УДК 519.161

# ПОИСК НАИБОЛЬШЕГО ПОКРЫТИЯ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА ЗВЕЗДАМИ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ

**О.А. Подоляка, доцент, к.т.н., ХНАДУ,**
**А.Н. Подоляка, ст. преподаватель, НАУ «ХАИ»**

***Аннотация.*** *Представлен эффективный алгоритм $o(n^4)$ решения задачи поиска наибольшего покрытия двудольного графа звездами заданной степени.*

***Ключевые слова:*** *граф, звездное покрытие, паросочетание.*

# ПОШУК НАЙБІЛЬШОГО ПОКРИТТЯ ДВОДОЛЬНОГО ГРАФА ЗІРКАМИ ЗАДАНОГО СТУПЕНЯ

**О.О. Подоляка, доцент, к.т.н., ХНАДУ,**
**О.М. Подоляка, ст. викладач, НАУ «ХАІ»**

***Анотація.*** *Представлено ефективний алгоритм $o(n^4)$ розв'язання задачі пошуку найбільшого покриття дводольного графа зірками заданого ступеня.*

***Ключові слова:*** *граф, зіркове покриття, паросполучення.*

# SEARCH ALGORITHM OF GIVEN STAR DEGREE COVERING OF BIPARTITE GRAPH

**O. Podolyaka, assistant professor, cand. eng. sc., KhNAHU,**
**A. Podolyaka, senior lecturer, NAU «KhAI»**

***Abstract.*** *Efficient search algorithm $o(n^4)$ of given star degree covering of a bipartite graph are considered.*

***Key words:*** *graph, star cover, matching.*

## Введение

Необходимость устойчивого экономического развития выдвинула в число приоритетов повышение эффективности использования транспорта, а особенно автомобильного, поскольку именно он обеспечивает доставку с самой высокой скоростью из всех видов наземного транспорта. На сегодняшний день прежний дефицит транспортных услуг уступил место жесткой конкуренции. А одним из весомых конкурентных преимуществ для предприятий является именно высокая эффективность работы. В связи с этим, рассматриваемые в работе Задачи поиска наибольшего покрытия двудольного графа звездами заданной степени являются актуальными, востребованными и с успехом могут использоваться в решении оптимизационных задач транспортной логистики.

## Анализ публикаций

Во-первых, необходимо отметить, что звездные покрытия естественным образом обобщают паросочетания, т.к. паросочетающее ребро можно рассматривать как вырожденную звезду первой степени. Следовательно, результаты работы представляют научный интерес с точки зрения теории паросочетаний [1, 2, 3].

Во-вторых, звездные покрытия обобщают математические модели паросочетаний, это позволяет усовершенствовать модели прикладных задач. Нужно отметить, что звезда естественным образом представляет машину. Например, степень звезды может означать число посадочных мест (задач, процессов и т.п.). Поэтому, результаты работы являются вкладом в теорию моделей логистических задач, для которых производительность машины может быть больше единицы [4].

И в-третьих, в работе представлен полиномиальный алгоритм решения поставленной задачи. Он может быть использован для решения логистических задач большой размерности, в которых учитывается производительность машин [3].

### Цель и постановка задачи

Исследование логистических моделей на транспорте, задач распределения ресурсов, предприятий с дискретным характером производства и разработке на их основе эффективных полиномиальных алгоритмов решения оптимизационных задач.

Объект: логистические процессы. Предмет исследования: алгоритмы решения логистических задач, которые можно представить в виде звездных покрытий.

### Формальная постановка задачи поиска звездного покрытия графа на примере оптимизации транспортных привозок

Исходные данные задачи представлены двудольным графом, вершины первой доли которого означают машины, а второй доли - грузы, ребра – стоимость или время доставки соответствующего груза. Транспортному предприятию необходимо доставить максимальное число грузов потребителям минимизировав общие затраты на перевозки при условиях:

1. производительность автомобилей идентична. Степень звезды покрытия определяет максимальную производительность автомобиля, т.е. максимальное число грузов, которое может перевозить автомобиль;
2. грузы однотипны, т.е. каждый автомобиль может перевозить любой груз.

