

УДК 621.318.4

РАСЧЕТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВИТКОМ С ДВУМЯ РАЗРЕЗАМИ В ТОНКОСТЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛИСТАХ

Ю. В. Батыгин, проф., д.т.н., Е. А. Чаплыгин, доц. к.т.н.,
Т. В. Гаврилова, доц. к.ф-м.н., С. А. Шиндерук асс. ХНАДУ

Аннотация. Решена трёхмерная электродинамическая задача о возбуждении индукторной системы для магнитно-импульсной обработки массивных проводников полем прямоугольного витка с двумя продольными разрезами, находящимся между двумя металлическими листами в низкочастотном поле. Полученные выражения для вихревых токов позволяют проводить расчёт и анализ пространственно-временного распределения сил магнитного давления с учётом неоднородности возбуждающего поля.

Ключевые слова: магнитно-импульсная обработка металлов, низкочастотное поле, одновитковый индуктор, массивный проводник, вихревые токи.

РОЗРАХУНОК ВИХРОВИХ СТРУМІВ ПОРУШУВАНИХ ПРЯМОКУТНИМ ВИТКОМ З ДВОМА РОЗРІЗАМИ У ТОНКОСТІННИХ МЕТАЛЕВИХ ЛИСТАХ

Ю. В. Батигін, проф., д.т.н., Є. О. Чаплигін, доц. к.т.н.,
Т. В. Гаврилова, доц. к.ф-м.н., С. О. Шиндерук, ас. ХНАДУ

Анотація. Розв'язана тривимірна електродинамічна задача про порушення індукторної системи для магнітно-імпульсної обробки масивних провідників полем прямокутного витка з двома поздовжніми розрізами, що знаходяться між двома металевими листами в низькочастотному полі. Отримані вирази для вихрових струмів дозволяють проводити розрахунок і аналіз просторово-часового розподілу сил магнітного тиску з урахуванням неоднорідності поля, що збуджує.

Ключові слова: магнітно-імпульсна обробка металів, низькочастотне поле, одновитковий індуктор, масивний провідник, вихрові струми.

CALCULATION OF THE EDDY CURRENTS EXCITED WITH A RECTANGULAR COIL WITH TWO SECTION IN THE THIN-WALLED METAL SHEETS

Yu.V. Batygin, professor, dr. eng. sc., E.A. Chaplygin, assistant professor, cand. eng. sc.,
T. V. Gavrilova, assistant professor, cand. phys. and math. sc.,
S.A. Shinderuk, assistant lecturer KhNAHU

Abstract. Three-dimensional electrodynamics problem about exciting of the inductor system for magnetic-pulse treatment of the massive conductors with field of a rectangular coil with two longitudinal section interfacing two metal sheets in a low-frequency field has been solved. Finding expressions for the eddy currents allows doing the calculation and analysis of the space-time distribution of the forces of the magnetic pressure with a glance into irregularity of the exciting field.

Key words: magnetic-pulse treatment of metals, low frequency field, single-turn inductor, solid conductor, eddy currents.

Введение

Магнитно-импульсная обработка металлов (МИОМ) перспективная развивающаяся тех-

нология, одно из применений которой – удаление вмятин с кузовных панелей транспортных средств. Инструменты, применяющиеся в технологических операциях, различаются

по конструкции и принципу действия [1].

Для практического воплощения эффективных инструментов магнитно-импульсных технологий требуется предварительный анализ их действенности основанный на представлении о характере происходящих электродинамических процессов [2, 3].

Анализ публикаций

Плоские одновитковые соленоиды являются одним из инструментов МИОМ. Электродинамические расчеты, для замкнутых круговых контуров расположенных над поверхностью или между проводящих объектов показывают относительно низкую эффективность таких инструментов, что связано с уменьшением силового воздействия в центральной части инструмента [4, 5].

Весьма перспективным инструментом для магнитно-импульсных технологий по притяжению заданных участков листовых заготовок является прямоугольный виток из двух ветвей между симметричными тонкостенными металлическими листами [6].

