

УДК 536.5.08

ПЛАНИРОВАНИЕ И ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Г.Д. Симбирский, доцент, к.т.н., В.К. Вязеленко, студент, ХНАДУ

Аннотация. Изложена методология планирования и оценивания погрешностей математического моделирования в машиностроении. Она заключается в использовании таких метрологических показателей как совместные доверительные области и интервалы оценок искомых параметров. Эти показатели зависят от особенностей вектора измеряемых параметров объекта и функций их чувствительности к изменению искомых параметров.

Ключевые слова: математическое моделирование, планирование эксперимента, совместные доверительные области, фильтр Калмана, оценки точности.

ПЛАНУВАННЯ ТА ТОЧНІСТЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У МАШИНОБУДУВАННІ

Г.Д. Симбірський, доцент, к.т.н., В.К. Вязеленко, студент, ХНАДУ

Анотація. Викладено методологію планування та оцінювання похибок математичного моделювання в машинобудуванні. Вона полягає у використанні таких метрологічних показників як спільні довірчі області та інтервали оцінок шуканих параметрів. Ці показники залежать від особливостей вектора вимірюваних параметрів об'єкта і функцій їх чутливості до зміни шуканих параметрів.

Ключові слова: математичне моделювання, планування експерименту, спільні довірчі області, фільтр Калмана, оцінки точності.

PLANNING AND ACCURACY OF MATHEMATICAL MODELING IN MASHINEBUILDING

G. Simbirskiy, assistant professor, cand. eng. sc., V. Vyazelenko, student, KhNAHU

Abstract. The methodology of planning and estimation errors of mathematical modelling in engineering. It lies in the use of metrological performance as joint confidence regions and intervals estimates of the desired parameters. These figures depend on the characteristics of the vector of the measured parameters of the object and functions of their sensitivity to changes in the desired parameters.

Key words: mathematical modelling, design of experiments, joint confidence regions, Kalman filter, estimation accuracy.

Введение

Математическое моделирование составляет основу современных экспериментально-расчетных исследований в машиностроении. Известно, что значительную часть проблематики при математическом моделировании

составляют обратные задачи (ОЗ).

Интерес к обратным задачам математического моделирования постоянно возрастает, что вызывается как потребностью практики, так и активным развитием методов и средств вычислительной техники. Например, в тепло-

нергетике, включая тепловые двигатели, широко применяются методы ОЗ как при экспериментальных исследованиях температурного состояния рабочих тел и элементов конструкции, так и при оптимальном проектировании последних.

Анализ публикаций

Как указано в фундаментальной монографии [1], наиболее эффективным является экстремальный подход к решению ОЗ, состоящий в минимизации квадратичных целевых функционалов. Такой подход может быть реализован в форме метода параметрической идентификации физического процесса или объекта, который заключается в получении на основе экспериментальных данных оптимальных оценок $\hat{\Theta}$ некоторого вектора Θ искомых параметров теплопереноса, входящего в его математическую модель. Одни из первых случаев успешного применения этого метода для решений различных ОЗ приведены в работах [2–5], а информацию о характере и перспективах его использования в различных отраслях науки и техники можно найти в представительном обзоре [6].

Известно, что ОЗ относятся к некорректно поставленным задачам математической физики, которым свойственна неустойчивость решений. Поэтому вопросы достоверности и точности получаемых решений, в частности, методом параметрической идентификации имеют первостепенное значение.

В технической литературе [5, 7–9] рассматривается параметрическая идентификация как метод решения обратных задач теплопереноса, являющихся наиболее сложной разновидностью ОЗ. В таких ОЗ в качестве уравнений измерения выступают математические модели теплопереноса в технических объектах. Это обстоятельство в соответствии с требованиями к средствам и методам измерений также приводит к необходимости установления количественных показателей точности решений ОЗ.

Проблемы точности результатов параметрической идентификации различных динамических объектов рассматриваются в работах по теории чувствительности динамических систем, например, в монографии [10].

Известны исследования, посвященные воп-

росам оптимального планирования параметрической идентификации как экстремального метода решения ОЗТ. Методология такого планирования в завершённом виде изложена, в частности, в монографии [1]. В ее основу положены исследования особенностей информационной матрицы Фишера Φ , составленной из функций чувствительности измеряемых параметров к идентифицируемым, и которые отражают значимые факторы постановки задачи математического моделирования. Добиваясь априори желательных свойств матрицы Φ путем выбора этих факторов, можно осуществить оптимальное планирование сложного многопланового эксперимента.