### Математическая постановка задачи

Рассмотрим оптимизационную задачу покрытия взвешенного двудольного графа $G(V_1,V_2,E)$ звездами одинаковой степени.

$h$*-звезда* – это связный двудольный граф $G_{1,h}$, одна из долей которого имеет степень равную $h$ и называется вершиной звезды, а каждая из вершин другой доли – единичную степень. Звезду можно также рассматривать как дерево, у которого количества ребер и листьев равны степени звезды.

$h$-звездным покрытием (ЗП) графа назовем множество $E_h \in E$ ребер графа, инцидентных звездам, степень которых не превосходит $h$.

Вес звездного покрытия определяется как сумма весов всех его ребер.

$$w(E_h) = \sum_{e \in E_h} w(e) \qquad (1)$$

Наибольшим $h$-звездным покрытием (НЗП) графа назовем $h$-звездное покрытие $E_h^{'} \in E$ максимальной мощности, т.е. для любого $E_h^{'}, \left|E_h^{'}\right| \ge \left|E_h\right|$. НЗП, покрывающее все вершины графа назовем совершенным ЗП.
Множество всех возможных наибольших $h$-звездных покрытий графа обозначим $E_h^{'all}$.

В рассматриваемой задаче первой доли исходного графа соответствуют вершины звезд, а вершины второй доли – это листья звезд. Для удобства будем считать, что количества вершин второй $V_2$ и первой доли $V_1$ кратны степени звезды, т.е.

$$|V_2| \ge |V_1|,\ |V_2| = h \cdot |V_1|,\ h \in N. \qquad (2)$$

Выполнение этого условия можно всегда обеспечить путем добавления недостающего количества фиктивных вершин и ребер.

Пусть оптимальным считается звездное покрытие сумма весов ребер которого минимальна.

$$w\left(E_h^*\right)=\min_{E_h^{'}\in E_h^{'all}}\left[w\left(E_h^{'}\right)\right] \qquad (3)$$

Это функционал задачи поиска наибольшего звездного покрытия в двудольном графе (НЗП) минимального веса.

Математическая модель задачи в матричной постановке

Рассмотрим задачу оптимизационную задачу поиска НЗП для графа $G_{n,n\cdot h}\left(V_1,V_2,E\right)$ в матричной постановке. В ней отражена принадлежность элемента $\beta_{ij}$ матрицы двудольного графа β некоторому наибольшему звездному покрытию $E_h^V\in E$. Это достигается путем умножения этого значения на соответствующее значение $x\in\{0,1\}$.

Пусть: $M$ - строки, $N$ - столбцы, $h=N/M$ - степень звезды и, тогда постановка имеет вид.

$$\begin{cases} w\left(E_h^*\right)=\sum_i^M\sum_j^N\left(x_{ij}\beta_{ij}\right)\to\min \\ \sum_{i=1}^M x_{ij}=k\cdot h, j=\overline{1,N} \\ \sum_{j=1}^N x_{ij}=k, i=\overline{1,M} \\ x\in\{0,1\} \\ k=1 \end{cases} \qquad (4)$$

Выражение

$$w\left(E_h^*\right)=\min_{E_h^{'}\in E_h^{'all}}\left[w\left(E_h^V\right)\right]=\sum_i^M\sum_j^N\left(x_{ij}\beta_{ij}\right)\to\min$$

представляет функционал задачи, аналогичный (3).

При $k=1$ выражения $\sum_{i=1}^M x_{ij}=h$ и $\sum_{j=1}^N x_{ij}=1$ показывают, что в каждой строке есть $h$ элементов $\beta_{ij}$, а каждом столбце исходной матрицы находится один элемент решения $\beta_{ij}$, т.е. эти выражения определяют звезды $E_h^{'}$.
Следует отметить, что:

1. При $h=1$ (4) представляет собой постановку классической задачи о назначениях (ЗН) [1];
2. Задача поиска наибольшего паросочетания может быть представлена эквивалентной оптимизационной постановкой (4) с матрицей назначений элементами которой есть значения 0 или 1 (есть ребро, нет ребра);
3. Постановка задачи (4) при $k>1$ заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим, только что эта задача может быть сведена к последовательности решений $k$ задач НЗП в матрицах размерности $MxN_j, N_j=N\cdot j, j\in\overline{1,k}$.
4. При $h=k=2$ получаем постановку задачи поиска 2-фактора, или поиска покрытия графа остовными циклами [1].

