – методи використання кореневого годографа, передатних функцій і частотних характеристик [1].

На початковому етапі розробки системи стабілізації (СС) домінуючою є задача забезпечення стійкості обертального руху РКП як твердого тіла [2], при цьому приймається припущення про несуттєву залежність рухів у різних площинах. Відомо, що вимоги до стійкості СС і точності суперечливі, тим більше це має місце для об'єкта управління, яким є обертальний рух РКП.

Для випадку стаціонарної лінійної моделі встановлено зв'язок між координатами векторів похибок, які характеризують точність компенсації зовнішніх збурень після закінчення перехідного процесу, і запасом стійкості системи на площині коренів характеристичного полінома [3].

Крім запасу стійкості і точності, до СС ставляться вимоги щодо якості перехідного процесу, від якої залежать енергетичні втрати при компенсації збурень, особливо на атмосферній ділянці траєкторії, і необхідна потужність виконавчого пристрою.

Обґрунтовано рекомендації щодо побудови виконавчого пристрою системи керування кутовим положенням ракети шляхом зміни напрямку вектора сили тяги маршового двигуна [4].

Аналіз кореневих годографів та результати інтегрування рівнянь руху приводять до висновку, що найменші витрати енергії на відпрацювання збурень мають місце при аперіодичних перехідних процесах.

У переважній більшості методів синтезу систем автоматичного управління в законі регулювання присутні усі координати вектора стану відповідно до прийнятої моделі. Реалізація такого закону передбачає наявність датчиків усіх координат вектора стану, що не є завжди необхідним для забезпечення заданих характеристик.

Поставлено задачу для СС плоского обертального руху ракети з інерційним виконавчим пристроєм розробити методику встановлення залежності від рівня складності закону регулювання запасу стійкості, коефіцієнтів помилок і роботи виконавчого пристрою протягом перехідного процесу компенсації одиничного збурювального прискорення.

Наявність такої методики дасть можливість обґрунтовано вибрати закон регулювання при умові забезпечення заданих значень названих характеристик СС.

1. Рівняння СС

В якості об'єкта управління (ОУ) в даній роботі приймається рух РКП у площині ристання. Із врахуванням інерції виконавчого пристрою в околі певної точки траєкторії модель ОУ описується рівнянням:

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u + c \cdot m, \quad (1)$$

де координатами вектора x є кут ристання ψ , кутова швидкість $\dot{\psi}$, кут повороту руля курсу δ і кутова швидкість $\dot{\delta}$, тобто $x^T = \begin{bmatrix} \psi & \dot{\psi} & \delta & \dot{\delta} \end{bmatrix}$. На вхід ОУ діє

управління u , залежність якого від координат вектора x називають законом регулювання, і збурювальне обертальне прискорення m . Елементами матриці a є традиційні [1] коефіцієнти збуреного обертального руху $a_{\psi\psi}$, $a'_{\psi\dot{\psi}}$, $a_{\psi\delta}$, які залежать від масово-інерційних характеристик РКП і точки траєкторії, постійна часу T_{AC} виконавчого пристрою – автомата стабілізації (АС) і коефіцієнт демпфування ξ :

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a'_{\psi\dot{\psi}} & a_{\psi\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mu & -\xi \cdot \mu \cdot T_{AC} \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{T_{AC}^2}. \quad (2)$$

Збурення m (1) впливає тільки на кут рискання ψ та його похідні, а управління u – на кут повороту руля δ і його похідні, тому 4×1 – матриці b і c такі:

$$b^T = [0 \ 0 \ 0 \ \mu], \quad c^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \quad (3)$$

Коли в закон регулювання входять усі координати вектора стану x відповідно до прийнятої моделі (1), (2), то в лінійному варіанті моделі ОУ аналогічно монографії [1] його можна записати у вигляді:

$$u(x) = [k_\psi \ k'_\psi \ k_\delta \ k'_\delta] \cdot x = k_\psi \cdot \psi + k'_\psi \cdot \dot{\psi} + k_\delta \cdot \delta + k'_\delta \cdot \dot{\delta}. \quad (4)$$