Цель и постановка задачи

Цель настоящего рассмотрения – расчёт пространственного распределения вихревых токов в низкочастотном режиме индукционной индукторной системы с двумя идентичными плоскими металлами, один из которых есть вспомогательный экран, второй – объект обработки, и прямоугольным витком из двух ветвей при интенсивной диффузии действующих полей.

Расчётные соотношения

Для проведения расчетов примем расчётную модель, с некоторыми допущениями приведенную на Рис. 1.

Допущения:

- Бесконечно протяжённые в поперечных направлениях листы толщиной – d выполнены из немагнитного металла с удельной электропроводностью – γ .
- Виток индуктора одинаковой ширины D расположен между листами на одинаковом расстоянии – h , а толщина витка настолько мала, что поперечное распределение тока в нём можно описать дельта-функцией Дирака

- $\delta(z - h)$.

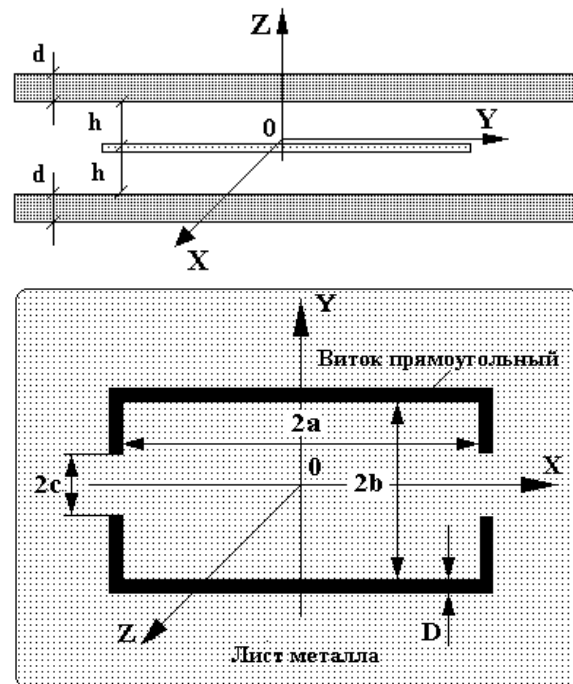


Рис. 1. Расчётная модель – прямоугольный виток индуктора из двух отдельных ветвей между тонкими металлическими листами

- Ветви витка изолированы друг от друга электрически.

- По ветвям витка, расположенным согласно привязке к выбранной системе координат в плоскости XOY , протекают токи с плотностью: а) $j_1(t, x, y, z)$, верхняя полуплоскость ($y > 0$), б) $j_2(t, x, y, z)$, нижняя полуплоскость ($y < 0$):

а) $y > 0$,

$$j_1(t, x, y, z) = j_1 \cdot j(t) \cdot \delta(z - h) \cdot f_1(x, y), \quad (1)$$

где j_1 – величина, определяющая амплитуду и направление плотности тока в ветви индуктора («+» или «-»), $j(t)$ – временная зависимость, t – время,

$$f_1(x, y) = \vec{i} \cdot f_{1x}(x, y) + \vec{j} \cdot f_{1y}(x, y), \quad (2)$$

где \vec{i}, \vec{j} – направляющие орты оси абсцисс и ординат, соответственно,

$$f_{1x}(x, y) = [\eta(y - b) - \eta(y - (b + D))] \times$$

$$\times [\eta(x + (a + D)) - \eta(x - (a + D))], \quad (3)$$

где $\eta(\zeta)$ – ступенчатая функция Хевисайда,

$$f_{1y}(x, y) = [\eta(y - c) - \eta(y - (b + D))] \times \\ \times \begin{bmatrix} (\eta(x + (a + D)) - \eta(x + a)) - \\ -(\eta(x - a) - \eta(x - (a + D))) \end{bmatrix};$$