В работах [5, 7–9] предложен подход к оцениванию точности результатов и планирования параметрической идентификации, основанный на анализе особенностей матрицы Грама функций чувствительности, которая является аналогом Φ . При этом имеется возможность рассмотрения вопросов точности по каждому искомому параметру отдельно.

Кроме того, в работе [11] предложен для ОЗТ показатель точности – совместные доверительные интервалы (СДИ) оценок параметров, определяемый как проекции совместных доверительных областей (СДО) на оси многомерного пространства оцениваемых параметров. Показано, что СДИ являются доступными для практики показателями, особенно эффективными для случаев со значительным количеством искомых параметров.

Цель исследования и постановка задачи

До настоящего времени указанная методология, по нашему мнению, недостаточно используется при постановках и решениях обратных задач математического моделирования, что, возможно, связано с ограниченностью ее представления в технической литературе.

В связи с этим ставятся следующие задачи настоящего исследования:

1. Последовательно изложить методологию оценивания точности результатов и планирования эксперимента при математическом моделировании, использующую методы параметрической идентификации и совместные доверительные интервалы и области оценок искомых параметров;
2. Применить предлагаемую методологию при планировании и оценке точности мате-

матического моделирования в случае параметрической идентификации одномерного датчика плотности теплового потока.

Теоретическое обоснование методологии планирования

Предположим, что имеется адекватная математическая модель физического процесса в объекте исследования (далее – модель), позволяющая для моментов времени $\tau_k = k \cdot \Delta\tau$ ($k = 1, 2, \dots, n$) рассчитывать значения измеряемых физических величин t_{zk} в $z = 1, 2, \dots, l$ точках, составляющие $(l \times 1)$ -вектор $\mathbf{T}_k = [t_{zk}]_{z=1}^l$ состояния объекта.

Предположим, что в модели физического процесса можно выделить $(r \times 1)$ -вектор $\Theta = [\theta_j]_{j=1}^r$ искомых параметров. Его составляющие θ_j должны быть либо постоянными, либо допускать аппроксимацию на основе известных функций времени с постоянными неизвестными (искомыми) коэффициентами, т. е. с соблюдением условия $\Theta = \text{const}$. Процедура выделения Θ в модели процесса будем называть параметризацией ОЗ.

Примем, что в эксперименте измеряются параметры в $m \leq l$ точках объекта или их линейные комбинации, составляющие $(m \times 1)$ -вектор измерения $\mathbf{Y}_k = [y_{ik}]_{i=1}^m$, связь которого с вектором \mathbf{T}_k описывается моделью измерений

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{C} \mathbf{T}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{C} – $(l \times m)$ -матрица измерений, а $\boldsymbol{\varepsilon}_k = [\varepsilon_{ik}]_{i=1}^m$ – $(m \times 1)$ -вектор случайных погрешностей или шумов в измерениях.

Известно, что шум в измерениях является одним из факторов, способных вызывать неустойчивость решения ОЗ. Поэтому учет его влияния на этапах постановки и решений ОЗ обязателен. При этом будем использовать общепринятое для большинства измерений допущение, что составляющие ε_{ik} вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ в модели (1) являются нормально распределенными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями, одинаковой дисперсией σ^2 и некоррелированными между собой.

Это позволяет представить основную харак-

теристику случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ – его ковариационную $(m \times m)$ -матрицу \mathbf{R} – в виде

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (2)$$

где \mathbf{I} – единичная $(m \times m)$ -матрица.

Будем также полагать, что по модели теплопереноса в ТО можно рассчитывать прогнозы $\hat{\mathbf{Y}}_k(\Theta) = [y_{ik}(\Theta)]_{i=1}^m$ вектора измерений \mathbf{Y}_k в зависимости от вектора искомых параметров Θ при $\varepsilon=0$.

В таком случае параметрическая идентификация заключается в определении оптимальных оценок $\hat{\Theta}$ вектора Θ по n значениям вектора измерений \mathbf{Y}_k в модели (1) и модели теплопереноса в объекте. Для этих целей наиболее распространенным методом является минимизация по Θ следующей квадратичной функции невязки [1, 14]:

$$\Phi(\Theta) = \sum_{k=1}^n [\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\Theta)]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\Theta)]. \quad (3)$$

Таким образом, параметрическая идентификация теплопереноса может быть сведена к хорошо изученному в математической и технической литературе обобщенному методу наименьших квадратов (МНК). Его достоинством является то, что он не требует априорных знаний о статистических свойствах начальных оценок $\hat{\Theta}_0$, дает несмещенные оценки $\hat{\Theta}$ и обеспечивает минимальную дисперсию оценок в случае, если модель линейна, а шум измерений распределен по нормальному закону.

