УДК 519.2

ОТКЛОНЕНИЯ, КАК БЕЗГРАНИЧНО ДРОБИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

К.И. Кабанов, ст. преп., ХНАДУ

Аннотация. *Рассматривается характеризация распределений случайных величин с плотностями типа атомарных функций свойством разложимости с компонентой, обладающей максимальной энтропией.*

Ключевые слова: *случайная величина, свертка, смесь, характеристическая функция, разложение случайной величины.*

ВІДХИЛЕННЯ, ЯК НЕСКІНЧЕННО ДРОБИМІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

К.І. Кабанов, ст. викл., ХНАДУ

Анотація. *Розглядається характеризація розподілів випадкових величин з щільностями типу атомарних функцій властивістю розкладання з компонентою, що має найбільшу ентропію.*

Ключові слова: *випадкова величина, згортка, суміш, характеристична функція, розкладання випадкової величини.*

DEVIATIONS, AS INFINITELY SPLIT-UP RANDOM VARIABLES

K. Kabanov, senior lecturer, KhNADU

Abstract. *In this paper we consider characterization theorem of the distribution by decomposition with maximum entropy of the component.*

Key words: *random variable, convolution, mix, characteristic function, decomposition of a random variable.*

Введение

В большом количестве задач статистического анализа электронных и электрических систем автомобиля чаще всего используются нормально распределенные случайные величины. Однако симметричность и неограниченность множества значений не является естественным свойством в большинстве случаев. Для повышения точности расчетов актуальным является переход от нормального распределения к случайным величинам, которые бы сохраняли свойства нормального распределения, но были лишены указанных недостатков.

Анализ исследований и публикаций

В настоящий момент одним из наиболее часто используемых классов распределений являются так называемые устойчивые распределения. Они представляют особый интерес в связи с задачей об одинаковой распределенности статистик X_1 и $a_1X_1+a_2X_2$ повторной выборки (X_1, X_2). Первой работой по изучению данного условия является заметка Пойа 1923г., в которой установлено, что среди распределений, обладающих конечным вторым моментом, лишь нормальное распределение является устойчивым. Дальнейшее развитие теория устойчивых распределений получила в работах Марцинкевича, Леви, Линника, который дал полное описание законов, допускающих свойство одинаковой распределенности линейных статистик, и показано, что при некоторых дополнительных условиях этим свойством выделяется нормальный закон [1]. Кроме того, устойчивые распределения тесно связаны с центральной предельной теоремой. Распределение суммы независимых одинаково распределенных случайных величин стремится (при тех или иных условиях) к распределению из класса устойчивых.

Известно, что все устойчивые распределения являются безгранично делимыми, они абсолютно непрерывны и их плотности являются одновершинными. Из безграничной делимости сразу следует, что в классе устойчивых распределений нет финитных, т.е. распределений, для которых существует число $N<\infty$, что $P(|X|<N)=1$. Однако, во многих приложениях условие ограниченности является более естественным, чем существование второго момента. Это привело к изучению аналогичных задач, но для случайных величин со значениями на конечных группах. В частности, П. Леви [2] доказал, что для случайных величин со значениями на окружности сумма стремится, в случае одинаково распределенных слагаемых, к равномерному распределению, с единственным исключением, когда значения слагаемых могут быть только вершины правильного вписанного многоугольника.

Безгранично дробимые и атомарные функции

В связи с этим поставим следующую задачу. Наиболее полно описать с.в. X, которые могут быть представлены в виде суммы независимых с.в., одна из которых ограниченна, а вторая принадлежит тому же типу, что и X. Тривиальные случаи, когда одна из компонент вырождена, в рассмотрение не принимаются, что далее специально не оговаривается. Далее, для случайной величины (с.в.) X, будем придерживаться следующих обозначений: функция распределения (ф.р.) $F_X(x)=P(X<x)$ и характеристическая функция (х.ф.) $\phi_X(t)=Ee^{itx}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_X(x)$ – преобразование Фурье-Стилтьеса.

Отметим, что при следующих условиях: X, X_1, Y – независимые случайные величины, причем X и X_1 одинаково распределены по закону $F_X(x)$ с х.ф. $\phi_X(t)$, а Y - финитная с ф.р. $F_Y(x)$ и х.ф. $\phi_Y(t)$.

Если X и aX_1+Y одинаково распределены и $a>0$, то параметр a принадлежит интервалу $(0,1)$, с.в. X – непрерывная, финитная, ее х.ф. $\phi_X(t)=\prod_{k=0}^{\infty}\phi_Y(a^k t)$, причем бесконечное произведение всегда сходится к собственному пределу. Кроме того, семиинварианты распределений с.в. X и Y связаны соотношением $\chi_i=\frac{a^i}{1-a^i}\eta_i$.