б) $y < 0$,

$$j_2(t, x, y, z) = j_2 \cdot j(t) \cdot \delta(z - h) \cdot f_2(x, y), \quad (4)$$

где j_2 – величина, определяющая амплитуду и направление плотности тока в ветви индуктора («+» или «-»), $j(t)$ – временная зависимость, t – время.

$$f_2(x, y) = \vec{i} \cdot f_{2x}(x, y) + \vec{j} \cdot f_{2y}(x, y), \quad (5)$$

где $f_{2x}(x, y) = [\eta(y + (b + D)) - \eta(y + b)] \times \\ \times [\eta(x + (a + D)) - \eta(x - (a + D))],$

$$f_{2y}(x, y) = [\eta(y + (b + D)) - \eta(y + c)] \times \\ \times \begin{bmatrix} (\eta(x + (a + D)) - \eta(x + a)) - \\ -(\eta(x - a) - \eta(x - (a + D))) \end{bmatrix}$$

- Временные характеристики возбуждающего тока таковы, что $\omega \cdot \tau \ll 1$, где Ω – характерная циклическая частота сигнала, $\tau = \mu_0 \cdot \gamma \cdot d^2$ – характерное время диффузии в металлический лист.

- Исследуемая индукторная система геометрически и электрически симметрична относительно плоскости XOY .

Согласно принятым допущениям в системе возбуждается электромагнитное поле с компонентами векторов напряжённости:

$$\vec{H} = \{ H_x \neq 0, H_y \neq 0, H_z \neq 0 \}$$

и

$$\vec{E} = \{ E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_z = 0 \}$$

Полная система уравнений Максвелла в пространстве изображений по Лапласу для нулевых начальных условий запишется в виде:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}(p, x, y, z) = \vec{j}(p, x, y, z) + \gamma \cdot \vec{E}(p, x, y, z), \\ \text{rot } \vec{E}(p, x, y, z) = -p\mu_0 \cdot \vec{H}(p, x, y, z), \\ \text{div } \vec{H}(p, x, y, z) = 0, \text{div } \vec{E}(p, x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где p – параметр преобразования Лапласа, $\vec{j}(p, x, y, z) - L$ – образ вектора плотности возбуждающего тока в индукторе, $\vec{j}(p, x, y, z) = \vec{j}_1(p, x, y, z) + \vec{j}_2(p, x, y, z)$.

В соответствии с постановкой задачи имеет место симметрия относительно плоскости $XOY: z = 0$. Данный факт позволяет систему координат привязать к плоскости $z = 0$, где расположен «разомкнутый» виток, и выделить следующие области с различными электрофизическими характеристиками:

1. между листовыми металлами, $0 \leq z \leq h$ с источником поля – «разомкнутым» цилиндрическим витком в плоскости $z = 0$,
2. собственно лист металла, $h \leq z \leq (h + d)$,
3. над листом металла, $z \geq (h + d)$.

Вначале в каждой из выделенных областей с помощью системы (8) запишем уравнения в частных производных и соответствующие общие интегралы для z – компоненты напряжённости магнитного поля. Проведя стандартные вычисления, получим следующие результаты.

- 1) Область между листовыми металлами, $0 \leq z \leq h$.

Получаем, что

$$H_y^{(1)}(p, x, y, z) = - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{q^2} K(p, \alpha, \beta) \times \\ \times \left(C \cdot \text{sh}(qz) - \frac{e^{-qz}}{2} \right) \cdot \cos(\alpha \cdot x) \times \\ \times \sin(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (9)$$

$$(6) \quad H_x^{(1)}(p, x, y, z) = - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{q^2} K(p, \alpha, \beta) \times$$

$$(7) \quad \times \left(C \cdot \text{sh}(qz) - \frac{e^{-qz}}{2} \right) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \times \\ \times \cos(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta \quad (10)$$

Из первого уравнения Максвелла системы (1) вытекает дифференциальное соотношение между касательными компонентами напряжённости магнитного поля:

$$\frac{\partial H_y(p, x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(p, x, y, z)}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Если подставить выражения (9) и (10) в связь (11), нетрудно убедиться в её выполнении и тем самым подтвердить достоверность формул, полученных для $H_y^{(1)}(p, x, y, z)$ и $H_x^{(1)}(p, x, y, z)$.