В [1] показано, что при минимизации функции невязки (3) не исключена возможность получения неустойчивых решений. Эта проблема является одной из основных в теории ОЗТ и выходит за пределы настоящего исследования. Поэтому будем предполагать, что с помощью минимизирующих процедур могут быть получены устойчивые оптимальные или близкие к ним оценки $\hat{\Theta}$, погрешности которых могут быть оценены в рамках теории МНК.

В случае, когда имеет место линейная зависимость $\hat{\mathbf{Y}}_k(\Theta)$ от вектора искомых параметров Θ , можно воспользоваться следующим

известным решением линейного МНК для оценок $\hat{\Theta}$ и ковариационной $(m \times m)$ -матрицы \mathbf{P} ошибок этих оценок [2]

$$\hat{\Theta} = \mathbf{P} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \Theta} \right)_{\hat{\Theta}}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}_k; \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1} = \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \Theta} \right)_{\hat{\Theta}}^T \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \Theta} \right)_{\hat{\Theta}} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Если ковариационная матрица шума \mathbf{R} удовлетворяет условию (2), то решение (4)–(5) преобразуется к виду

$$\hat{\Theta} = \mathbf{P} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k^T \mathbf{Y}_k, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{P} = \sigma^2 \mathbf{A}^{-1} = \sigma^2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right]^{-1}; \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_k = \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \Theta} \right]_{\hat{\Theta}}.$$

Здесь \mathbf{H}_k – $(m \times r)$ -матрица функций чувствительности $u_{ijk} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial \theta_j}$, составляющих y_{ik} вектора измерений к искомым параметрам θ_j ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, r; k=1, 2, \dots, n$), рассчитанная для значений $\hat{\Theta}$ в k -й момент времени; $\mathbf{A} = \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right]$ – $(r \times r)$ -матрица Грама функций чувствительности u_{irk} (она же – информационная матрица Фишера). Матрицу функций чувствительности \mathbf{H}_k можно записать в форме

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} u_{11k} & u_{12k} & \dots & u_{1rk} \\ u_{21k} & u_{22k} & \dots & u_{2rk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1k} & u_{m2k} & \dots & u_{mrk} \end{bmatrix}_{\hat{\Theta}}. \quad (8)$$

Тогда матрица Грама \mathbf{A} в соответствии с (6)–(8) может быть представлена в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{i1k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{i1k} u_{irk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{irk} u_{i1k} & \dots & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{irk}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В теории линейного МНК показано [13], что при принятых допущениях (2) о векторе шума $\mathbf{\varepsilon}_k$ оценки $\hat{\Theta}$ являются оптимальными, т. е. несмещенными, эффективными, достаточными и состоятельными.

Обратную матрицу Грама \mathbf{A}^{-1} используем в виде

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{r1}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}^* & \dots & a_{rr}^* \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Прямая \mathbf{A} и обратная \mathbf{A}^{-1} матрицы Грама являются основой для построения СДО и СДИ. Под СДО принято понимать [13] квадратичную форму

$$(\Theta_0 - \hat{\Theta})^T \mathbf{A} (\Theta_0 - \hat{\Theta}) = \sigma^2 \mathbf{V} \quad (11)$$

в пространстве искоемых параметров Θ , описывающую в окрестности полученных оценок $\hat{\Theta}$ r -мерный эллипсоид, который с доверительной вероятностью v содержит истинные значения Θ_0 вектора Θ .

В (11) $\mathbf{V} = r F_v(r, n-r)$, где $F_v(r, n-r)$ – табличные значения квантиля распределения Фишера для r параметров и n измерений на участке оценивания.

В случае двух оцениваемых параметров ($r=2$), обозначив

$$\Theta_0 - \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\theta}_1 \\ \Delta \hat{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

где $\Delta \hat{\theta}_1 = \theta_{1,0} - \hat{\theta}_1$ и $\Delta \hat{\theta}_2 = \theta_{2,0} - \hat{\theta}_2$, получим из (11) следующее уравнение, которое опи-

сывает эллипс СДО в пространстве погрешностей $\Delta\hat{\theta}_1$ и $\Delta\hat{\theta}_2$ с центром в точке $\Delta\hat{\theta}_1 = \Delta\hat{\theta}_2 = 0$:

$$a_{11}(\Delta\hat{\theta}_1)^2 + 2a_{12}\Delta\hat{\theta}_1\Delta\hat{\theta}_2 + a_{22}(\Delta\hat{\theta}_2)^2 = B\sigma^2. \quad (12)$$

Решая последнее уравнение [14], можно построить эллиптические СДО для случая 2-х искомых параметров (рис. 1).