Виходячи із (1–4) рівняння СС обертального руху буде таким:

$$\dot{x} = a^* \cdot x + c \cdot m, \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a'_{\psi\psi} & a_{\psi\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu \cdot k_\psi & \mu \cdot k'_\psi & \mu \cdot (k_\delta - 1) & \mu \cdot (k'_\delta - \xi \cdot T_{AC}) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Рівняння (5) будуть використані для розрахунку таких показників СС:

– двох векторів помилок, коли збурювальне прискорення лінійне відносно поточного часу t , тобто

$$m(t) = m_0 + m_0 \cdot t, \quad (6)$$

– запасу стійкості на площинах коренів характеристичного полінома, двох коефіцієнтів закону регулювання, частотної характеристики розімкненої системи [5];

– приведеної роботи АС протягом перехідного процесу компенсації одиничного збурювального прискорення.

2. Вектори помилок

Точність компенсації збурювального прискорення (6) характеризується двома векторами помилок:

$$E0 = (a^*)^{-1} \cdot c, \quad E1 = (a^*)^{-2} \cdot c, \quad (7)$$

де a^* , c даються виразами (5) і (3) відповідно.

Вектори (7) визначають усталений рух після закінчення перехідного процесу тривалістю T_p :

$$x = E0 \cdot (m_0 + m_0 \cdot t) + E1 \cdot m_0, \quad t > T_p.$$

Структура матриці a^* така, що при знаходженні елементів оберненої матриці $(a^*)^{-1}$, від якої залежать вектори похибок (7), утворюється чотири групи рівнянь, кожна з яких розв'язується незалежно. Це дає можливість отримати нескладні аналітичні вирази чотирьох координат цих векторів через коефіцієнти рівнянь ОУ (1), (2) і закону регулювання (4):

$$E0 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ k_{\Psi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E1 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} [z \cdot (k'_{\Psi} \cdot a_{\Psi\delta} + a'_{\Psi\Psi} \cdot z) + a_{\Psi\delta} \cdot k_{\Psi} \cdot v] / \Delta \\ z \\ [z \cdot (a'_{\Psi\Psi} \cdot k_{\Psi} - a_{\Psi\Psi} \cdot k'_{\Psi}) - a_{\Psi\Psi} \cdot k_{\Psi} \cdot v] / \Delta \\ k_{\Psi} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де $z = 1 - k_{\delta}$, $v = k'_{\delta} - \xi \cdot T_{AC}$, $\Delta = -a_{\Psi\Psi} \cdot z - k_{\Psi} \cdot a_{\Psi\delta}$.

Із шести ненульових координат векторів (8) незалежними між собою є тільки два, тому що:

$$E1_2 = E0_1, \quad E0_1 = \frac{1 + a_{\Psi\delta} \cdot E0_3}{-a_{\Psi\Psi}}, \quad E1_4 = E0_3,$$

$$E1_3 = \frac{a'_{\Psi\Psi} \cdot a_{\Psi\Psi} \cdot z^2 + z \cdot k_{\Psi} \cdot a'_{\Psi\Psi} \cdot a_{\Psi\delta} - \Delta^2 \cdot a_{\Psi\Psi} \cdot E1_1}{\Delta^2 \cdot a_{\Psi\delta}}.$$

Коли пріоритетною є вимога до запасу стійкості чи до якості перехідного процесу, то коефіцієнти закону регулювання (4) визначаються виходячи з вибраного пріоритету, і вектори (8) будуть наслідком цього вибору; але коли пріоритетною є вимога до точності стабілізації, то відповідно встановлюються значення координат векторів похибок (8), на підставі яких розраховуються два коефіцієнти закону регулювання: k_{Ψ} , k'_{Ψ} або k_{δ} , k'_{δ} .

