УДК 621.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Е.И. Дружинин, к.т.н., доцент, НТУ «ХПИ»

Аннотация. *Приведены основные принципы теории и практики построения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах, на основе использования электромеханических аналогий, векторно-матричной формы записи общего вариационного уравнения динамики и специальной системы компьютерной алгебры.*

Ключевые слова: *обыкновенные дифференциальные уравнения, электрические и электромеханические системы, векторно-матричная форма записи уравнений, общее вариационное уравнение динамики, специальная система компьютерной алгебры*

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ І ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

Е.І. Дружинін, к.т.н., доцент, НТУ «ХПІ»

Анотація. *Наведено основні принципи теорії та практики побудови звичайних диференціальних рівнянь, що описують процеси в електричних і електромеханічних системах, на основі використання електромеханічних аналогій, векторно-матричної форми запису загального варіаційного рівняння динаміки та спеціальної системи комп'ютерної алгебри.*

Ключові слова: *звичайні диференціальні рівняння, електричні та електромеханічні системи, векторно-матрична форма запису рівнянь, загальне варіаційне рівняння динаміки, спеціальна система комп'ютерної алгебри*

THE MODELING OF ELECTRICAL AND ELECTROMECHANICAL PROCESSES BASED ON A COMPUTER ALGEBRA SYSTEM

E. Druzhynin, Ph.D., NTU «KhPI»

Annotation. *The basic principles of the theory and practice of the construction of ordinary differential equations describing processes in electronic and electromechanical systems, through the use of electro-mechanical analogies, a vector-matrix form of the general variational equations of dynamics and special computer algebra system.*

Keywords: *ordinary differential equations, electrical and electromechanical systems, vector-matrix form of the equations, the general variational equation of dynamics, a special computer algebra system*

Введение

Анализ динамических процессов различной физической природы, имеющих место в технических системах, сводится к составлению и последующему решению совокупности дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений [1-6]. Многие из этих систем адекватно представляются их структурно-сложными дискретными моделями большой размерности (большое количество параметров и степеней свободы), что затрудняет составление уравнений и получение их решений. Кроме того, исследование взаимовлияния указанных процессов придает задачам анализа дополнительную сложность. В этой связи, актуальным становится создание на базе специальных систем компьютерной алгебры (СКА) программных комплексов (ПК) для автоматизированного построения уравнений и эффективного поиска решений задач анализа динамических процессов в таких системах [3, 5, 6]. Таким образом, разработка ПК для анализа динамических процессов в дискретных электрических и электромеханических системах имеют важное прикладное значение, например, для решения проблем электрического транспорта.

Анализ публикаций

Отдельные публикации, например [1-4], посвящены математическому моделированию динамических процессов разной физической природы в дискретных системах. В основу построения обобщенных моделей положены известные гидромеханические и электромеханические аналогии, использующие универсальность дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы разной физической природы. Так, например, основываясь на электромеханических аналогиях для электрических цепей (ЭЦ) и электромагнитных систем (ЭМС), применяют довольно универсальные приемы построения математических моделей, которые хорошо формализованы благодаря использованию законов Кирхгофа и ориентированных графов [1, 4]. Вместе с тем, на основе электромеханических аналогий, в [2] получены дифференциальные уравнения ЭЦ с использованием уравнений Лагранжа второго рода. К настоящему времени имеются разработки ПК, в основе которых лежат специальные СКА, предназначенные для анализа динамических процессов в дискретных механических системах. Например, в работах [3, 5, 6] дано описание ПК «КИДИМ», который используется для решения задач анализа кинематики, динамики и статики силовых передач транспортных систем, в том числе и с гидрообъемными передачами. Однако в литературе практически отсутствуют теоретические и прикладные разработки ПК, основанные на СКА и предназначенные для анализа динамических процессов в дискретных электрических и электромеханических системах.

Цель и постановка задачи

Целью данной работы является изложение теоретических основ автоматизированного построения дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы в дискретных электрических и электромеханических системах, на базе общего вариационного уравнения динамики, записанного в векторно-матричной форме, с использованием электромеханических аналогий и аппарата структурных матриц.