Далее установим попарную совместимость ребер взвешенного ЗП. Она определяется при помощи элементов названных линейными парами (ЛП).

**Линейные пары**

Пусть $\beta_{a,d}\wedge\beta_{c,b}$, $a\neq c, d\neq b$ - пара элементов (ребер) некоторого решения задачи НЗП и существует ее замена $\beta_{a,b}\wedge\beta_{c,d}$, которая улучшает исходное решение, или позволяет получить другое эквивалентное решение. Т.е.:

$$\left(\beta_{a,b}-\beta_{c,b}\right)\le\left(\beta_{a,d}-\beta_{c,d}\right).$$

Элементы формулы $\left(\beta_{a,b},\beta_{c,b}\right)$ и $\left(\beta_{a,d},\beta_{c,d}\right)$ - это линейные пары. Следует отметить, что ребра указанных ЛП формируют циклическую чередующуюся цепь $\left((a,b),\overline{(b,c)},(c,d),\overline{(d,a)}\right)$ относительно некоторого паросочетания. Эквивалентные обозначения ЛП: $L_j^{cs}\leftrightarrow\left(\beta_{cj},\beta_{sj}\right)$.

Пусть $w\left(L_j^{cs}\right)$ весовая функция ЛП, тогда *значение линейной пары* строк c и s матрицы вычисляется по формуле:

$$l_j^{cs}=w\left(L_j^{cs}\right)=\beta_{cj}-\beta_{sj},\ j\in\left[0,N-1\right] \qquad (5)$$

Абстрактный тип данных ЛП формируют три обязательных поля: индекс клиентской строки ($c$), индекс серверной строки($s$) и индекс их столбца($j$).

Мультимножество линейных пар (МЛП) - это последовательность линейных пар двух заданных строк/столбцов матрицы двудольного графа.

**Линейное равенство строк/столбцов**

Две строки/столбца a и b линейно равны $(a \overset{=}{,} b)$, если равны значения линейных пар мультимножества этих строк/столбцов и не равны в противном случае.

Т.е. $(a \overset{=}{,} b)$, если: $l^{ab} = \beta_{aj} - \beta_{bj} = C$; $C = const$; $\forall j \in J$.
Определение: линия – строка/столбец матрицы смежности графа.

Линия $a$ – является клиентской, $b$ – серверной.

Если линии равны, то в мультимножестве этих линий вес минимальной ЛП равен весу максимальной ЛП.

Свойства равных линий

1. Рефлективность: $(a \overset{=}{,} a)$.
2. Симметричность: $(a \overset{=}{,} b) \approx (b \overset{=}{,} a)$.
3. Транзитивность: $(a \overset{=}{,} b) \wedge (b \overset{=}{,} c) \approx (a \overset{=}{,} c)$.

Следовательно, множество линий матрицы разбивается на классы эквивалентности (КЭ) на основании отношения линейного равенства и в ходе выполнения алгоритма выполняется объединение этих классов. Мощность линии $|a|_=$ – мощность класса эквивалентности, т.е. число равных линий, включая $a$.

Необходимо отметить, что изложенный ранее материал был нужен, чтобы сформулировать ключевую теорему метода решения задачи поиска НЗП.

Теорема 1. Нормализации на основе линейного равенства

Пусть: $L^{cs}$ - МЛП клиентской линии $c$ и серверной линии $s$ матрицы β двудольного графа $G_{n,h*n}(V_1, V_2, E)$.

