УДК 517.91

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

В.І. Вербицький, к.ф.-м.н., доцент, ХНАДУ

Анотація. *Розглянуто умови стійкості нелінійних систем та диференціальних включень, що використовують функції Ляпунова у вигляді норм. Дано застосування до аналізу стійкості систем керування.*

Ключові слова: *функція Ляпунова, логарифмічна норма, спільна дисипативність, глобальна стійкість, експоненційна конвергенція.*

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Вербицкий, к. ф.-м.н., доцент, ХНАДУ

Аннотация. *Рассмотрены условия устойчивости нелинейных систем и дифференциальных включений, использующие функции Ляпунова в виде норм. Даны приложения к анализу устойчивости систем управления.*

Ключевые слова: *функция Ляпунова, логарифмическая норма, совместная диссипативность, глобальная устойчивость экспоненциальная конвергенция.*

STABILITY ANALYSIS FOR LINEAR AND NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

V.I. Verbitsky, assistant professor, cand. phys. and math. sc., KhNAHU

Abstract. *Some stability conditions for linear and nonlinear systems, using Lyapunov functions in the form of norms, are considered. The applications to stability analysis for control systems are made.*

Key words: *Lyapunov function, logarithmic norm, simultaneous dissipativity, global stability, exponential convergence.*

Вступ

При аналізі систем керування провідну роль грають питання стійкості, зокрема дуже важливими є питання нелокальної стійкості систем («в великому» та в цілому). Розглядаються різні умови стійкості для систем звичайних диференціальних рівнянь та для диференціальних включень. Їх отримано єдиним шляхом, а саме: будується узагальнена функція Ляпунова у вигляді норми.

Аналіз літератури

В [1,2] отримано деякі умови стійкості систем на основі ляпуновських норм. В представленій роботі ці умови узагальнюються та застосовуються для аналізу систем керування.

Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$dx / dt = Ax, \tag{1}$$

яка є лінійною автономною. Її стійкість (асимптотична стійкість) пов’язана з стійкістю матриці A. Відомо, що якщо матриця A стійка, то існують така додатно визначена матриця H

$$\|\exp(tA)\| \leq \exp(-\varepsilon t) \qquad (2)$$

для будь-якого $t \geq 0$,

де $\|x\| = (Hx; x)^{1/2}$ - норма, асоційована з скалярним добутком, пов'язаним з матрицею H .

Якщо для деякої норми виконана умова (2), то матриця A зветься рівномірно дисипативною відносно цієї норми. Відповідна норма будь-якого розв'язку системи (1) експоненціально спадає.

Відмітимо, що умова (2) рівносильна умові

$$\gamma(A) \leq -\varepsilon < 0,$$

де $\gamma(A) = \lim_{h \to +0} (\|E + hA) - 1) / h$, E – одинична матриця, $\gamma(A)$ – так звана логарифмічна норма Далквіста-Лозинського.

Розглянемо диференціальне включення

$$dx / dt \in Fx, \qquad (3)$$

де F – сімейство матриць порядку n.

Аналіз умов стійкості багатовимірних систем

Теорема 1. Початок координат є експоненційно стійким для включення (3), в тому та тільки в тому випадку, коли існує така норма в R^n, відносно якої

$$\sup_{A \in F} \gamma(A) < 0.$$

Якщо виконується остання умова, то сімейство матриць зветься рівномірно спільно дисипативною.

Таким чином, для експоненціальної стійкості включення (3) необхідно і достатньо, щоб сімейство F було рівномірно спільно дисипативним. В цьому випадку відповідна норма будь-якого розв'язку (3) експоненціально спадає.

Існують різноманітні прості алгебраїчні достатні умови спільної дисипативності. Само, для деяких класів норм існують явні вирази для логарифмічної норми, які описуються лінійними нерівностями. Наприклад, матриця A є рівномірно дисипативною відносно норми

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} (|x_i| / \alpha_i),$$

де $\alpha_i > 0$ – константи, якщо виконано умови

$$\alpha_k a_{kk} + \sum_{j \neq k} \alpha_j |a_{kj}| < 0,$$
$$(k, j = 1, ..., n),$$

де a_{kj} – елементи матриці A.

