МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ В АВТОМОБІЛЕБУДУВАННІ І ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ

УДК 517.91

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Вербицкий, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ,
Д.А. Плехов, студент, НЮУ им. Ярослава Мудрого

Аннотация. *Получен ряд алгебраических условий устойчивости линейных и нелинейных многомерных систем, использующих сжимающие нормы.*

Ключевые слова: *устойчивость, сжимающая норма, диагональная квазидоминантность, дифференциальное включение, конвергенция.*

АЛГЕБРАЇЧНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В.І. Вербицький, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ
Д.О. Плєхов, студент, НЮУ ім. Ярослава Мудрого

Анотація. *Отримано ряд алгебраїчних умов стійкості лінійних і нелінійних багатовимірних систем, що використовують стискуючі норми.*

Ключові слова: *стійкість, стискаюча норма, діагональна квазідомінантність, диференційне включення, конвергенція.*

ALGEBRAIC CONDITIONS FOR THE STABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS

V. Verbitsky, assistant professor, cand. phys. and math. sc., KhNAHU
D. Plekhov, student of National Law University

Abstract. The series of algebraic conditions for the stability of linear and non-linear dynamic systems with using of contractive norms is obtained.

Key words: stability, contractive norm, diagonal quasi-dominance, differential inclusion, convergence.

Введение

При анализе динамических систем (в особенности, систем автоматического управления) важную роль играют вопросы устойчивости, в том числе, устойчивости в целом, означающей наличие предельного режима, не зависящего от начальных условий.

В работе получено несколько достаточных условий устойчивости в целом для динамических систем и дифференциальных включений, использующих сжимающие нормы.

Анализ публикаций

В ряде работ (например, [1, 2]) используются неевклидовы конечномерные нормы в качестве обобщенных функций Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Систематическое развитие этот подход получил в [3–5]. На основании введенного в [3] понятия совместно диссипативного семейства матриц получен ряд достаточных условий устойчивости нелинейных систем и дифференциальных включений.

Основные результаты

В настоящей работе рассматриваются достаточные условия устойчивости динамических систем, использующие нормы и носящие алгебраический характер. Результаты могут быть применены к исследованию устойчивости и стабилизируемости систем автоматического управления.

Отметим, что матрица A называется диссипативной относительно конечномерной нормы $\|.\|$, если $\|\exp(tA)\| \le 1$ при $t \ge 0$, и равномерно диссипативной, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|\exp(tA)\| < \exp(-t\varepsilon)$ при $t \ge 0$. Для существования нормы, относительно которой матрица A диссипативна (равномерно диссипативна) необходимо и достаточно, чтобы система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

была устойчива (асимптотически устойчива). Семейство матриц называется совместно диссипативным (равномерно совместно диссипативным), если существует норма, относительно которой все матрицы семейства диссипативны (равномерно диссипативны с общим ε).

Отметим также, что диссипативность (равномерная диссипативность) матрица A равносильна условию $\gamma(A) \le 0$ $(\gamma(A) < 0)$, где $\gamma(A)$ – логарифмическая норма матрицы A

$$\gamma(A) = \lim_{h \to +0} h^{-1}(\|E + hA\| - 1),$$

где E – единичная матрица.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in Fx, \tag{1}$$

где F – семейства матриц порядка n.

Теорема 1. Начало координат устойчиво (экспоненциально устойчиво) для включения (1) в том и только в том случае, когда семейство F совместно (равномерно совместно) диссипативно.

Из теоремы 1 вытекает устойчивость (экспоненциальная устойчивость) любой системы с переключениями

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k(t) \cdot A_k x,$$

где $A_k (1 \le k \le l)$ – семейство матриц; $\alpha_k(t) \ge 0$ $(1 \le k \le l)$ – кусочно-непрерывные функции, при условии совместной (равномерной совместной) диссипативности матриц A_k.

При рассмотрении ряда прикладных задач (теория управления, химическая кинетика, динамика популяций и т.д.) возникает ситуация, в которой рассматриваемые матрицы не обладают общей евклидной нормой, относительно которой они диссипативны, однако существует такая полиэдральная норма. В частности, такая норма может иметь вид

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le n} (\alpha_i^{-1} \cdot |x_i|), \tag{2}$$

где $\alpha_i > (1 \le i \le n)$ – набор констант; x_i – i-я компонента вектора x.

Такая норма называется весовой l^{∞}-нормой. Условие диссипативности матрицы A относительно такой нормы имеет вид

$$\alpha_k a_{kk} + \sum_{j \ne k} \alpha_j |\alpha_{kj}| \le 0, \tag{3}$$

для любого $k = 1; 2; ...; n$. Строгие неравенства обеспечивают равномерную диссипативность (в этом случае говорят, что матрица A диагонально квазидоминантна [6].