2) Область – собственно металл листа, $h \leq z \leq (h + d)$.

По результатам вычислений,

$$E_y^{(2)}(p, x, y, z) = p\mu_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{g} \cdot \frac{\alpha}{\beta} (D_1 e^{g \cdot z} - D_2 e^{-g \cdot z}) \times \\ \times \sin(\alpha \cdot x) \cos(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (12)$$

$$E_x^{(2)}(p, x, y, z) = -p\mu_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{g} \cdot (D_1 e^{g \cdot z} - D_2 e^{-g \cdot z}) \times \\ \times \cos(\alpha \cdot x) \sin(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (13)$$

$$H_z^{(2)}(p, x, y, z) = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{g} \cdot \frac{q^2}{\beta} (D_1 e^{g \cdot z} - D_2 e^{-g \cdot z}) \times \\ \times \cos(\alpha \cdot x) \cos(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (14)$$

где $q = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – постоянная распространения поля в свободном пространстве.

Найденное выражение для компонент вектора электромагнитного поля (14) удовлетворяют третьему уравнению Максвелла из системы (1) – $\text{div } \vec{H}(p, x, y, z) = 0$. А зависимости (12) и (13) обращают в нуль дивергенцию вектора электрического поля, $\text{div } \vec{E}(p, x, y, z) = 0$.

3) Область под листом металла, $(h + d) \leq z \leq \infty$.

Поскольку нас интересуют индуцированные токи в низкочастотном режиме, где $(\omega \cdot \tau) \ll 1$, достаточно найти только $D_{1,2}$ при $g \approx q$.

Получаем, что

$$D_2 = \frac{\beta}{2q^2} \cdot K(p, \alpha, \beta), \quad D_1 = 0. \quad (15)$$

(15) подставим в выражения (12) и (13). Результаты помножим на удельную электропроводность листового металла – γ и проинтегрируем по его толщине – d . В конечном итоге получим поверхностные распределения y и x – компонент линейной плотности вихревого тока, возбуждаемого полем прямоугольного витка, состоящего из двух отдельных ветвей.

$$J_y(p, x, y) = \\ = -\frac{p\mu_0\gamma}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{q^4} \cdot K(p, \alpha, \beta) \cdot e^{-q \cdot h} \cdot (1 - e^{-q \cdot d}) \times \\ \times \sin(\alpha \cdot x) \cos(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (16)$$

$$J_x(p, x, y) = \\ = \frac{p\mu_0\gamma}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{q^4} \cdot K(p, \alpha, \beta) \cdot e^{-q \cdot h} \cdot (1 - e^{-q \cdot d}) \cdot \\ \cdot \cos(\alpha \cdot x) \sin(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (17)$$

Для проведения численных оценок необходимо вычислить $K(p, \alpha, \beta)$ – образ преобразования по Лапласу и двойного интегрального преобразования Фурье разности частных производных компонент возбуждающего тока.

Выражения (16), (17) перепишем в виде:

$$J_y(t, x, y) = -j_m \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot \frac{\tau}{2d^2} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{q^4} \times \\ \times K(\alpha, \beta) \cdot e^{-q \cdot h} \cdot (1 - e^{-q \cdot d}) \times \\ \times \sin(\alpha \cdot x) \cos(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta, \quad (18)$$

где j_m – абсолютная амплитуда.

$$J_x(t, x, y) = \\ = j_m \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot \frac{\tau}{2d^2} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{q^4} \cdot K(\alpha, \beta) \cdot e^{-q \cdot h} \cdot (1 - e^{-q \cdot d}) \times \\ \times \cos(\alpha \cdot x) \sin(\beta \cdot y + \psi(\beta)) d\alpha d\beta. \quad (19)$$

Перейдём к координатным зависимостям. Для полноты и замкнутости, а также для удобства в чтении данного материала выполним их в полном объёме, хотя все вычисле-

ния уже проводились ранее.