Построение обобщенной математической модели

Представим электрическую систему с сосредоточенными параметрами в виде множества $\boldsymbol{l}$ индуктивных элементов с индуктивностями $\{L_k\}_{k=1}^{l}$, множества $\boldsymbol{r}$ омических сопротивлений $\{R_k\}_{k=1}^{r}$, множества $\boldsymbol{c}$ конденсаторов с емкостями $\{C_k\}_{k=1}^{c}$ и множества $\boldsymbol{e}$ источников ЭДС $\{E_k\}_{k=1}^{e}$. Воспользуемся электромеханической аналогией и составим вариационное равенство в форме, которая отвечает общему вариационному уравнению динамики:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{l} L_k \ddot{q}_k^{(L)} \delta q_k^{(L)} + \sum_{k=1}^{r} R_k \dot{q}_k^{(R)} \delta q_k^{(R)} + \\ + \sum_{k=1}^{c} \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \delta q_k^{(C)} + \sum_{k=1}^{e} E_k \delta q_k^{(E)} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ - заряды, которые проходят через индуктивный элемент L_k, омическое сопротивление R_k, конденсатор C_k и источник ЭДС E_k. Учитывая равенство зарядов, проходящих через последовательно соединенные элементы электрической системы, а также первый закон Кирхгофа, можно определить n независимых зарядов $\{q_k\}_{k=1}^{n}$, определяющих все остальные заряды, проходящие через каждый элемент электрической системы:

$$q_k^{(L)} = q_k^{(L)}\left(q_1, q_1, \ldots, q_n\right);\ \dot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (2)$$

$$\ddot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \ddot{q}_i;$$
$$\delta q_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (3)$$

$$q_k^{(R)} = q_k^{(R)}\left(q_1, q_1, \ldots, q_n\right);$$
$$\dot{q}_k^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \dot{q}_i;\ \delta q_k^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (4)$$

$$q_k^{(C)} = q_k^{(C)}\left(q_1, q_1, \ldots, q_n\right);$$
$$\delta q_k^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (5)$$

$$q_k^{(E)} = q_k^{(E)}\left(q_1, q_1, \ldots, q_n\right);\ \delta q_k^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (6)$$

Учитывая независимость вариаций $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ и соотношение (2)-(6), с (1) получим дифференциальные уравнения второго закона Кирхгофа для ЭЦ:

$$\sum_{i=1}^{n} a_s^i \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} b_s^i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_s^{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_s \quad (7)$$

где $s = \overline{1, n}$, $a_s^i = \sum_{k=1}^{l} L_k \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$

$$b_s^i = \sum_{k=1}^{r} R_k \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_s}$$

$$c_s^{ij} = \sum_{k=1}^{l} L_k \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$$

$$Q_s = -\sum_{k=1}^{c} \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_s} - \sum_{k=1}^{e} E_k \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_s}$$

Таким образом, для построения дифференциальных уравнений, описывающих процессы, протекающие в ЭЦ, достаточно определить множество l индуктивных элементов с индуктивностями $\{L_k\}_{k=1}^{l}$, множество r омических сопротивлений $\{R_k\}_{k=1}^{r}$, множество c конденсаторов с емкостями $\{C_k\}_{k=1}^{c}$ и множество e источников ЭДС $\{E_k\}_{k=1}^{r}$ и заряды, которые протекают через них, выразить через независимые величины. Данный подход, основанный на традиционном использовании вариационного уравнения динамики, не является единственно возможным и, тем более, оптимальным, с точки зрения реализации на ЭВМ. Более перспективным в этом смысле является использование векторно-матричной формы представления общего вариационного уравнения динамики и использование аппарата структурных матриц. Согласно [3,5,6], модель дискретной механической системы представляется совокупностью ее инерционных, диссипативных, упругих и силовых элементов. Введем в рассмотрение векторы значений этих элементов:

$$\vec{J} = \{J_1, J_2, ..., J_i,\},\ \vec{D} = \{D_1, D_2, ..., D_k,\},$$
$$\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_l,\},\ \vec{P} = \{P_1, P_2, ..., P_m,\} \quad (8)$$