За допомогою критерія Севастьянова–Котелянського можна отримати достатні умови рівномірної спільної дисипативності сімейства F . Само, складемо матрицю B, для якої

$$b_{kk} = \sup_{A \in F} a_{kk};$$
$$b_{kj} = \sup_{A \in F} |a_{kj}|; \qquad (k \neq j).$$

Якщо всі головні минори матриці В парного порядку додатні, а всі головні минори непарного порядку від'ємні, то F рівномірно спільно дисипативне. Вище згаданий критерій є аналогом критерія Сільвестра для матриць з невід'ємними позадіагональними елементами.

Будемо звати систему диференціальних рівнянь

$$dx / dt = f(t, x) \qquad (4)$$

експоненціально стискуючою на множині $S \times D$, де S – це R^1 або промінь $[t_0; +\infty)$, D – позитивно інваріантна множина системи (4), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожної пари розв'язків $x_1(t), x_2(t)$ з початковими умовами в $S \times D$ виконано.

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \exp(-\varepsilon(t - S)) \cdot \|x_1(S) - x_2(S)\|,$$

для будь-яких $t \geq S$.

Теорема 2. Система (4) є експоненціально стискуючою відносно деякої норми на $S \times B$, якщо сімейство матриць Якобі $f'_x(t, x)(t \in S; x \in B)$ є рівномірно спільно дисипативним.

Для автономних систем отримано результат.

Теорема 3. Нехай автономна система

$$dx/dt = f(x) \quad (5)$$

задана на області D, x_0 – стаціонарна точка системи (5). Якщо сімейство $f'(x)(x \neq x_0)$ рівномірно спільно дисипативне, то x_0 є асимптотично стійкою. Якщо $D = R^n$, то x_0 є глобально асиптотично стійкою.

Функція $\| x - x_0 \|$ в обох теоремах розглядається як узагальнена (недиференційовна) функція Ляпунова.

Система (4) зветься експоненціально конвергентною, якщо вона має єдиний розв'язок, обмежений на дійсній осі, та цей розв'язок є глобально експоненціально стійким.

Теорема 4. Якщо для гладкої системи (4) існує таке $x_0 \in R^n$, що $f(t, x_0)$ обмежена на всій осі, та сімейство $f'_x(t, x)$ є рівномірно спільно дисипативним $(t \in R^1, x \in R^n)$, то система є експоненціально конвергентною.

Цей результат може бути застосованим до аналізу конвергентності систем прямого автоматичного керування є однією скалярною нелінійністю та збурюючими силами.

Розглянемо систему форми

$$\begin{aligned} &dx/dt = Bx + hf(\sigma) + p(t), \\ &\sigma = c * x, \end{aligned} \quad (6)$$

де B – стійка матриця порядку n, вектор-функція $p(t)$ обмежена та неперервна на осі, c, h – вектори-константи, $f(\sigma)$ – неспадаюча диференційна скалярна функція.

Будемо звати матрицю D належною до складу $D(h,c)$, якщо її перший стовпчик співпадає з вектором h, а інші стовпчики є ортогональними до вектора с.

Теорема 5. Нехай система (6) задовольняє сформульованим вище умовам, де $c * h < 0$. Якщо існують така матриця $T \in D(h,c)$ та такі додатні числа

$$\alpha_k a_{kk} + \sum_{j \neq k} \alpha_j \left| a_{kj} \right| < 0,$$
$$(k = 1, \ldots, n),$$

то система (6) є експоненціально конвергентною. Якщо функція $p(t)$ є ω-періодичною, то відповідний обмежений розв'язок також є ω-періодичним.