$L_j^{cs}$ - ЛП $j$-ой линии, а $l_j^{cs} = w\left(L_j^{cs}\right)$ её вес.
$|s|_=$ – мощность класса эквивалентности серверной линии $L^{cs}$
$t$ - количество элементов клиентской линии $c$ МЛП $L^{cs}$ запрещение, которых не изменяет вес оптимального решения задачи (запрещение элемента означает удаление ребра графа).

$$t = \begin{cases} h \cdot |s|_= , \text{если } s - \text{строка} \\ \left\lfloor \dfrac{|s|_=}{h} \right\rfloor , \text{если } s - \text{столбец} \end{cases}$$

$a_k$ - количество ЛП $L^{cs}$ больших по весу пары $l_k^{cs}$;
$b_k$ - количество ЛП $L^{cs}$ больших и равных по весу пары $l_k^{cs}$;
$l_{norm}^{cs} = l_k^{cs}, t \in [a_k, b_k]$.
Тогда:

$$\forall j, l_j^{cs} > l_{norm}^{cs} \Rightarrow \beta_{cj} = \beta_{sj} + l_{norm}^{cs} \qquad (6)$$

Данную формулу назовем нормализационным оператором.

Уточнение: нормализатор $l_{norm}^{cs}$ - это ЛП для которой $t \in [a_k, b_k]$. Нормализатором всегда является $(t+1)$ по счету линейная пара в отсортированном по убыванию МЛП. Нормализатор – это грань, которая делит мультимножество на два подмультимножества: первое мощности $|s|_=$ состоит из больших или равных нормализатору ЛП, и второе мощности $\left|L^{cs}\right| - |s|_=$, состоящее из меньших или равных нормализатору ЛП.

Замечание: здесь, приведена компактная формулировка теоремы. Она, по сути, состоит из двух теорем: теоремы запрещения, которая позволяет определить недопустимые ребра и теоремы нормализации, которая уменьшает вес этих ребер.

**Нормализационный алгоритм**

В основе разработанного алгоритма поиска экстремального НЗП лежат теоремы запрещения и нормализации. Они реализованы в виде соответствующих процедур, которые выполняются полиномиальное число раз. При выполнении этих процедур элементы матрицы входящие в оптимальные решения не изменяются, а значения остальных запрещенных элементов будут уменьшены. Момент, когда дальнейшее уменьшение весов ребер станет невозможным отражен в минимаксной лемме останова, которая является одной из форм обобщения фундаментальной теоремы Менгера для двудольных графов [1]. Поэтому в основе алгоритма лежат три типа теорем:

1. Теоремы запрещений, на основании которых выполняется поиск недопустимого элемента $\beta_{cj}, l_j^{cs} > l_{norm}^{cs}$.
2. Теоремы нормализации - уменьшения значения запрещенного элемента $\beta_{cj} = \beta_{sj} + l_{norm}^{cs}$
3. Лемма останова.

Понятно, что после нормализации решения задачи становятся одинаковыми, т.к. становятся равными соответствующие ЛП. Здесь возникает вопрос – когда этот процесс останавливается? Ответ очевиден – этот момент наступит, когда нормализация не приводит к уменьшению запрещенных элементов. Это случится, если линейные пары всех МЛП $M$ строк или $N$ столбцов будут равны.

### Лемма останова

*Лемма останова (простая форма).* Если все строки или столбцы в матрице $\beta$ линейно равны, то все решения экстремальной задачи поиска НПЗ являются равными и оптимальными.

*Лемма останова (КЭ форма).* Если множество всех строк или столбцов матрицы $\beta$ образуют один класс эквивалентности определенный операцией линейного равенства, то все решения экстремальной задачи поиска НПЗ являются равными и оптимальными.

*Лемма останова (минимаксная МЛП форма).* Если в каждом из $(n-1)$ различных МЛП строк или столбцов $(m-1)$ матрицы $\beta$ значение минимальной ЛП равно значению максимальной ЛП, то все решения экстремальной задачи поиска НПЗ являются равными и оптимальными.

### Общая схема нормализационного алгоритма

Пусть: $B$ – матрица смежности графа, $I$ – множество строк, $J$ – множество столбцов.