Последнее соотношение дает необходимые и достаточные условия разложимости случайной величины в сумму финитной и себе подобной, однако проверка, является ли определенная последовательность последовательностью семиинвариантов некоторого распределения, как правило, представляет сложную задачу.

Далее, определим необходимые и достаточные условия на с.в. Y, которые обеспечивают принадлежность плотности распределения с.в. X к классу атомарных функций. Атомарными, следуя [4], называются финитные решения функционально – дифференциального уравнения

$$\sum_{k=1}^{m}b_k y^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j y(ax+\alpha_j).$$

В терминах характеристических функций, принадлежность классу атомарных функций плотности с.в. X равносильна тому, что х.ф. с.в. Y представима в виде отношения тригонометрического полинома и полинома, а именно

$$\phi_Y(t)=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j e^{it\alpha_j}}{\sum_{k=1}^{m}b_k(-it)^k},$$

причем, все корни знаменателя, с учетом кратности, являются и корнями числителя. Определим вид распределения случайной величины Y.

Для того чтобы плотность с.в. X являлась атомарной, необходимо и достаточно чтобы плотность с.в. Y имела вид

$$f_Y(x) = \sum_{k,j} R_{k,j}(x) f_{t_k}(x, \alpha_{j+1}, \alpha_j),$$

где

$$f_{t_k}(x, \alpha_{j+1}, \alpha_j) = \begin{cases} \dfrac{t_k}{e^{\alpha_j t_k} - e^{\alpha_{j+1} t_k}} e^{t_k x}, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

Отметим, что непрерывная случайная величина с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{e^{a\beta} - e^{a\alpha}} e^{ax}, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

имеет характеристическую функцію

$$\phi_a(t, \alpha, \beta) = \frac{a}{e^{a\beta} - e^{a\alpha}} \cdot \frac{e^{(it+a)\beta} - e^{(it+a)\alpha}}{it + a}.$$

В частном случае $a = 0$, $\phi_0(t, \alpha, \beta) = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \cdot \dfrac{e^{it\beta} - e^{it\alpha}}{it}$ соответствует плотности равномерного распределения на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Отметим, что распределение, названное экспоненциальным, вообще говоря, может являться комплексной функцией. Для перехода к вещественным функциям, достаточно выделить вещественную и мнимую часть этих функций.

Таким образом, доказано, что случайные величины с плотностями типа атомарных функций порождаются “смесями” и свертками усеченных показательных распределений. Верно и обратное утверждение. Любая плотность, порожденная “смесями” и свертками усеченных показательных распределений является решением уравнения, правда несколько более общего вида, а именно

$$\sum_{k=1}^{m} b_k y^{(k)}(x) = \sum_{l} \sum_{j=1}^{n} a_{jl} y^{(l)}(ax + \alpha_{jl}).$$

Для того чтобы продемонстрировать особенность этих распределений, определим энтропию случайной величины как

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx.$$

Известно, см. [5], что максимальной энтропией среди всех распределений, сосредоточенных на отрезке, без каких бы то ни было ограничений, обладает равномерное распределение. Если зафиксировать математическое ожидание, максимум энтропии будет достигаться на усеченном показательном распределении. И мы можем сформулировать следующее утверждение. Если случайная величина представима в виде суммы двух независимых случайных величин, первая из которых принадлежит одному с ней типу, а другая финитна и имеет максимальную энтропию, тогда случайная величина имеет плотность типа атомарной функции.

Выводы

В работе полностью описана структура случайных величин, которые имеют плотности типа атомарных функций и свойства, которые характеризуют указанные случайные величины. Полученные результаты показывают, что, с одной стороны, эти распределения частично обладают некоторыми свойствами разложимости, сходными со свойствами нормального и равномерного распределений, а с другой стороны, энтропийными свойствами равномерных и показательных распределений. Эти свойства являются достаточно естественными в большом классе статистических задач, поэтому атомарные плотности могут находить применение, наравне со стандартными семействами плотностей.

Литература

1. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. Наука, 1972.
2. P. Levy, L’addition des variables aleatoires definies sur une circonference. Bull. Soc. Math. France, 67, 1-2, 1939, 1-41.
3. В.Л. Рвачев, В.О. Рвачев. Про одну фінітну функцію. ДАН УРСР. Сер. А., 1971, с. 705-707.
4. В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Наукова думка, 1979.
5. Рао С.Р., Линейные статистические методы и их применение, Наука, 1968.

Рецензент: В.М. Колодяжний, професор, д.ф.-м.н., ХНАДУ

Стаття надійшла до редакції 7 жовтня 2013 р.