Розглянемо варіант, у якому задана точність СС кількісно визначається координатами векторів (8) $E0_1$, $E1_1$, а коефіцієнти закону регулювання (4) k_{δ} і k'_{δ} вибираються довільно. Відповідно до (8):

$$k_{\Psi} = \frac{1 - k_{\delta}}{g1}, \quad g1 = \frac{-E0_1 \cdot a_{\Psi\delta}}{1 + E0_1 \cdot a_{\Psi\Psi}},$$

$$k'_{\Psi} = \frac{E1_1 \cdot [a_{\Psi\Psi} \cdot (1 - k_{\delta}) + k_{\Psi} \cdot a_{\Psi\delta}]^2 - a'_{\Psi\Psi} \cdot (1 - k_{\delta})^2 - k_{\Psi} \cdot a_{\Psi\delta} \cdot (k'_{\delta} - \xi \cdot T_{AC})}{a_{\Psi\delta} \cdot (1 - k_{\delta})}. \quad (9)$$

Отже, довільно вибрані k_{δ} і k'_{δ} і розраховані за формулами (9) коефіцієнти закону регулювання забезпечують задану точність компенсації збурювального прискорення (6) після закінчення перехідного процесу. Функціями цих коефіцієнтів будуть також запас стійкості та робота АС протягом перехідного процесу компенсації одиничного збурювального прискорення.

3. Запас стійкості

Варіанти кількісної характеристики запасу стійкості плоского обертального руху РКП і послідовність їх розрахунку наведено у роботі [5]:

- η – на площині коренів характеристичного полінома матриці a^* (5);
- s_{xh} , s_{yh} – на площині k_{Ψ} , k'_{Ψ} двох коефіцієнтів закону регулювання (4);
- φ , η_a – на площині частотної характеристики розімкненої СС (запас за фазою та амплітудою).

4. Робота АС при постійному збуренні

Цей показник пропорційний втратам енергії на перехідному процесі компенсації збурень і може бути ще одним критерієм його якості. Перше наближення моделі повороту руля приймається у вигляді ланки другого порядку:

$$I \cdot \ddot{\delta} + c_2 \cdot \dot{\delta} + c_1 \cdot \delta = M . \tag{10}$$

В цьому рівнянні I – приведений до осі обертання на кут δ момент інерції поворотного пристрою, c_1 – жорсткість його конструкції, c_2 – коефіцієнт демпфування, M – обертальний момент, який створює АС при повороті руля.

Робота АС протягом перехідного процесу тривалістю T_p

$$A = \int_0^{T_p} \left| M(t) \cdot \dot{\delta}(t) \right| \cdot dt . \tag{11}$$

Функції, що входять в (10), (11), визначаються шляхом розв’язку рівнянь СС (5), які після розрахунку чисельним шляхом коренів характеристичного полінома матриці a^* можуть бути отримані в аналітичному вигляді.

5. Приклади залежності показників запасу стійкості

і приведеної роботи АС від коефіцієнтів k_δ та k'_δ у законі регулювання

З метою встановити вплив неповної інформації про вектор стану СС на показники запасу стійкості і приведену до одиничного збурювального прискорення роботу, яку виконує АС для його компенсації, зроблено їх розрахунки для стійкого ($a_{\psi\psi} < 0$) і нестійкого ($a_{\psi\psi} > 0$) ОУ (табл. 1).

Таблиця 1

Коефіцієнти ОУ

$a_{\psi\psi}$	$a_{\psi\delta}$	$a'_{\psi\psi}$	ξ	$T_{АС}$
c^{-2}		c^{-1}	-	c
- 0,3	- 0,200	- 0,110	0,8	0,15
1,121	- 0,256	- 0,041	1,1	0,20

Приймаємо координати $E0_1, E1_1$ векторів помилок (8) пріоритетними показниками СС і при нульових коефіцієнтах k_δ та k'_δ у законі регулювання визначаємо відповідно (9) k_ψ, k'_ψ (табл. 2), які при варіаціях k_δ не змінюються.