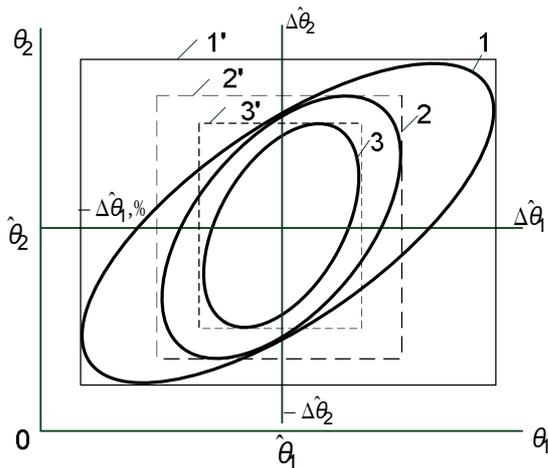


Рис. 1. Эллиптические СДО (1-3) и описанные вокруг них прямоугольные области (1'-3') оценок, образованные двумя парами граничных значений СДИ для трех вариантов решения ОЗТ различной точности

В случае одного ($r=1$) оцениваемого параметра СДО вырождается до отрезка прямой линии, ограниченного значениями $\pm\Delta\hat{\theta}_1$. Последние определяются из уравнения

$$(\Delta\hat{\theta}_1)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ik}^2 = \sigma^2 F_v(1, n-1),$$

которое следует из (11) с учетом (9).

В случае трех и более оцениваемых параметров ($r \geq 3$) для исследования свойств СДО, имеющих форму многомерного эллипсоида, необходимо прибегнуть к достаточно сложному каноническому анализу квадратичной формы (12).

В случае одного ($r=1$) оцениваемого параметра СДО вырождается до отрезка прямой линии, ограниченного значениями $\pm\Delta\hat{\theta}_1$. Последние определяются из уравнения

$$(\Delta\hat{\theta}_1)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ik}^2 = \sigma^2 F_v(1, n-1),$$

которое следует из (11) с учетом (9).

В случае трех и более оцениваемых параметров ($r \geq 3$) для исследования свойств СДО, имеющих форму многомерного эллипсоида, необходимо прибегнуть к достаточно сложному каноническому анализу квадратичной формы (12).

Так как оцениваемые параметры θ_j могут быть разнородными и существенно разновеликими физическими величинами, то для удобного представления СДО желательно использовать относительные значения параметров $\bar{\theta} = \frac{\theta_j}{\hat{\theta}_j}$ и погрешностей $\delta\bar{\theta}_j = \frac{\Delta\theta_j}{\hat{\theta}_j}$ (за исключением случаев $\hat{\theta}_j \rightarrow 0$).

Для случаев ($r > 2$) использование СДО в форме (11) сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Поэтому в [12, 14] в качестве показателя погрешности решений ОЗТ были для каждого j -го искомого параметра θ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) введены СДИ - проекции СДО на соответствующие j -е координатные оси r -мерного пространства θ_j , что эквивалентно замене эллиптической СДО (11) на описанный вокруг нее параллелепипед.

Для наглядности остановимся на рассмотренном выше случае двух искомых параметров ($r=2$), для которого на рис. 1 показано взаимное расположение СДО и СДИ оценок. Из рисунка следует, что СДИ сравнительно с СДО является приближенным и более консервативным показателем погрешности решения ОЗТ – с большей площадью (в случае $r > 2$ – объемом) рассеивания оценок.

При этом для построения прямоугольной области СДИ, например, 1', описанной вокруг эллипса 1, использовались две пары вертикальных и горизонтальных СДИ с граничными значениями $\pm\Delta\theta_1^*$ и $\pm\Delta\theta_2^*$ соответственно, для которых в [14] получены аналитические выражения:

$$\Delta\theta_1^* = \pm\sigma \sqrt{\frac{a_{22}B}{\det A}} \quad (13)$$

и

$$\Delta\theta_2^* = \pm\sigma\sqrt{\frac{a_{11}B}{\det A}}, \quad (14)$$

где $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Как указано выше, полученные результаты целесообразно представлять в виде относительных границ СДИ, а именно

$$\delta\theta_j^* = \pm\frac{\Delta\theta_j^*}{\hat{\theta}_j}, \quad (j = 1, 2). \quad (15)$$

В [12] предлагается несколько способов определения граничных значений $\Delta\theta_j^*$ СДИ для оценок искомых параметров θ_j ($j = 1, 2, \dots, r$). Из них, по нашему опыту, следует рекомендовать для ОЗТ следующую зависимость, использующую диагональные элементы a_{jj}^* обратной матрицы Грама (8):

$$\Delta\theta_j^* = \pm\sigma\sqrt{a_{jj}^*B} = \pm\sigma\sqrt{a_{jj}^*rF_v(r, n-r)}, \quad (16)$$

Заметим, что формулы (13) и (14) на основе известных соотношений $a_{11}/\det A = a_{22}^*$ и $a_{22}/\det A = a_{11}^*$ между элементами прямой и обратной матриц Грама приводятся к виду (16).