векторы их координат

$$\vec{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_i\},\ \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k\},$$
$$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_l\},\ \vec{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\} \quad (9)$$

а также вектор обобщенных координат $\vec{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\}$. Кроме того, введем векторные функции (структуры):

$$\vec{f}_1 = \{f_{11}, f_{12}, ..., f_{1i}\},\ \vec{f}_2 = \{f_{21}, f_{22}, ..., f_{2k}\},$$
$$\vec{f}_3 = \{f_{31}, f_{32}, ..., f_{3l}\},\ \vec{f}_4 = \{f_{41}, f_{42}, ..., f_{4m}\} \quad (10)$$

которые разрешают однозначно выразить координаты инерционных, упругих, диссипативных и силовых элементов через обобщенные координаты

$$\vec{\eta} = \vec{f}_1\left(\vec{\zeta}\right),\ \vec{\theta} = \vec{f}_2\left(\vec{\zeta}\right),\ \vec{\xi} = \vec{f}_3\left(\vec{\zeta}\right),\ \vec{\psi} = \vec{f}_4\left(\vec{\zeta}\right) \quad (11)$$

Используя введенные величины, можно определить векторы различных сил (инерции, диссипации, упругости), необходимые для составления уравнений движения на основе общего вариационного уравнения динамики, которое представим в виде

$$\left(J\ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\eta}\right) + \left(D\dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\theta}\right) + \left(C\vec{\xi}, \delta\vec{\xi}\right) = \left(\vec{P}, \delta\vec{\psi}\right), \quad (12)$$

где J, D, C - симметричные матрицы инерции, диссипации и упругости, размерность которых определяется соответственно размерностью векторов $\vec{J}, \vec{D}, \vec{C}$. При этом:

$$\delta\vec{\eta} = \frac{\partial\vec{f}_1(\vec{\zeta})}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\theta} = \frac{\partial\vec{f}_2(\vec{\zeta})}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{f}_3(\vec{\zeta})}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta};$$
$$\delta\vec{\psi} = \frac{\partial\vec{f}_4(\vec{\zeta})}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \;\ddot{\vec{\eta}} = \ddot{\vec{f}}_1(\vec{\zeta}); \;\dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{f}}_2(\vec{\zeta}). \qquad (13)$$

Введя обозначение для структурных матриц: инерции, демпфирования, упругости и силовых воздействий

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{11}}{\partial\zeta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{1i}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{1i}}{\partial\zeta_n} \end{bmatrix}; \; S_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{21}}{\partial\zeta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{2k}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2k}}{\partial\zeta_n} \end{bmatrix};$$
$$S_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{31}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{31}}{\partial\zeta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{3l}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{3l}}{\partial\zeta_n} \end{bmatrix}; \; S_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{41}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{41}}{\partial\zeta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{4m}}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial f_{4m}}{\partial\zeta_n} \end{bmatrix}$$

запишем (12) в виде

$$\left(J\ddot{\vec{\eta}}, S_1\delta\vec{\zeta}\right) + \left(D\dot{\vec{\theta}}, S_2\delta\vec{\zeta}\right) + \left(C\vec{\xi}, S_3\delta\vec{\zeta}\right) = \left(\vec{P}, S_4\delta\vec{\zeta}\right) \quad (14)$$

Воспользовавшись свойством скалярного произведения, будем кметь

$$\left(S_1^T J\ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\zeta}\right) + \left(S_2^T D\dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\zeta}\right) + \left(S_3^T C\vec{\xi}, \delta\vec{\zeta}\right) = \left(S_4^T\vec{P}, \delta\vec{\zeta}\right) \quad (15)$$

Для голономных систем вариации обобщенных координат $\delta\vec{\zeta}$ - произвольные, поэтому из (15) получим систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$S_1^T J\ddot{\vec{\eta}} + S_2^T D\dot{\vec{\theta}} + S_3^T C\vec{\xi} = S_4^T\vec{P}. \qquad (16)$$

Заменим векторы координат векторными функциями, которые определяют структуры

$$S_1^T J\ddot{\vec{f}}_1 + S_2^T D\dot{\vec{f}}_2 + S_3^T C\vec{f}_3 = S_4^T\vec{P}. \qquad (17)$$