Відмітимо, що для асимптотичної стійкості стаціонарної точки автономної системи достатньо, щоб функція $\| x - x_0 \|$ спадала відносно системи я деякому околі точки x_0. Ця умова значно слабша за умову стисковності системи. Користуючись цією умовою, узагальнимо теорему 3.

Будемо використовувати позначення

$$N(x, y) = \lim_{h \to +0} (\| x + hy \| - \| x \|) / h,$$

де x, y – n-вимірні вектори, $\| \ \|$ – норма.

Теорема 6. Нехай система (5) задана в області $D \in R^n$ та розв'язок задачі Коші для (5) існує для будь-яких початкових умов з D. Нехай також x_0 – стаціонарна точка (5) в D та існує така норма $\| \ \|$ в R^n, що нерівність

$$N(x - x_0, f(x)) < 0$$

виконується для будь-якого x з деякого проколотого околу U точки x_0. Тоді x_0 є асимптотично стійкою. Якщо $U = R^n$, то x_0 є глобально асимптотично стійкою.

У цьому випадку відповідна норма є узагальненою функцією Ляпунова.

Наведемо ще один результат, що стосується стійкості за першим наближенням.

Розглянемо неперервне відображення $f : R^n \to R^n$, яке є позитивно однорідним ступеня $m > 0$, тобто

$$f(\alpha x) = \alpha^m f(x),$$

де $\alpha \geq 0, x \in R^n$.

Теорема 7. Нехай $f : R^n \to R^n$, є неперервним позитивно однорідним відображенням ступеня $m > 0$, $N(x, f(x)) < 0$ для будь-якого $x \neq 0$.
Нехай також U – окіл початку координат, а неперервне відображення $g: R^1 \times U \to R^n$ задовольняє нерівності

$$\|g(t,x)\| \leq M \|x\|^m$$

для будь-яких $t \in R^1, x \in U$,

де $M < M_0 = -\sup\limits_{\|x\|=1} N(x, f(x))$.

Тоді розв'язок $x = 0$ системи

$$dx / dt = f(t) + g(t,x)$$

є рівномірно асимптотично стійким.

Будь-яка куля норми $\| \ \|$, яка міститься в U, входить до області притягування розв'язку $x = 0$.

Якщо $m > 1$, то

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|^{1-m} + (m-1)(M_0 - M)(t - t_0)^{1/(1-m)}.$$

Якщо $m = 1$, то будь-який розв'язок $x(t)$ досягає початку координат за скінчений час, який не перевищує
$((1-m)(M_0 - M))^{-1} \cdot \|x(t_0)\|^{1-m}$. Якщо $U = R^n$, то нульовий розв'язок є глобально рівномірно асимптоматично стійким.

Відмітимо, що, як правило, норми в приведених вище теоремах не є євклідовими, тому відповідні функції Ляпунова не є квадратичними і, більше того, можуть не бути диференційованими.

Висновки

Таким чином, в роботі розглянуто низку умов, що забезпечують локальну та глобальну стійкість багатовимірних систем. Ці умови достатньо зручні та конструктивно перевіряються.

Проблема спільної дисипативності навіть для двох матриць другого порядку досить складна. Навіть в цьому випадку немає детальних необхідних умов. Задача отримання необхідних і достатніх умов досі є відкритою. Відмітимо також, що необхідні умови спільної дисипативності матриць, ранг яких більше 1, мають принципово неалгебраїчний характер.

Література

1. V.I. Verbitskii, A.N. Gorban Simultaneos dissipative operators and quasi-thermodinamicity of. the cheiaical reaction systems //Advance in Modeling and Simulation. – 1991. – Vol. 26,№1. – P. 13-21.
2. V.I. Verbitsky. On one approach to the analysis of stability of nonlinear systems and differential inclusions //Mathematical modeling in science and technology. – Kharkiv, 2014. – ,No 1. – P.16-22.

Рецензент: В.М. Колодяжний, д.ф.-м.н., професор, ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 23 червня 2016 р.