Таблиця 2

Координати векторів (8) і коефіцієнти k_ψ, k'_ψ

Номер рядка у табл. 1	$E0_1$	$E1_1$	k_ψ	k'_ψ	k_δ	k'_δ
	c^2	c^3	-	c	-	c
1	0,6378	- 0,784	6,34	9,85	0	0
2			10,89	9,76		

Для наведеного прикладу (табл. 1, 2) введення в закон регулювання (4) доданку $k_{\delta} \cdot \delta$ при від’ємних значеннях коефіцієнта k_{δ} призводить до збільшення запасу стійкості на площині $k_{\psi} k'_{\psi}$ (рис. 2, 3) і на площині частотної характеристики розімкненої СС (рис. 7, 8). Запас стійкості на площині коренів характеристичного полінома матриці a^* (5) при від’ємних значеннях k_{δ} збільшується для статично нестійкого ОУ і зменшується для статично стійкого ОУ (рис. 1).

При від’ємних значеннях коефіцієнта k_{δ} має місце зменшення роботи АС (11) на перехідному процесі компенсації збурювального прискорення m_0 (рис. 6), але при цьому збільшується величина похибки стабілізації (рис. 4, 5).

Результати пошуку значень чотирьох коефіцієнтів закону регулювання (4), які забезпечують найбільший запас стійкості η на площині коренів характеристичного полінома, при обмеженнях координат векторів помилок $E0_0 \leq 0,82 \text{ c}^2$ і $|E1_0| \leq 1,3 \text{ c}^3$ та $|k_{\delta}| < 0,8$ залежать від початкової точки у чотиривимірному просторі. Для даних статично нестійкого ОУ (табл.1) ітерації координат вектора $k^T = [k_{\psi} \quad k'_{\psi} \quad k_{\delta} \quad k'_{\delta}]^T$ з початкового положення $[13 \quad 11 \quad -0,4 \quad -0,13]^T$ приводять до екстремальної точки

$$k_{\max \eta}^T = [13,56 \quad 11,29 \quad -0,397 \quad -0,13]^T, \quad (12)$$

у якій $\eta = 2,18 \text{ c}^{-1}$, координати векторів похибок $E0_0 = 0,67 \text{ c}^2$, $E1_0 = -0,68 \text{ c}^3$, приведена робота АС $A/m_0^2 = 46,1 \cdot 10^{-7} \text{ Нм} \cdot \text{c}^4$.

Пошук максимуму η на площині $k_{\psi} k'_{\psi}$ при нульових значеннях решти коефіцієнтів закону регулювання з початкового положення $k_2^T = [20 \quad 15]^T$ приводить до екстремальної точки

$$k_{2\max \eta}^T = [11,6 \quad 8,0]^T, \quad (13)$$

у якій $\eta = 1,39 \text{ c}^{-1}$, координати векторів похибок $E0_0 = 0,58 \text{ c}^2$, $E1_0 = -0,47 \text{ c}^3$, приведена робота АС $A/m_0^2 = 17,2 \cdot 10^{-7} \text{ Нм} \cdot \text{c}^4$.

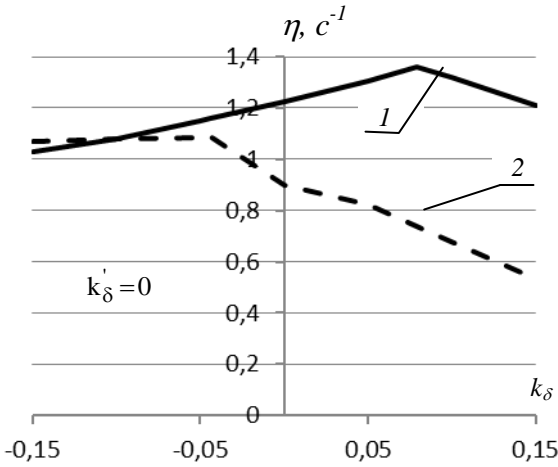


Рис. 1. Запас стійкості на площині коренів характеристичного поліному (1 – статично стійкий ОУ, 2 – статично нестійкий ОУ)

