



ПОПЕРЕДНІЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИСОКОТОЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Инструкцией по вычислению результатов нивелирования не предусмотрено статистического анализа данных методами математической статистики. Для лучшего понимания характера влияния разных факторов на результаты измерений, выявление закономерностей и отклонений сделана попытка проанализировать с помощью этих методов результаты нивелирования части геодезического полигона. Это позволит поднять степень надёжности, точности и объективности обработки результатов высокоточного нивелирования и дальнейшего их уравнивания.

The instruction on calculation of levelling results doesn't provide data analysis with mathematical statistical methods. For better understanding the nature of different factors influence on the measurements results, detection of the regularities and deflections the results of levelling a part of a geodynamic polygon have been analysed with these methods. It allows us to improve reliability, accuracy and objectivity of processing results of high-precision levelling and its further adjustment.

Постановка проблеми. Інструкцією 1971 р. [2], що й досі використовується для оброблення результатів нівелірних робіт, не передбачено аналізу даних нівелювання методами математичної статистики. Для глибокого розуміння характеру впливу різних факторів на результати вимірювань, виявлення закономірностей і причин цього впливу доцільно проаналізувати дані за допомогою різних статистичних методів. Це потрібно для того щоб забезпечити відповідний рівень надійності, точності та об'єктивності подальшого урівноваження результатів.

Аналіз попередніх досліджень теми. Питанню статистичного аналізу даних високоточного нівелювання приділяли увагу Дж. Альберда, Е. Андерсон, Н. Браатен, А. Чіаріні й Т. Егельгофт. Оскільки цей вид нівелювання сьогодні залишається основним методом визначення висот пунктів земної поверхні, тому проблему попереднього аналізу даних нівелювання потрібно ще вирішувати.

Мета статті: дослідити методику оцінки якості нівелювання, описану в інструкції [2]; дослідити ряди різниць перевищень статистичними методами для кращого розуміння характеру розподілу величин, виявлення в цьому процесі закономірностей та відхилень; перевірити емпіричність даних різниць перевищень на відповідність нормальному закону розподілу; проаналізувати отримані величини асиметрії та ексцесу, що свідчать про характер відхилення від нормального закону розподілу; проаналізувати результати Т-тесту, який вказує на відхилення від нуля середнього значення різниць і на розбіжність дисперсій двох рядів даних; перевірити за допомогою Т-тесту гіпотезу про рівність середніх значень різниць; визначити коефіцієнти кореляції між значеннями різниць та перевищеннями, довжинами секцій та кількістю штативів.

Виклад основного матеріалу. Вихідними даними для нашого дослідження стали результати високоточного нівелювання I класу, проведеного на

Кримському геодезичному полігоні (використано дані по 7-ми секціях, що спираються на фундаментальні репери). Масив вихідних даних різниць перевищень зведено в табл. 1.

Таблиця 1. Різниця перевищень по секціях

Секції	Різниця					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
9613-4915	-0,1	-0,4	-0,1	0,4	0,1	0,1
4915-2863	-1,4	-0,6	-1,6	0,4	-0,4	-0,6

Наведемо формули обчислення різниць d_1-d_6 .

$$\begin{aligned} d_1 &= (h_{\text{прав}} - h_{\text{лів}})_{\text{прям}}; & d_2 &= (h_{\text{прав}} - h_{\text{лів}})_{\text{звор}}; \\ d_3 &= (h_{\text{прям}} - h_{\text{звор}})_{\text{прав}}; & d_4 &= (h_{\text{прям}} - h_{\text{звор}})_{\text{лів}}; \\ d_5 &= \frac{1}{2}(h_{\text{прям}} + h_{\text{звор}})_{\text{прав}} - \frac{1}{2}(h_{\text{прям}} + h_{\text{звор}})_{\text{лів}}; \\ d_6 &= \frac{1}{2}(h_{\text{прав}} + h_{\text{лів}})_{\text{прям}} - \frac{1}{2}(h_{\text{прав}} + h_{\text{лів}})_{\text{звор}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Контроль здійснено за такими виразами:

$$\sum d_5 = \frac{1}{2}(\sum d_1 - \sum d_2); \quad d_6 = \frac{1}{2}(\sum d_3 + \sum d_4). \quad (2)$$