Зависимость (16) также целесообразно использовать применительно к относительным границам СДИ, а именно:

$$\delta\theta_j^* = \pm\frac{\Delta\theta_j^*}{\hat{\theta}_j} = \pm\frac{\sigma}{\hat{\theta}_j}\sqrt{a_{jj}^* \cdot rF_v(r, n-r)}. \quad (17)$$

Так как СДО и СДИ зависят от всех значимых факторов процесса параметрической идентификации, то приведенная методология может быть преобразована для априорных исследований влияния этих факторов, т. е. для оптимального планирования параметрической идентификации при математическом моделировании.

Основными значимыми факторами являются [4–7]:

- структура (состав) вектора искомых параметров Θ ;
- структура вектора измерений Y : расположение и количество m измеряемых темпера-

тур TO ;

– количество моментов времени n регистрации Y_k ($k = 1, 2, \dots, n$);

– уровень шума в измерениях, в частности, его дисперсию σ^2 и другие.

В качестве целевой функции планирования предлагается использовать СДО и (или) СДИ априорных оценок, зависящие от рассматриваемых планов – наборов значимых факторов и их количественных показателей.

Практическое применение методологии планирования

Продемонстрируем применение предложенной методологии оптимального планирования и оценивания точности при математическом моделировании на примере параметрической идентификации датчика теплового потока.

Датчики плотности теплового потока размещаются внутри объекта и представляют собой теплоизолированный с трех сторон стержень ограниченной длины H (рис. 2).

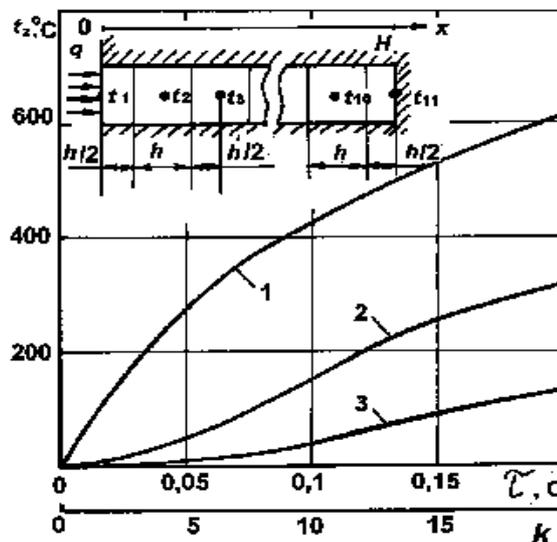


Рис. 2. Тепловая схема дифференциально-разностной модели одномерного датчика теплового потока и ход температур его блоков для значений $q = 1 \times 10^7$ Вт/м²: 1 – t_1 ; 2 – t_3 ; 3 – t_5 .

Через рабочий торец ($x=0$) в датчик входит тепловой поток q , тыльный торец ($x=H$) полагаем теплоизолированным. Температуры по длине датчика измеряются и служат основанием определения (восстановления) значений плотности входящих в датчик тепловых потоков.

В качестве математической модели датчика (его температурного состояния) будем использовать дифференциально-разностную модель (ДРМ), тепловая схема которой также приведена на рис. 2. В такой модели температура каждого из блоков описывается отдельным дифференциальным уравнением, т. е. модель датчика – система уравнений. Объем настоящей публикации не позволяет полностью привести эту систему, но в качестве иллюстрации приведем уравнение для первого блока (точка измерения на поверхности):

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} = \frac{2q(\tau)}{c\rho_1} - 2b_{1,2}t_1 + 2b_{1,2}t_2,$$

где t_1 – температура 1-го блока; $q(\tau)$ – величина теплового потока, действующего на датчик; $b_{1,2} = a/\Delta^2$; a – температуропроводность 1-го блока; Δ – расстояние между точками, в которых определяется температуры блоков; t_2 – температура 2-го блока.