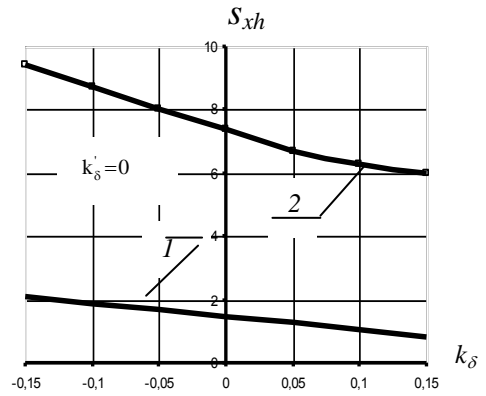


Рис. 2. Запас стійкості у відносних одиницях коефіцієнта k_ψ закону регулювання (1 – статично стійкий ОУ, 2 – статично нестійкий ОУ)

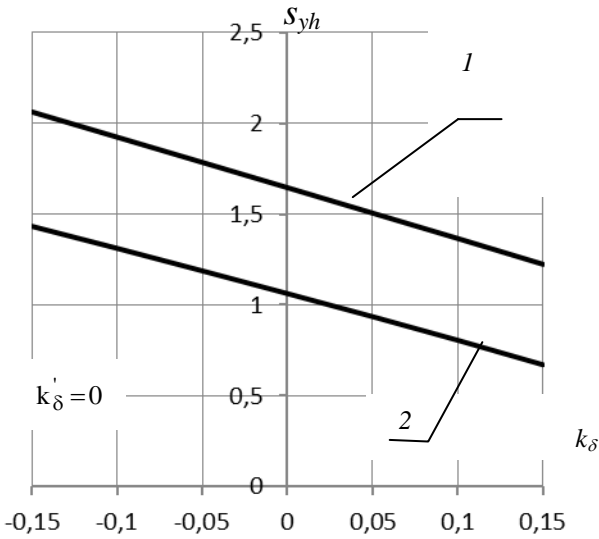


Рис. 3. Запас стійкості у відносних одиницях коефіцієнта k'_ψ закону регулювання (1 – статично стійкий ОУ, 2 – статично нестійкий ОУ)