Інструкцією [2] допускається розходження в 3 мм. Для порівняння сум різниць із теоретичними значеннями, зумовленими впливом лише випадкових похибок, використано такі формули:

$$\begin{aligned} \text{для } d_1, d_2, d_3, d_4 &- \sum_{\text{теор}} = \pm 1,2 \text{мм} \sqrt{L}; \\ \text{для } d_5, d_6 &- \sum_{\text{теор}} = \pm 0,84 \text{мм} \sqrt{L}, \end{aligned} \quad (3)$$

де L – довжина ділянки, для якої виконано сумування різниць, у кілометрах.

Оцінка якості результату нівелювання за Інструкцією [2]

Результати порівняння суми різниць, викликаних впливом лише випадкових похибок, по всіх секціях з теоретично допустимими значеннями наводяться в табл. 2.

Середню квадратичну випадкову похибку η^2 середнього перевищення на 1 км ходу обчислено за такими формулами (результат зведено в табл. 3):



Таблиця 2. Порівняння суми різниць з теоретично допустимими значеннями по секціях

Різниця				Гранична Σ	Різниця		Гранична Σ	L, км
d ₁	d ₂	d ₃	d ₄		d ₅	d ₆		
2,9	-4,2	-10,5	-9,2	5,9	3,8	-9,9	4,1	24,1
5,0	0,2	-1,9	-7,1	6,3	2,4	-4,4	6,3	27,4
-1,8	-5,4	-6,9	0,3	6,2	1,9	-3,6	6,2	26,6
1,1	-1,5	-0,5	-0,5	5,9	1,2	-1,0	5,9	24,5
0,9	0,6	-1,7	-3,2	5,4	0,2	-2,4	5,4	20,0
-2,3	0,0	2,3	4,6	3,9	-1,1	3,6	3,9	10,3
-2,7	-2,3	1,7	6,7	5,9	0,0	4,1	5,9	24,2

$$\eta^2 = \frac{1}{4n} \left(\frac{d_5^2}{r} \right); \quad \eta^2 = \frac{1}{4n} \left(\frac{d_6^2}{r} \right), \quad (4)$$

де r – довжина однієї секції; n – кількість секцій. Потім обчислюємо середню квадратичну систематичну похибку σ^2 середнього перевищення на 1 км ходу за формулою

$$\sigma^2 = \frac{1}{4[L]} \left(\frac{S^2}{L} \right), \quad (5)$$

де L – довжина секції; S – величина, яку визначають з графіка як різницю ординат прямої, що симетрично розташована відносно основної кривої накопичення різниць d_5, d_6 .

Таблиця 3. Значення σ, η середнього перевищення на 1 км ходу

Секції	η , мм		σ , мм		L, км
	за d_5	за d_6	за d_5	за d_6	
9613-2748	0,22	0,44	0,08	0,23	24,1
2748-4418	0,15	0,42	0,06	0,12	27,4
4418-1836	0,19	0,35	0,02	0,07	26,6
1836-4342	0,27	0,42	0,05	0,14	24,5
4342-9460	0,22	0,41	0,08	0,15	20,0
9460-8170	0,27	0,45	0,03	0,20	10,3
8170-9613	0,24	0,56	0,05	0,19	24,2

Висновки. З табл. 2 випливає таке: різниці d_3, d_4 перевищують гранично допустиме теоретичне значення суми різниць. Це свідчить, що в першій з названих секцій є значна розбіжність між лівим та правим нівелюванням 1 класу, причому накопичення різниць має від’ємний характер, тобто спостерігається певна системність. З даних табл. 3 видно, що середні квадратичні похибки, визначені за різницями d_5 , вдвічі менші за СКП, визначені за різницями d_6 .