Температуры всех блоков в k -е моменты времени составляют $(l \times 1)$ -вектор температурного состояния датчика:

$$\mathbf{T}_k = [t_{1k} \quad t_{2k} \quad \dots \quad t_{lk}]^T.$$

Часть его составляющих (m) измеряется в эксперименте, образуя в соответствии с (1) $(m \times 1)$ -вектор измерений \mathbf{Y}_k . Прогноз $\hat{\mathbf{Y}}_k(\Theta)$ вектора \mathbf{Y}_k рассчитывается по ДРМ датчика теплового потока в функции от искомого параметра Θ (при $\varepsilon=0$).

Постановке обратной задачи предшествует ее параметризация – выделение в модели теплопереноса датчика $(r \times 1)$ -вектора искомого параметра $\Theta = \text{const}$. Будем рассматривать две разновидности ОЗ, а именно:

1. В случае $q = \text{const}$ (ОЗ-1) параметризация осуществляется естественным образом в виде $\Theta_1 = [q] = \text{const}$.

2. В более общем случае $q = q(\tau)$ (ОЗ-2) для параметризации воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией функции $q(\tau)$ на последовательных участках аппроксимации равной продолжительности $\Delta = n\Delta\tau$, которые содержат по n дискретных (с шагом $\Delta\tau$) значений вектора измерений $\tilde{\mathbf{Y}}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). На каждом участке текущие значения тепло-

вого потока q_k ($k = 1, 2, \dots, n$), изменяющегося по линейному закону, можно представить следующей функцией левого q_l и правого q_{np} его значений на границах участка Δ :

$$q_k = q_l + k \frac{q_{np} - q_l}{n}. \quad (18)$$

Таким образом, в этом случае (2×1) -вектор искомого параметра на первом и всех последующих участках имеет вид

$$\Theta_2 = [q_l \quad q_{np}]^T = \text{const}.$$

Кроме рассмотренных двух граничных ОЗ может возникнуть задача определения или уточнения теплофизических характеристик (ТФХ) материала, в частности теплопроводности λ . Это приводит к целесообразности постановки еще двух параметризованных ОЗ с векторами искомого параметра

$$\Theta_3 = [q \quad \lambda]^T$$

и

$$\Theta_4 = [q_l \quad q_{np} \quad \lambda]^T.$$

Таким образом, планированию будут подлежать четыре ОЗ, представляемые приведенными выше векторами искомого параметра $\Theta_1 - \Theta_4$.

Для планирования были приняты следующие исходные данные:

1. Характеристики датчика теплового потока: длина $H = 4 \cdot 10^{-3}$ м, материал – жаропрочный сплав со следующими ТФХ: плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; теплопроводность $\lambda = 20$ Вт/м·град; удельная теплоемкость $C = 0,43$ кДж/кгК; температуропроводность $a = 5,9 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Начальное условие $T_0 = 273$ К.
2. В качестве модели температурного состояния датчика используется ДРМ, описанная выше и состоящая из $l = 11$ блоков. На рис. 2 приведен полученный с помощью ДРМ ход температур t_1 , t_3 и t_5 блоков 1, 3 и 5 для случая $q_0 = q_{л0} = 1 \cdot 10^7$ Вт/м². Шаг $\Delta\tau$ дискретизации времени составляет 0,01 с.
3. Заданные (“истинные”) значения оцениваемых параметров, входящих в состав векторов $\Theta_1 - \Theta_4$, составляют: $q_0 = q_{л0} = 1 \cdot 10^7$ Вт/м²; $q_{np0} = 1,8 \cdot 10^7$ Вт/м² и $\lambda_0 = 20$ Вт/м·град.

При планировании учитывались следующие условия:

1. В качестве значимых факторов или факторов планирования рассматриваются следующие:

а) структура (состав) вектора измерений Y_k , в частности, планы с одиночными измерениями температур t_1 , t_3 или t_5 , а также планы с одновременными измерениями двух температур внутренних блоков t_3 и t_5 (для ОЗ-3).

б) величина дисперсии σ^2 шума в измерениях, характеризующая особенности регистрации измеряемых температур.

в) количество n (5, 10 или 20) значений вектора измерений Y_k ($k=1, 2, \dots, n$), используемых для получения решений на каждом участке Δ , так как для ОЗ-1 и ОЗ-2 выбор n является принципиально важным, определяя быстрдействие динамического метода измерения теплового потока $q=\text{const}$. Для ОЗ-3 и ОЗ-4 выбор n также является весьма важным, определяя оптимальную величину $\Delta = n\Delta\tau$ участков кусочно-линейной аппроксимации функции $q(\tau)$: с одной стороны, увеличение n способствует успешному решению ОЗ, с другой – приводит к ухудшению качества аппроксимации функции $q(\tau)$.