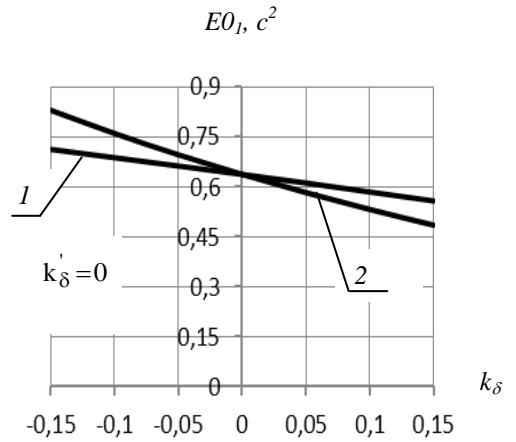


Рис. 4. Коефіцієнт статичної похибки

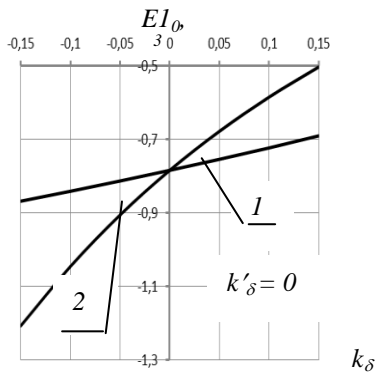


Рис. 5. Коефіцієнт похибки при швидкості збурення

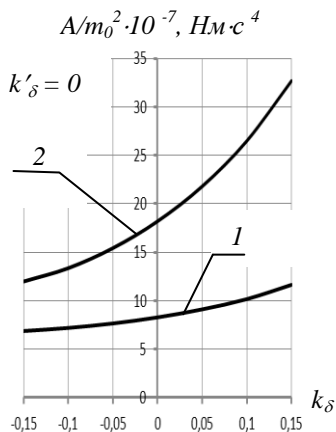


Рис. 6. Приведена робота виконавчого пристрою

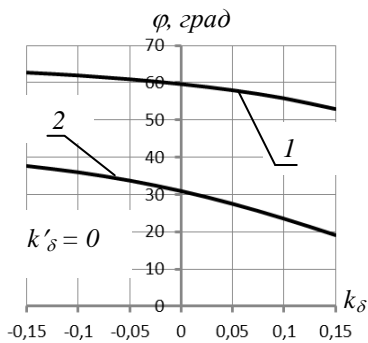


Рис. 7. Запас стійкості за фазою

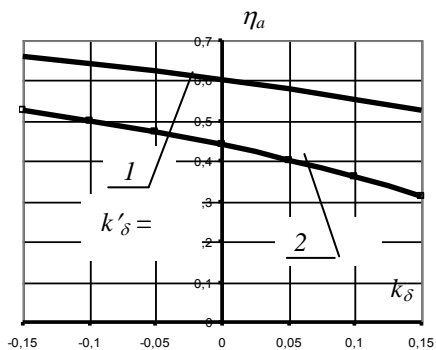


Рис. 8. Запас стійкості за амплітудою

Отже, для прикладу даних у табл. 1 повна інформація про вектор стану дає можливість шляхом ітерацій знаходити значення коефіцієнтів закону регулювання (12), для яких оцінка тривалості перехідного процесу ($3/\eta$) на 36 % менша, ніж при використанні тільки двох координат вектора стану. Але в екстремальній точці (12) приведена робота АС на перехідному процесі компенсації одиничного збурювального прискорення (11) в 2,7 раза більша, ніж в екстремальній точці (13) на площині $k_{\psi} k'_{\psi}$.

Висновки

1. Встановлено зв'язок (8), (9) координат векторів помилок, які кількісно характеризують точність стабілізації кутового положення ракети при дії лінійного збурювального прискорення, з коефіцієнтами рівнянь збуреного руху і закону регулювання, що включає усі координати вектора стану відповідно до прийнятої моделі (5).

2. Розроблено методику розрахунку оцінки витрат енергії АС (11) протягом перехідного процесу компенсації одиничного збурювального прискорення.

3. Наведено приклади залежності запасу стійкості на площині коренів характеристичного полінома (рис. 1), двох коефіцієнтів закону регулювання (рис. 2, 3), частотної характеристики розімкненої системи (рис. 7, 8), витрат енергії АС (рис. 6) і координат векторів помилок (рис. 4, 5) від коефіцієнта закону регулювання при куті повороту руля для випадків статично стійкої і статично нестійкої ракети (табл. 1).

Для прикладу даних статично нестійкої ракети (табл. 1) найбільший запас стійкості на площині коренів характеристичного полінома досягається шляхом пошуку у чотиривимірному просторі коефіцієнтів закону регулювання, але при цьому може мати місце погіршення значень інших показників системи, зокрема, витрат енергії АС.

Матеріали статті можуть бути використані для прийняття рішення про рівень складності закону регулювання залежно від заданих показників запасу стійкості та вимог до потужності виконавчого пристрою.

Бібліографічні посилання

1. **Игдалов И. М.** Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и космических ступеней: монография / И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун ; под ред. акад. С. Н. Конюхова. – Д. : Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2010. – 264 с.

2. **Айзенберг Я. Е.** Проектирование систем стабилизации носителей / Я. Е. Айзенберг, В. Г. Сухоревый. – М. : Машиностроение, 1986. – 224 с.

3. **Авдеев В. В.** Точність і запас стійкості системи стабілізації обертального руху ракети / В. В. Авдеев // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 3. – С. 93–98.

4. **Шептун Ю. Д.** Аналіз витрат енергії на керування космічним ступенем ракети / Ю. Д. Шептун, Т. О. Коваленко // Вісник ДНУ. – № 4. Т. 24. – Серія «Ракетно-космічна техніка». – Вип. 19. – 2016. – С. 145–157.

5. **Авдеев В. В.** Запас устойчивости системы стабилизации вращательного движения ракеты / В. В. Авдеев // Техническая механика. – 2016. – № 4. – С. 62–69.