Уравнение (17) является обобщенной математической моделью динамических процессов, которые имеют место в дискретных голономных системах. Для широкого класса систем структуры $\vec{f}_j(\vec{\zeta})(j=\overline{1,4})$ являются постоянными и линейными. С учетом этого уравнения (17) приобретет вид:

$$S_1^T JS_1\ddot{\vec{\zeta}} + S_2^T DS_2\dot{\vec{\zeta}} + S_3^T CS_3\vec{\zeta} = S_4^T\vec{P}, \quad (18)$$

где $S_j\,(j=\overline{1,4})$ числовые структурные матрицы.

Наличие компьютерных систем аналитических вычислений разрешит автоматизировать процесс построения уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах с сосредоточенными параметрами.

Предложенный подход к составлению уравнений реализован в ПК «КИДИМ», созданному на основе специальной СКА, для компьютерного моделирования задач динамики, кинематики и статики дискретных механических систем. Он позволяет решать задачи анализа сколь угодно сложных моделей реальных технических устройств. Но в данной работе с целью упрощения выкладок и для наглядности иллюстрации использования аппарата структурных матриц рассматриваются только самые простые модели электрических и электромеханических систем. Использование уравнений вида (7) для электрической цепи, представленной на рис. 1, позволит получить ее дифференциальные уравнения в виде, который отвечает векторно-матричному уравнению (17).

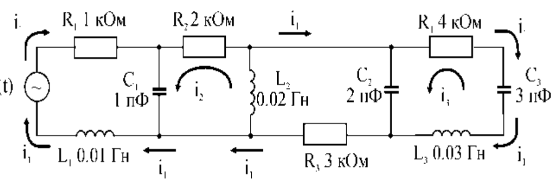

Рис. 1. Схема электрической цепи

Воспользуемся первым вариантом электромеханической аналогии между характеристиками электрической цепи и механической системы. Примем следующие соответствия:

- зарядам в ветвях контура отвечают перемещения точек материальной системы;
- напряжениям - внешние силы;
- силам тока - скорости материальных точек;
- сопротивлениям тока - внутренние (вязкие)

трения;
- емкостям – податливости связей;
- индуктивностям – инерционные характеристики точек механической системы.

В качестве обобщенных координат выберем заряды в контурах схемы. Уравнения (16), (17) могут быть применены для составления дифференциальных уравнений электрических цепей. Если цепи линейные, то целесообразно воспользоваться уравнением (18).

Структурные матрицы и матрицы значений «инерционных», «диссипативных», «упругих» элементов и вектор внешних «силовых» элементов запишем так:

$$S_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix};\quad S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix};\qquad(19)$$
$$S_3=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix};\quad S_4^T=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$J=\begin{bmatrix}L_1&0&0\\0&L_2&0\\0&0&L_3\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}R_1&0&0&0\\0&R_2&0&0\\0&0&R_3&0\\0&0&0&R_4\end{bmatrix};\qquad(20)$$
$$C=\begin{bmatrix}1/C_1&0&0\\0&1/C_2&0\\0&0&1/C_3\end{bmatrix};\quad \vec{P}=\{e_1(t)\}.$$

После подстановки (19), (20) в (18) и выполнение операций имеем векторно-матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix}L_1+L_3&0&-L_3\\0&L_2&0\\-L_3&0&L_3\end{bmatrix}\cdot\ddot{\vec{q}}+\begin{bmatrix}R_1+R_2+R_3+R_4&-R_2&-R_4\\-R_2&R_2&0\\-R_4&0&R_4\end{bmatrix}\cdot\dot{\vec{q}}+$$
$$+\begin{bmatrix}1/C_1+1/C_3&-1/C_1&-1/C_3\\-1/C_1&1/C_1&0\\-1/C_3&0&1/C_2+1/C_3\end{bmatrix}\cdot\vec{q}=\begin{bmatrix}e_1(t)\\0\\0\end{bmatrix}\qquad(21)$$