Пусть семейство матриц F компактно. Построим матрицу R таким образом

$$r_{ii} = \max_{A \in F} a_{ii}; \; r_{ij} = \max_{A \in F} |a_{ij}| (i \ne j).$$

Теорема 2. Если матрица R устойчива, то семейство F равномерно совместно диссипативно.

Поскольку внедиагональные элементы матрицы R неотрицательны, ее устойчивость определяется критерием Севастьянова–Котелянского [7]: все ее главные миноры не-четного порядка должны быть отрицательными, а четного – положительными.

При исследовании нелинейных систем также применяется указанный подход. При этом рассматриваются поля Якоби (т.е. совокупности матриц Якоби) систем. При наличии равномерной совместной диссипативности матриц Якоб соответствующая норма будет экспоненциально сжимающей для системы, т.е. функция $|x_1(t)-x_2(t)|$ будет убывать с экспоненциальной скоростью для любых двух решений $x_1(t), x_2(t)$. Это обеспечивает глобальную устойчивость системы.

С помощью указанного подхода получено достаточное условие экспоненциальной концергенции в нелинейных системах.

Напомним, что система называется экспоненциально конвергентной, если она обладает единственным ограниченным на всей оси решением, и оно экспоненциально устойчиво в целом.

Теорема 3. Пусть система

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{4}$$

определена на всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, причем отображение f гладко по x и непрерывно по t. Пусть также существует такое $x_0\in\mathbb{R}^n$, что функция $f(t,x_0)$ ограничена на всей оси. Если семейство $f'_x(t,x)$ при всех t,x равномерно совместно диссипативно, то система (4) экспоненциально конвергентна.

Рассмотрим приложение теоремы 3 к анализу систем прямого автоматического регулирования с одной скалярной нелинейности и возбуждающими силами.

Пусть система имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=Bx+hf(\sigma)+p(t), \tag{5}$$

где $\sigma=\sum_{k=1}^{n}c_kx_k$, B – устойчивая матрица порядка n, вектор-функция $p(t)$ непрерывна и ограничена, векторы $c=(c_1;...c_n)$; $h=(h_1;...h_n)$ постоянные, $f(\sigma)$ – монотонно неубывающая дифференцируемая функция.

Пусть $D(h,c)$ – класс матриц, первый столбец которых совпадает с вектором h, а остальные столбцы ортогональны вектору c.

Теорема 4. Пусть существует такая матрица $T\in D(h,c)$, что матрица $A=T^{-1}BT$ диагонально квазидоминантна. Если

$$\sum_{k=1}^{n}h_kc_k<0,$$

то система (5) экспоненциально конвергентна. Если функция $p(t)$ периодична, то предельный режим имеет тот же период.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-3x_1+x_2+4x_3+f(\sigma)+p(t);\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-5x_2-2x_3-f(\sigma)+p(t);\\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-3x_3+f(\sigma)+p(t);\end{cases}$$
$$\sigma=-x_1+x_2+x_3.$$

Здесь $h=(1;-1;1);\ c=(-1;1;1);$

$$B=\begin{pmatrix}-3&1&4\\0&-5&-2\\2&0&-3\end{pmatrix};\qquad T=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};$$

$$\alpha_1=1;\ \alpha_2=1/2;\ \alpha_3=1/3.$$

Система удовлетворяет условиям теоремы 4 и, значит, экспоненциально конвергентна.

Выводы

Полученные результаты позволяют конструктивно исследовать устойчивость важных классов многомерных динамических систем, в том числе систем автоматического регулирования. Результаты позволяют оценивать степень устойчивости и исследовать на глобальную устойчивость.

Литература

1. Былов Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и его приложения к задачам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноградов, Д.М. Гробман и др. – М.: Наука, 1966.
2. Brunner H. The numerical solution of Volterra equations / H. Brunner, P.J. Houwen. – North–Holland, Amsterdam–New York–Tokyo, 1986.
3. Вербицкий В.И. Совместно диссипативные операторы и их приложения / В.И. Вербицкий, А.Н. Горбань // Сиб. мат. журнал. – 1992. – Т.33, №1. – С. 26–31.
4. Verbitskii V.I. On one approach to the analysis of stability of nonlinear systems and differential inclusions / V.I. Verbitskii, A.N. Ctorban // Advances in Modelling and Analysis. – 1994. – V. 19, № 4. – P. 15–27.
5. Вербицкий В.И. Ляпуновские нормы для нелинейных динамических систем / В.И. Вербицкий // Автомобіль і електроніка. Сучасні технології. – 2017. – №11. – С. 76–78.
6. Логофет Д.О. Матрицы и графы: проблемы устойчивости в математической экологии: автореф. дисс. на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Д.О. Логофет. – М., 1985.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.

Рецензент: В.М. Колодяжный, профессор, д.ф.-м.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2017 г.