**Solve(in/out B, in I, in J),** $O(n^4)$

*while(все линии не равны)*

*циклический перебор всех пар строк,* $O(n^2)$

*for(* $\forall r1, r1 \in I$ *)*

*for(* $\forall r2, r1 \neq r2, r2 \in I$ *)*

*нормализация строк* $O(n)$

*normalize_rows (r1,r2)*

*объединить равные строки в один класс,* $O(n)$

*if(r1=r2) equivalence_rows(r1,r2)*

*циклический перебор всех пар столбцов,* $O(n^2)$

*for(* $\forall c1, c2 \in J$ *)*

*for(* $\forall c2, c1 \neq c2, c2 \in J$ *)*

*нормализация столбцов (6),* $O(n)$

*normalize_cols (c1,c2)*

*объединить равные столбцы в один класс,* $O(n)$

*if(c1=c2) equivalence_cols(c1,c2)*

Нужно сказать, что реализованный в алгоритме перебор всех подряд пар линий матрицы недостаточно рационален, поскольку во многих случаях мало уменьшает вес недопустимых ребер, или не уменьшает вообще. Более рационально было бы в качестве новых пар строк или столбцов использовать индексы экстремальных ЛП текущего мультимножества. В этом случае мы получили бы гораздо более сложный и менее понятный алгоритм. Отмечу также что, по всей видимости, «обратный» алгоритм, который увеличивает веса минимальных ребер, пока не будет найдено звёздное покрытие, должен быть на порядок более эффективным. Поэтому теоретическая сложность различных видов нормализационного алгоритма лежит в пределах $[n^2, n^4]$.

Теперь, перейдем к рассмотрению решения практической задачи

Пример решения задачи поиска НЗП звездами разной степени

Агентству по набору персонала для 4-х специализированных подразделений IT-фирмы нужно выбрать лучших специалистов из 12-ти кандидатов. Специалисты: 1 менеджер, 2 проектировщика, 3 тестировщика, 4 программиста.

При этом предполагается, что каждый кандидат может работать в любом из подразделений.

Теперь рассмотрим процедуру балансировки задачи - сведения задачи поиска НЗП звездами разной степени к задаче поиска НЗП (одинаковой степени $h$).

1. Определение степени $h$ звезд задачи поиска НЗП. По условию задачи $h$ = 4, т.к. самое большое подразделение фирмы формируют программисты.

2. Определение числа звезд или вершин первой доли. Кандидатам не прошедшим отбор нужно поставить в соответствие необходимое число звезд степени $h$. В нашем случае 12-(1+2+3+4) = 2 кандидата формируют одну звезду.

3. Добавление звезд и ребер. Добавить одну вершину первой доли в граф и соединить ее со всеми вершинами второй доли ребрами минимального веса.

4. *Выравнивание степеней звезд*. Для каждой звезды степени $k$, $k<h$ добавить $h$-$k$ смежных вершин второй доли, соединенных ребрами минимального веса.

В матричной постановке добавление вершин эквивалентно добавлению строк и столбцов в матрицу смежности графа.

Пусть оценки 12-ти кандидатов 4-х подразделений компании заданы в виде следующей таблицы (рис.1).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 41 | 999 | 18 | 17 | 11 | 37 | 39 | 33 | 38 | 26 | 27 | 21 |
| 2 | 999 | 26 | 31 | 7 | 45 | 999 | 23 | 999 | 9 | 28 | 999 | 32 |
| 3 | 31 | 27 | 999 | 999 | 13 | 17 | 999 | 999 | 14 | 40 | 999 | 16 |
| 4 | 999 | 2 | 2 | 999 | 1 | 999 | 2 | 41 | 34 | 15 | 13 | 999 |

Рис. 1 - Оценки кандидатов

Минимальная оценка равна нулю и считается лучшей, наихудшей оценкой является бесконечность, в матрице ей соответствует число 999.

Выполним балансировку задачи - добавление недостающих звезд, выравнивание их степеней, установка весов ребер (рис. 2).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 41 | 999 | 18 | 17 | 11 | 37 | 39 | 33 | 38 | 26 | 27 | 21 | 0 | 0 | 0 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 |
| 2 | 999 | 26 | 31 | 7 | 45 | 999 | 23 | 999 | 9 | 28 | 999 | 32 | 999 | 999 | 999 | 0 | 0 | 999 | 999 | 999 |
| 3 | 31 | 27 | 999 | 999 | 13 | 17 | 999 | 999 | 14 | 40 | 999 | 16 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 0 | 999 | 999 |
| 4 | 999 | 2 | 2 | 999 | 1 | 999 | 2 | 41 | 34 | 15 | 13 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 0 | 0 |