Найдём образ двойного интегрального преобразования Фурье по $\cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$.

$$A(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \cdot (j_1 + j_2) \times \\ \times \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha(a+D)) \cdot \sin\left(\beta \cdot \left(b + \frac{D}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\beta \cdot \frac{D}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\beta} \cdot \cos\left(\beta \cdot \frac{(b+D+c)}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta \cdot \frac{(b+D-c)}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\alpha \cdot \left(a + \frac{D}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{D}{2}\right) \right]. \quad (20)$$

Аналогичным образом определяем образ двойного интегрального преобразования Фурье по $\cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y)$.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \cdot (j_1 - j_2) \times \\ \times \left[\frac{2}{\beta} \cdot \sin\left(\beta \cdot \frac{(b+D+c)}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta \cdot \frac{(b+D-c)}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\alpha \cdot \left(a + \frac{D}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{D}{2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha(a+D)) \cos\left(\beta \cdot \left(b + \frac{D}{2}\right)\right) \sin\left(\beta \cdot \frac{D}{2}\right) \right]. \quad (21)$$

Теперь

$$\begin{cases} K(\alpha, \beta) = \sqrt{A^2(\alpha, \beta) + B^2(\alpha, \beta)}, \quad (22) \\ \psi(\alpha, \beta) = -\arctg\left(\frac{A(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}\right). \end{cases}$$

Выражения (18) и (19), дополненные зависимостями (20-22), являются решениями поставленной задачи о возбуждении вихревых токов на поверхности идеально проводящей среды.

Выражения (18), (19) в совокупности с зависимостями (21), (22) абсолютно совпадают с аналогичными результатами в системе «прямоугольный виток из двух ветвей над тонкостенным листовым металлом». Физически, данный факт легко объясняется принятой идеализацией, в соответствии с которой листовые металлы полагаются «прозрачными для действующих полей». Поэтому в рассматриваемой системе имеет место одинаковое рассеяние электромагнитной энергии поля витка в обе стороны, и наличие или отсут-

ствие листовых металлов не оказывает никакого воздействия на протекающие процессы.

Выводы

1. В низкочастотном режиме решена трёхмерная электродинамическая задача о возбуждении индукторной системы для магнитно-импульсной обработки массивных проводников полем прямоугольного витка с двумя продольными разрезами.

2. Получены выражения для вихревых токов, позволяющие расчёт и анализ пространственно-временного распределения сил магнитного давления с учётом неоднородности поля, возбуждающего систему.

Литература

1. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хищенко Л.Т., Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. Издание второе, переработанное и дополненное. Под общей ред. д.т.н., проф. Батыгина Ю.В. – Харьков: изд. МОСТ-Торнадо. 2003. – 284 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Электродинамика сплошных сред. – М: Наука. 1982. – 620с.
3. Шнейерсон Г.А., Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М: Энергоатомиздат, 1992. – 423 с.
4. Батыгин Ю.В., Гнатов А.В., Цилиндрический виток индуктора с разрезом как инструмент для магнитно-импульсной обработки металлов. // Электричество. М: 2011. № 12, с. 53–59.
5. Yuriy V. Batygin, Sergey F. Golovashchenko, Andrey V. Gnatov, Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications. // Journal of Materials Processing Technology. – Elsevier. – 2013. № 213 (3), pp. 444–452.
6. Батыгин Ю.В., Гнатов А.В., Сериков С.А., Драченко С.А. Способ магнитно-импульсного притяжения металлических объектов прямоугольным индуктором с двумя разрезами. Патент Украины на полезную модель №53968. Бюл. №20, 25.10.2010г.

Рецензент: А.В. Гнатов д.т.н., профессор ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016 г.