УДК 618.3

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАМКНУТОЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

О.Б. Маций, аспирант, О.А. Подоляка, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. *Рассматривается задача нахождения замкнутого маршрута минимальной стоимости, который проходит по всем пунктам транспортной сети.*

Ключевые слова: *алгоритм, граф, маршрут, гамильтонов цикл.*

ПІДХІД ДО ВИРІШЕННЯ ЗАМКНУТОЇ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

О.Б. Маций, аспірант, О.О. Подоляка, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. *Розглядається задача знаходження замкнутого маршруту мінімальної вартості, який проходить по всіх пунктах транспортної мережі.*

Ключові слова: *алгоритм, граф, маршрут, гамільтонів цикл.*

APPROACH TO THE TOTAL CLOSED TRAVELING SALESMAN PROBLEM

O. Matciy, graduate student, O. Podolyaka, assistant professor, cand. eng. sc., KhNAHU

Abstract. *The problem of finding the minimum cost of a closed route, which goes through all the points of the transport network.*

Keywords: *algorithm, the count, the route, the Hamiltonian cycle.*

Введение

Транспортная инфраструктура - одна из важнейших инфраструктур, обеспечивающих жизнь городов и регионов. В последние десятилетия во многих крупных городах исчерпаны или близки к исчерпанию возможности экстенсивного развития транспортных сетей. Поэтому особую важность приобретает оптимальное планирование сетей, улучшение организации движения, оптимизация системы маршрутов общественного транспорта. Решение таких задач невозможно без математического моделирования транспортных сетей. Главная задача математических моделей - определение и прогноз всех параметров функционирования транспортной сети на всех элементах сети, объемы перевозок в сети общественного транспорта, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача нахождения замкнутого маршрута минимальной стоимости, который проходит по всем пунктам транспортной сети.

Транспортная сеть представлена связным взвешенным графом $H=(V,P)$, де V – множество вершин, U – множество ребер. Пункту i сети соответствует вершина $i \in V$ графа $H, |V|=n$, а отрезку дорожного полотна, который связывает два соседних пункта i та j, отвечает ребро $\{i,j\} \in U$. Каждому ребру $\{i,j\}$ приписан вес $d_{ij} \in R_0^+$, равный стоимости проезда или расстоянию между пунктами i та j; R_0^+ – множество действительных неотрицательных чисел. Предполагается, что $d_{ij}=d_{ji}$.

Необходимо построить замкнутый маршрут, проходящий по всем вершинам графа *H* и имеющий минимальную сумму весов ребер (минимальную стоимость).

Анализ публикаций

Сформулированная задача получила название общей задачи коммивояжера [1], а ее решение - маршрутом коммивояжера.

Маршрутом в графе *H* называется последовательность вершин и ребер, а цепью - маршрут, все ребра которого различны. Простая цепь - это маршрут, который состоит из различных вершин. Замкнутый маршрут называется циклом, а цикл, в котором все вершины различны является простым. Простой цикл, проходящий по всем вершинам графа Н точно один раз, называется гамильтоновым циклом, или обходом.

Общая задача коммивояжера, в которой нужно найти обход с минимальной суммой весов ребер, известна как гамильтонова задача коммивояжера [1], [2]. Не всякий граф содержит гамильтонов цикл, то есть, не каждый граф гамильтонов. Таким образом, общая задача коммивояжера, в отличие от гамильтоновой задачи коммивояжера, не всегда имеет решение.

Исследованию общей задачи коммивояжера посвящено ограниченное число работ, в которых, в основном, обсуждаются подходы к построению алгоритмов ее решения. Вместе с тем проблема нахождения оптимальных гамильтоновых циклов в полном графе всесторонне изучена. В данной работе развиваются результаты из [1], [2], ориентированные на сведение общей задачи коммивояжера к известной метрической задаче коммивояжера.

Алгоритм решения общей задачи коммивояжера

Предложен точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера, построенный на ее сведении к метрической задаче коммивояжера, которая заключается в нахождении гамильтонова цикла минимальной стоимости в полном графе $H_a = (V, E)$ с весами ребер $\{i, j\}$, равными кратчайшим расстояниям между вершинами i и j графа $H = (V, U), i, j = \overline{1, n}$.