окончательно, система дифференциальных уравнений ЭЦ примет вид:

$$\begin{cases}(L_1+L_3)\ddot{q}_1-L_3\ddot{q}_3+(R_1+R_2+R_3+R_4)\dot{q}_1+\\+(1/C_1+1/C_3)q_1-\dfrac{1}{C_1}q_2-\dfrac{1}{C_3}q_3=e_1(t)\\L_2\ddot{q}_2+R_2\dot{q}_2-R_2\dot{q}_1+\dfrac{1}{C_1}q_2-\dfrac{1}{C_1}q_1=0\\L_3\ddot{q}_3-L_3\ddot{q}_1+R_4\dot{q}_3-R_4\dot{q}_1+\left(\dfrac{1}{C_2}+\dfrac{1}{C_3}\right)q_3-\dfrac{1}{C_3}q_1=0\end{cases}\qquad(22)$$

В табл. 1 представлены значения собственных частот электрической цепи, а на рис. 2, 3 - амплитудно-частотные характеристики зарядов, которые протекают через элементы системы. На вход электрической цепи, представленной на рис. 1, подавался синусоидальный сигнал амплитудой 10 вольт.

Таблица 1 Значения собственных частот электрической цепи

Номер частоты	Значения собственных частот	
	Гц	рад/ сек.
1	336178.004	2112268.696
2	909467.889	5714355.282
3	2197619.398	13808049.915

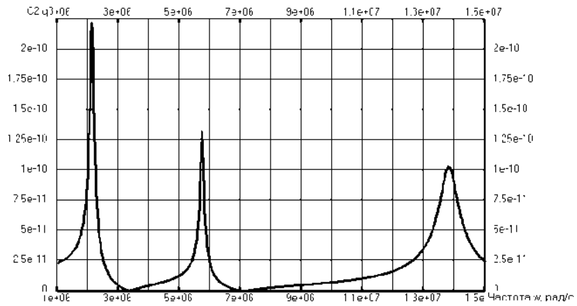

Рис.2 Амплитудно-частотная характеристика заряда на конденсаторе C_2

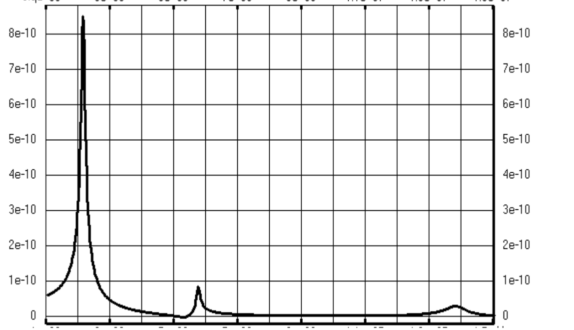

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика заряда на индуктивности L_3

В качестве простейшей электромеханической системы рассмотрим конденсаторный микрофон, представленный на рис. 4.

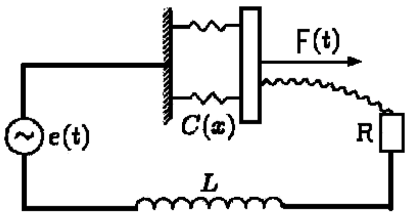

Рис. 4. Конденсаторный микрофон

Правая пластина конденсатора имеет массу m и связана с левой неподвижной пластиной пружинами общей жесткости k. Конденсатор имеет переменную емкость $C(x)=C_0 a/(a-x)$, где x - деформация пружин, a - расстояние между пластинами, когда пружины нейтральны, $x \ll a$. В качестве обобщенных координат выбираем x и q. Применяя приведенный выше алгоритм составления уравнений в векторно-матричной форме с использованием структурных матриц для емкостного микрофона, имеем:

$$\vec{J}=\{m,L\},\vec{D}=\{0,R\},\vec{C}=\{k,1/C(x)\},\vec{P}=\{F(t),e(t)\};$$

$$J=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix},D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/C(x) \end{bmatrix}.$$

$$\vec{\eta}=\vec{\xi}=\vec{\psi}=\vec{f}_1=\vec{f}_3=\vec{f}_4=\{x,q\};\ \vec{f}_2=\{0,q\};$$

$$S_1=\frac{\partial \vec{f}_1(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=S_1^T;$$

$$S_2=\frac{\partial \vec{f}_2(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=S_2^T;$$

$$S_3=\frac{\partial \vec{f}_3(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=S_3^T;$$

$$S_4=\frac{\partial \vec{f}_4(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=S_4^T.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/C(x) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} F(t)+q^2/C_0 a \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Окончательно имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx-q^2/C_0 a=F(t) \\ L\ddot{q}+R\dot{q}+q(a-x)/C_0 a=e(t) \end{cases} \qquad (23)$$