При визначенні систематичної СКП σ^2 виникає ситуація, коли крива накопичення різниць d_5, d_6 у деяких секціях набуває нелінійного характеру. У цих випадках пропонується не обмежуватися лише прямою, як про це вказується в Інструкції [2], а застосовувати метод добору ліній трендів, що максимально відповідають кривій накопичення. Це легко вирішити за допомогою програми Excel 2007, якщо піти шляхом добору методом найменших квадратів ліній трен-

ду з рівнянням та значенням достовірності R^2 .

Для детальнішого аналізу даних та дослідження оцінки точності результатів нівелювання пропонуємо застосовувати методи математичної статистики.

Дослідження різниць перевищень методами математичної статистики

1. Визначення асиметрії, ексцесу, СКП окремо взятої різниці перевищень. Насамперед визначаємо: мінімальне, максимальне та середнє значення різниць; СКП окремої різниці; СКП арифметичного середнього; величини асиметрії та ексцесу з відповідними СКП; граничні значення асиметрії та ексцесу. Результати зведено в табл. 4.

СКП різниці та СКП простого арифметичного середнього знаходимо за такими формулами:

$$m = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

Асиметрію та ексцес для рядів різниць визначаємо за виразами [3]

$$S(x) = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \left(\frac{x_j - \bar{x}}{m} \right)^3 - \text{асиметрія};$$

$$E(x) = \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{x_j - \bar{x}}{m} \right)^4 \right) - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} - \text{ексцес}. \quad (7)$$

СКП асиметрії та СКП ексцесу знаходимо за формулами [1]

$$m(S) = \sqrt{\frac{6(n+1)}{(n+1)(n+3)}} - \text{СКП асиметрії};$$

$$m(E) = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} - \text{СКП ексцесу}. \quad (8)$$

Допустимі значення асиметрії та ексцесу визначаємо за такими виразами [1]:

$$|S(x)| < 3m(S) \quad \text{та} \quad |E(x)| < 5m(E). \quad (9)$$

Таблиця 4. Значення показників розподілу рядів різниць

Параметр дослідження, мм	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆
Мінімальне значення різниць	-1,7	-1,5	-3,8	-3,3	-1,2	-3,4
Максимальне значення різниць	1,8	1,6	3,8	4,1	1,4	3,9
Середнє значення різниць	0,03	-0,14	-0,20	-0,09	0,09	-0,15
СКП окремої різниці	0,78	0,69	1,29	1,20	0,57	1,15
СКП арифметичного середнього	0,08	0,07	0,14	0,13	0,06	0,12
Асиметрія	0,03	0,21	0,20	0,18	0,06	0,30
Гранична величина асиметрії	0,77					
СКП асиметрії	0,26					
Ексцес	-0,59	-0,58	0,61	1,36	-0,36	1,43
Гранична величина ексцесу	2,39					
СКП ексцесу	0,48					



Висновки. Як бачимо, СКП різниць d_1, d_2 майже однакові та майже вдвічі менші, ніж СКП різниць d_3, d_4 , що вказує на однорідність результатів прямого та зворотного ходів; різниці d_3, d_4 теж однако-ві, що вказує на однорідність лівих та правих нівелювань. Разом з тим маємо кілька від'ємних серед-ніх значень різниць, що свідчить про накопичення таких різниць. Значних відхилень від нормального закону розподілу не спостерігається, асиметрія та ексцес у межах допуску. Різниці d_5 мають найкращі показники СКП серед усіх різниць, асиметрії та ексцесів.

2. Визначення коефіцієнтів кореляції між рядами різниць. Спробуємо виявити лінійну залежність між результатами рядів вимірювань. Для цього знайдемо коефіцієнти кореляції за форму-лою [2]

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}} \quad (10)$$

Результати зведемо в табл. 5-9.