Каждому ребру $\{i, j\} \in U$ графа $H = (V, U)$ поставим в соответствие множество A_{ij} простых цепей, в которых вершины i и j - концевые. Множество A_{ij} содержит единственную цепь, состоящую из ребра $\{i, j\}$, если в графе *H* нет других простых цепей, которые соединяют вершины *i* и *j*. Выберем в A_{ij} цепь α_{ij}, ребра которой в совокупности имеют наименьший вес $D(\alpha_{ij})$. Назовем ее кратчайшей цепью между вершинами *i* и *j*. В зависимости от значений d_{ij} получим случай а), когда для всех ребер $\{i, j\} \in U$ выполняется неравенство $d_{ij} \le D(\alpha_{ij})$ и случай б), когда оно нарушается хотя бы для одного ребра. Неравенство характеризует весовые соотношения ребер в графе Н подобно неравенству треугольника $d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}$, которое должно выполняться для всех троек вершин $i, j, k \in V$, $i \ne j$, $j \ne k$, полного взвешенного графа $H_n = (V, E)$ в метрической задаче коммивояжера [1].

Найдем любым известным методом, например, алгоритмом Флойда-Уоршалла [1], кратчайшие цепи α_{ij} между всеми вершинами графа H и определим их веса $D(\alpha_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ [1].

Допустим, что граф $H = (V, U)$ негамильтонов. Тогда в любом случае а) или б) стоимость оптимального решения задачи коммивояжера σ для полного графа $H_\alpha = (V, E)$ равна стоимости решения общей задачи коммивояжера *T* для графа *H*. Поэтому маршрут *T* можно найти в результате построения в графе H_α гамильтонова цикла σ и замены в нем каждого ребра $\{i, j\} \in E$ на цепь α_{ij} из ребер множества *U*.

Приведенные рассуждения позволяют описать алгоритм решения общей задачи коммивояжера.

S0. $H = (V, U)$ - связный взвешенный граф с множеством вершин $V, |V| = n$, и множеством ребер U, $\lfloor d_{ij} \rfloor_n$ - матрица весов графа *H*, где $d_{ij} \in R_0^+$, если $\{i, j\} \in U$, и $d_{ij} = \infty$ иначе, $i, j = \overline{1, n}$, R_0^+ - множество действительных неотрицательных чисел.

S1. Построить матрицу $\lfloor \alpha_{ij} \rfloor_n$ кратчайших цепей между всеми парами вершин графа *H* и матрицу $\lfloor D(\alpha_{ij}) \rfloor_n$, в которой элемент (i, j) рамен весу $D(\alpha_{ij})$ цепи α_{ij}; матрицы $\lfloor \alpha_{ij} \rfloor_n$ и $\lfloor D(\alpha_{ij}) \rfloor_n$ определяют полный взвешенный граф $H_\alpha = (V, U)$, где каждое ребро $\{i, j\}$ заменяет цепь α_{ij} в графе *H*.

S2. В графе $H_\alpha = (V, U)$ найти обход минимальной стоимости σ любым известным методом решения метрической задачи коммивояжера.

S3. Построить оптимальное решение общей задачи коммивояжера в результате замены каждого ребра $\{i, j\}$ гамильтонова цикла σ на цепь α_{ij} графа *H*.

Выводы

Предложенный точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера, выполняется за две стадии. На первой стадии граф транспортной сети превратится в полный граф с весами ребер, ограниченными неравенствами треугольника. Каждому ребру $\{i, j\}$ полного графа ставится в соответствие цепь минимальной стоимости, соединяющую вершины *i* и *j*.

На второй стадии применяется классический метод ветвей и границ для решения метрической симметричной задачи коммивояжера, дополненный способом минимизации числа ребер в искомом маршруте [3], [4].

Литература

1. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника – М., 1981. – 323 с.
2. Бондаренко М. Ф. Компьютерная дискретная математика / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Белоус, А. Г. Руткас – Харьков, 2004. – 476 с.
3. Панишев А.В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый – Житомир, 2006. – 306с.
4. Панишев А.В. Оптимизация замкнутых маршрутов на транспортной сети / А. В. Панишев, А. Ю. Левченко, О. Б. Маций // Штучний інтелект. – Донецьк, 2010. – С. 43 - 49.

Рецензент: А.А. Тропина, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 16 сентября 2013 г.