Систему уравнений (23) можно получить, воспользовавшись уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+Q_x \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}_q-\frac{\partial \Phi}{\partial q}+Q_q, \end{cases} \qquad (24)$$

где выражения для кинетической и потенциальной энергии электромеханической системы, а также выражения для функции Рэлея и обобщенных сил имеют вид:

$$T=\frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2+L\dot{q}^2\right);\quad \Pi=\frac{1}{2}\left(kx^2+\frac{q^2(a-x)}{C_0 a}\right);$$

$$\Phi=\frac{1}{2}R\dot{q}^2;\quad Q_x=F(t);\quad Q_q=e(t);$$

Результаты расчета с помощью комплекса КИДИМ приведены на рис. 5-8. Иллюстративно параметры электромеханической системы и характер их изменения имели следующие значения и выражения:

m=0,01; L=0,1 ; a=1e-3; Co=1e-6; k=1e3; R=1e6;

F=0,01sin(100t); E=0,01cos(500t);

Рис. 5. Перемещение правой пластины конденсатора

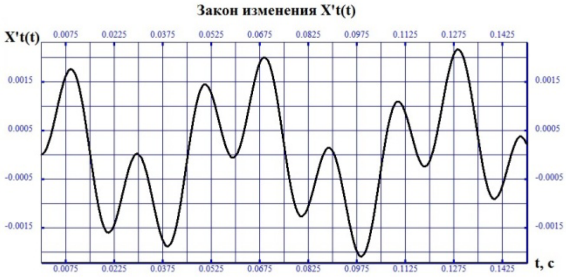

Рис. 6. Скорость правой пластины конденсатора

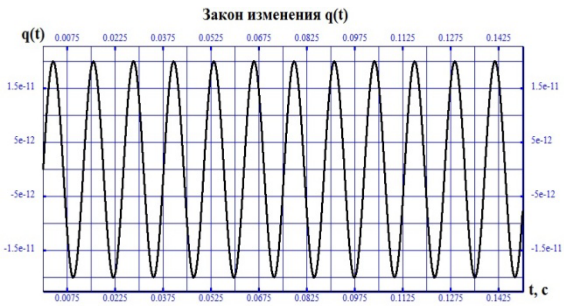

Рис. 7. Изменение заряда цепи

Рис. 8. Изменение силы тока в цепи

Выводы

Используя методику построения уравнений движения дискретных механических систем на основе общего вариационного уравнения динамики, представленного в векторно-матричной форме с использованием аппарата структурных матриц, и электромеханических аналогий, проиллюстрировано получение обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах.

Рассмотрены вопросы компьютерного составления уравнений электромеханических систем, а также примеры моделирования динамических процессов в таких системах.

На основе свойства инвариантности вида дифференциальных уравнений, описывающих процессы разной физической природы в дискретных системах, имеется возможность автоматизировать построение обобщенных математических моделей электромеханических систем.

Литература

1. Блекборн Дж., Ритхоф Г., Шерер Дж. Л. Гидравлические и пневматические силовые системы управления. - Г.: ИЛ, 1962. - 616 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. - Г.: Наука, 1966. - 300 с.
3. Дружинин Е.И., Штейнвольф Л.И. Динамические модели силовых цепей машин с гидрообъемными передачами. - В сб.: Теория механизмов и машин. - Харьков: Высшая школа, 1984, вып. 36, с. 95-102.
4. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. - Г.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 496 с.
5. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структурные матрицы вибрационных систем.- В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков,1973, вып. 17,с.3-7.
6. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структуры дискретных механических моделей конструкций. - В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков, 1982, вып. 35, с.3-6.