Рис. 2 – Матрица сбалансированной задачи

Далее выполняется поиск НЗП графа K5,20 звездами S4 по нормализационному алгоритму. Результатом работы алгоритма является матрица эквивалентности. Она определяет один класс эквивалентности, поскольку в матрице все линии равны. Элементы решения выделены зеленым и красным (рис. 3).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26 | 13 | 13 | 5 | 8 | 12 | 13 | 26 | 7 | 26 | 24 | 11 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -5 | 26 | 26 |
| 2 | 28 | 15 | 15 | 7 | 10 | 14 | 15 | 28 | 9 | 28 | 26 | 13 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | -3 | 28 | 28 |
| 3 | 31 | 18 | 18 | 10 | 13 | 17 | 18 | 31 | 12 | 31 | 29 | 16 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 0 | 31 | 31 |
| 4 | 15 | 2 | 2 | -6 | -3 | 1 | 2 | 15 | -4 | 15 | 13 | 0 | -11 | -11 | -11 | -13 | -13 | -16 | 15 | 15 |
| 5 | 0 | -13 | -13 | -21 | -18 | -14 | -13 | 0 | -19 | 0 | -2 | -15 | -26 | -26 | -26 | -28 | -28 | -31 | 0 | 0 |

Рис. 3 – Матрица эквивалентности

Результирующая матрица эквивалентности, полученная путем перестановки соответствующих столбцов (рис. 4).

| | 10 | 13 | 14 | 15 | 4 | 9 | 16 | 17 | 5 | 6 | 12 | 18 | 2 | 3 | 7 | 11 | 1 | 8 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 | -2 | -2 | 8 | 12 | 11 | -5 | 13 | 13 | 13 | 24 | 26 | 26 | 26 | 26 |
| 2 | 28 | 2 | 2 | 2 | 7 | 9 | 0 | 0 | 10 | 14 | 13 | -3 | 15 | 15 | 15 | 26 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| 3 | 31 | 5 | 5 | 5 | 10 | 12 | 3 | 3 | 13 | 17 | 16 | 0 | 18 | 18 | 18 | 29 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| 4 | 15 | -11 | -11 | -11 | -6 | -4 | -13 | -13 | -3 | 1 | 0 | -16 | 2 | 2 | 2 | 13 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 5 | 0 | -26 | -26 | -26 | -21 | -19 | -28 | -28 | -18 | -14 | -15 | -31 | -13 | -13 | -13 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Рис. 4 – Результирующая матрица

## Результат решения задачи

*менеджер*: кандидат №10, его оценка 26;
*проектировщики:* кандидаты №4 и № 9, их оценки 7 и 9;
*тестировщики:* кандидаты №5, №6, №12, их оценки 13,17,16;
*программисты:* кандидаты №2, №3, №7, №11 их оценки 2,2,2,13;
Сумма оценок кандидатов (вес НЗП): 107.

## Выводы

В прикладном аспекте, представленные результаты могут быть использованы при разработке систем календарного планирования и оперативного управления на транспорте, систем управления гибкими автоматизированными системами для предприятий с дискретным характером производства и решения прикладных задач распределения ресурсов [3,4].

С точки зрения дискретной математики, данное исследование являются существенным вкладом в теорию паросочетаний, т.к. обобщают множество известных задач в том числе: наибольшее паросочетание, задачу о назначениях, трансверсали, 2-фактор и д.р. [1,2].

Необходимо также отметить, что математическая модель задачи поиска характеризуется типизацией звезд или вершин первой доли по мощности. Следовательно, данная работа развивает теорию моделей прикладных задач распределения ресурсов и т.п. [4,3].

## Литература

1. Ловас Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер. - М.: Мир, 1998. – 653 с.
2. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
3. Бенсон Д. Транспорт и доставка грузов / Д. Бенсон, Дж. Уайтхед. – М.: Транспорт, 1990. –279 с.
4. Джерихов В.Б. Управление техническими системами / В.Б. Джерихов; СПбГАСУ. – СПб., 2007. – 51 с.

Рецензент О.Я. Никонов, профессор, д.т.н., ХНАДУ

Статья поступила в редакцию 25.05.2015 г.