г) к факторам планирования целесообразно отнести также состав вектора $\hat{\Theta}$ искомым параметров.

2. В качестве показателя точности оценок для рассматриваемых планов используются априорные относительные границы СДИ (17). Их величины сравниваются с допустимыми разбросами искомым параметров.

3. Планирование для ОЗ-3 и ОЗ-4 выполняется для первого участка Δ , предполагая возможность переноса его результатов на последующие участки.

Были выполнены следующие этапы планирования:

Численным дифференцированием с использованием ДРМ датчика теплового потока были рассчитаны функции чувствительности u_{zjk} z -х измеряемых температур ($z = 1, 3$ или 5) к j -м искомым параметрам ($j = 1, 2, \dots, r$) в k -е моменты времени ($k = 1, 2, \dots, n$) для приведенных выше «истинных» значений искомым параметров. При этом для каждой u_{zjk} предварительно выбирались величины приращения $\Delta\theta_j$, которые, как правило, не превышали $\pm 0,05\theta_{j0}$.

Для ОЗ-3 и ОЗ-4 в ДРМ подставлялись текущие значения теплового потока q_k , определяемые по формуле (18). На рис. 3 приведе-

ны функции чувствительности температур t_1 , t_3 и t_5 к изменению параметра λ в k -е моменты времени.

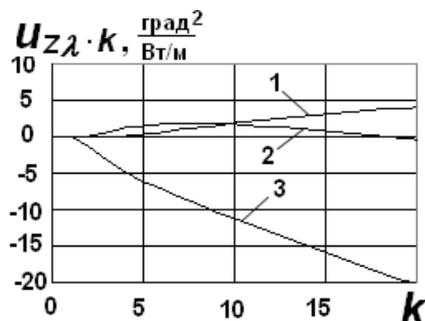


Рис. 3. Функции чувствительности измеряемых температур (1 – t_1 ; 2 – t_3 ; 3 – t_5) к искомому параметру λ

Для каждой из четырех ОЗ по полученным значениям функций чувствительности для $n = 5, 10$ и 20 по формуле (2) было рассчитано по девять прямых матриц Грама A и затем по девять обратных матриц A^{-1} для каждого из девяти вариантов (планов) – по три варианта n для трех параметров q_0 , $q_{л0}$, $q_{пр0}$ и λ_0 .

Относительные СДИ $\delta\theta_j^*$ оценок определялись по формулам (8, 9, 11) для дисперсии $\sigma^2=1$. При необходимости они могут быть пересчитаны на любые другие значения σ^2 . Ограниченный объем настоящей публикации не позволяет привести полные результаты планирования параметрической идентификации при решениях рассматриваемых ОЗ. Ознакомиться с ними можно в [14] или связавшись с авторами.

На рис. 4 для некоторых планов эксперимента приведены СДИ, образованные двумя парами значений их относительных границ, а для одного из планов приведена относительная эллиптическая СДО.

Очевидно, что измерения температур только в 5-й точке приводят к недопустимым уровням погрешностей при 10 измерениях, а низкий уровень погрешностей при одновременном измерении в 3-й и 5-й точках.

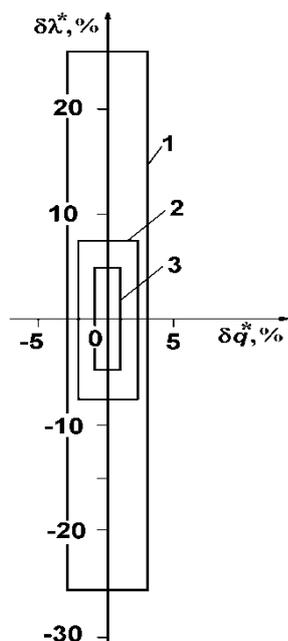


Рис. 4. Примеры относительных СДИ (ОЗТ–3): 1 – измеряется t_5 , $n=10$; 2 – измеряется t_3 , $n=10$; 3 – измеряется t_3 и t_5 , $n=10$

Выводы

По результатам планирования можно сформулировать следующие основные выводы.

1. Изложена методология планирования и оценивания погрешностей параметрической идентификации при математическом моделировании физических процессов на основе таких метрологических показателей точности, как СДО и (или) СДИ.
2. В формулах (18) и (19) для СДИ можно выделить две мультипликативные составляющие погрешности. Одна из них – $\sqrt{a_{jj}^*}$ – пропорциональна соответствующим диагональным элементам обратной матрицы Грама и связана со степенью устойчивости решений обратных задач.