Таблиця 5. Визначення коефіцієнтів кореляції між рядами різниць

Параметри	d_1-d_2	d_3-d_4	d_5-d_6	d_1-d_3	d_1-d_4	d_1-d_5	d_1-d_6
Коефіцієнт кореляції	0,16	0,70	0,08	0,28	0,27	0,80	0,01
$t_{1-\alpha/2,f}$	1,99						
t_{xy}	1,56	9,23	0,73	2,67	2,58	12,37	0,09
Підтвердження гіпотези	-	+	-	+	+	+	-

Параметри	d_2-d_3	d_2-d_4	d_2-d_5	d_2-d_6	d_3-d_5	d_3-d_6	d_4-d_5	d_4-d_6
Коефіцієнт кореляції	0,33	0,12	0,72	0,12	0,02	0,93	0,13	0,92
$t_{1-\alpha/2,f}$	1,99							
t_{xy}	3,24	1,10	9,66	1,14	0,16	22,76	1,20	21,65
Підтвердження гіпотези	+	-	+	-	-	+	-	+

Таблиця 6. Визначення коефіцієнтів кореляції між рядами різниць та довжинами секцій, перевищеннями та кількістю штативів у секції

Параметри	$d_1-L, км$	$d_3-L, км$	$d_5-L, км$	$d_2-L, км$	$d_6-L, км$	$d_4-L, км$
Коефіцієнт кореляції	0,17	0,14	0,20	0,12	0,18	0,04
$t_{1-\alpha/2,f}$	1,99					
t_{xy}	1,65	1,36	1,91	1,10	1,75	0,38
Підтвердження гіпотези	-	-	-	-	-	-

Параметри	$d_1-h, м$	$d_2-h, м$	$d_3-h, м$	$d_4-h, м$	$d_5-h, м$	$d_6-h, м$
Коефіцієнт кореляції	0,08	0,20	0,05	0,00	0,19	0,03
$t_{1-\alpha/2,f}$	1,99					
t_{xy}	0,78	1,89	0,46	0,02	1,77	0,28
Підтвердження гіпотези	-	-	-	-	-	-

Параметри	$d_1-шт.$	$d_2-шт.$	$d_3-шт.$	$d_4-шт.$	$d_5-шт.$	$d_6-шт.$
Коефіцієнт кореляції	0,04	0,04	0,03	0,04	0,06	0,04
$t_{1-\alpha/2,f}$	1,99					
t_{xy}	0,38	0,41	0,31	0,38	0,60	0,34
Підтвердження гіпотези	-	-	-	-	-	-

Таблиця 7. Визначення коефіцієнтів кореляції між абсолютними значеннями різниць та довжинами секцій, перевищеннями та кількістю штативів у секції

Параметри	абс. (d_1-d_2) та абс. (d_3-d_4)	абс. (d_3-d_4) та абс. (d_5-d_6)	абс. (d_1-d_2) та абс. (d_5-d_6)
Коефіцієнт кореляції	0,29	0,01	0,16
$t_{1-\alpha/2,f}$	2,28		
t_{xy}	2,85	0,10	1,53
Підтвердження гіпотези	+	-	-

Параметри	абс. $(d_1-d_2)-L, км$	абс. $(d_3-d_4)-L, км$	абс. $(d_5-d_6)-L, км$
Коефіцієнт кореляції	0,40	0,21	0,35
$t_{1-\alpha/2,f}$	2,28		
t_{xy}	4,12	2,03	3,43
Підтвердження гіпотези	+	-	+

Параметри	абс. $(d_1-d_2)-шт.$	абс. $(d_3-d_4)-шт.$	абс. $(d_5-d_6)-шт.$
Коефіцієнт кореляції	0,42	0,25	0,30
$t_{1-\alpha/2,f}$	2,28		
t_{xy}	4,36	2,40	2,93
Підтвердження гіпотези	+	+	+

Параметри	абс. $(d_1-d_2)-h, м$	абс. $(d_3-d_4)-h, м$	абс. $(d_5-d_6)-h, м$
Коефіцієнт кореляції	0,07	0,15	0,23
$t_{1-\alpha/2,f}$	2,28		
t_{xy}	0,69	1,42	2,24
Підтвердження гіпотези	-	-	-