Вторая составляющая – $\frac{\sigma}{\hat{\theta}_j}$ – определяется уровнем шума в измерениях σ .

Кроме этих составляющих общей погрешности, еще одна – $rF_v(r, n-r)$ – зависит от количества искомых параметров z и измерений n , используемых при решениях ОЗТ, а также от уровня достоверности v .

3. В общем случае без ограничений по числу r оцениваемых параметров нами при планировании рекомендуется использовать СДИ, получаемые на основе обратных матриц Грама.

4. Необходимо отметить, что состав вектора искомых параметров Θ фактически является одним из наиболее значимых факторов планирования процессов параметрической идентификации теплопереноса.

5. В качестве иллюстрации в рамках постановки задач четырех практических и актуальных ОЗ выполнено планирование параметрической идентификации процесса теплопереноса в датчике тепловых потоков.

6. При идентификации постоянного теплового потока $q=\text{const}$ (ОЗ–1 и ОЗ–3) для повышения быстродействия измерений, т.е. минимума, желательно измерять температуру t_1 . Заглубление точки измерения (например, измерение t_3) приводит к существенному увеличению $\delta\theta_j^*$, особенно при одновременной идентификации λ (ОЗ–3).

Литература

1. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем: учеб. пособие / [О. М. Алифанов, П. Н. Вабищевич, В. В. Михайлов и др.]. – М.: Логос, 2001. – 400 с.
2. Симбирский Д. Ф. Оптимальные оценки в тепловых измерениях / Д. Ф. Симбирский // Инж.-физ. журн. – М. – 1975. – Т. 28, №2. – С. 240–248.
3. Симбирский Д. Ф. Идентификация нестационарного нелинейного теплового объекта с применением фильтра Калмана / Д. Ф. Симбирский, С. В. Гольцов // Автометрия. – М. - 1975. – № 1. – С. 36–42.
4. Симбирский Д. Ф. Измерение тепловых потоков одномерными термоприемниками с применением фильтра Калмана и сплайн-аппроксимации / Д. Ф. Симбирский, Е. Н. Бут // Экспериментальные методы термостойкости газотурбинных двигателей: сб. науч. тр. ХАИ. – Вып. 2. – Х.:ХАИ. - 1975. – С. 33–43.
5. Симбирский Д. Ф. Температурная диагностика двигателей (пленочная термометрия и оптимальные оценки) / Д. Ф. Симбирский. – К.: Техника, 1976. – 208 с.
6. Мацевитый Ю. М. Параметрическая и фу-

- нкциональная идентификация тепловых процессов / Ю. М. Мацевитый, Н. В. Гайшун, В. Т. Борухов, А. О. Костиков // Проблемы машиностроения. – Х.:ИПМаш НАНУ. – 2011. – Т. 14, №3. – С. 40–47.
7. Симбирский Д. Ф. Метрология косвенных измерений / Д. Ф. Симбирский // Измерит. техника. – 1983. – № 1. – С. 12–14.
 8. Симбирский Д. Ф. Оптимальный синтез измерительных систем, использующих алгоритмы обратных задач / Д. Ф. Симбирский, А. В. Олейник, С. В. Епифанов // Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии.: Тез. докл. 5-го всесоюз. симп. – Новосибирск, 1989. – С. 136–137.
 9. Симбирский Д. Ф. Оптимальное планирование экспериментально-расчетного определения теплопроводности твердых тел / Д. Ф. Симбирский, А.Б.Гулей // Инж.-физ. журн. – 1980. – Т. 46, №5. – С. 733–737.
 10. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
 11. Епифанов С. В. Оптимальный выбор измеряемых параметров при идентификации ГТД / С. В. Епифанов, Д. Ф. Симбирский, С. А. Каплун // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 4. – С. 39–43; 1990. – № 1. – С. 57–62; 1990. – № 2. – С. 72–78.
 12. Симбирский Г.Д. Метод измерения высоких температур газовых потоков адаптивным редуцированным проточным термопреобразователем: Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук.: 05.14.05 / Симбирский Г.Д. – ЛИТМО. – СПб., 1992. – 16с.
 13. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
 14. Симбирский Г.Д. Точность и планирование параметрической идентификации теплопереноса в технических объектах / Д.Ф. Симбирский, С.В. Епифанов, Г.Д. Симбирский // Проблемы машиностроения. – Х.: ИПМаш НАНУ. – 2012.– Т. 15, № 3. – С. 25 – 34.
- Рецензент: О. Я. Никонов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.
- Статья поступила в редакцию 02.11.2015