Таблиця 8. Коефіцієнти кореляції при сортуванні різниць за кількістю штативів у секції

Параметри	$d_1-шт.$	$d_2-шт.$	$d_3-шт.$	$d_4-шт.$	$d_5-шт.$	$d_6-шт.$
К. к. * штативів (від 2 до 10)	0,20	0,21	0,33	0,04	0,02	0,26
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 10 до 20)	0,49	0,44	0,13	0,39	0,07	0,15
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	+	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 20 до 30)	0,05	0,15	0,16	0,04	0,06	0,11
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 30 до 40)	0,02	0,16	0,36	0,29	0,06	0,36
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 40 до 90)	0,85	0,40	0,11	0,48	0,74	0,31
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	+	-	-	-	+	-

Параметри	$d_1-L, км$	$d_2-L, км$	$d_3-L, км$	$d_4-L, км$	$d_5-L, км$	$d_6-L, км$
К. к. штативів (від 2 до 10)	0,17	0,33	0,29	0,08	0,08	0,16
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 10 до 20)	0,31	0,23	0,26	0,03	0,08	0,13
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 20 до 30)	0,14	0,00	0,14	0,21	0,09	0,19
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 30 до 40)	0,21	0,03	0,16	0,29	0,19	0,24
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	-	-	-	-
К. к. штативів (від 40 до 90)	0,10	0,41	0,68	0,63	0,31	0,69
Підтвердження гіпотези $r_{xy} > 0$	-	-	+	-	-	+

* К. к. – коефіцієнт кореляції.



Таблиця 9. Коефіцієнти кореляції при сортуванні різниць за довжиною секції

Параметри	d ₁ -шт.	d ₂ -шт.	d ₃ -шт.	d ₄ -шт.	d ₅ -шт.	d ₆ -шт.
К. к.* секції (від 0,1 до 1 км)	0,25	0,26	0,51	0,54	0,10	0,60
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	+	+	-	+
К. к. секції (від 1 до 2 км)	0,22	0,19	0,26	0,23	0,26	0,25
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	-	-	-	-
К. к. секції (від 2 до 3 км)	0,14	0,06	0,16	0,23	0,14	0,22
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	-	-	-	-
К. к. секції (від 3 до 4,2 км)	0,53	0,11	0,01	0,43	0,46	0,25
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	-	-	-	-
Параметри	d ₁ -L, км	d ₂ -L, км	d ₃ -L, км	d ₄ -L, км	d ₅ -L, км	d ₆ -L, км
К. к. секції (від 0,1 до 1 км)	0,29	0,20	0,53	0,18	0,07	0,44
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	+	-	-	+
К. к. секції (від 1 до 2 км)	0,25	0,01	0,44	0,27	0,16	0,37
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	+	-	-	-
К. к. секції (від 2 до 3 км)	0,27	0,51	0,19	0,06	0,50	0,16
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	+	-	-	+	-
К.к. секції (від 3 до 4,2 км)	0,21	0,39	0,32	0,33	0,36	0,36
Підтвердження гіпотези r _{xy} >0	-	-	-	-	-	-

*К. к. – коефіцієнт кореляції;
 d₄-шт. – коефіцієнт кореляції між значеннями різниць у секції та кількістю штативів;
 d₂-L, км – коефіцієнт кореляції між значеннями різниць та довжиною секцій.

Висновки. Якщо значення коефіцієнта кореляції незначне, це ще не означає, що зв'язку немає, просто він не є лінійним. Спостерігається велика залежність абсолютних значень різниць від довжини секції та особливо від кількості штативів. При сортуванні рядів різниць за кількістю штативів проявляється певна залежність рядів різниць від кількості штативів. При сортуванні рядів різниць за довжиною секції виявлено значні величини коефіцієнтів кореляції між значеннями різниць та кількістю штативів, довжиною секцій. Є можливість встановити параметри рівняння регресії.

3. Застосування Т-тесту для перевірки гіпотез щодо рядів різниць перевищень. Перевірка значень коефіцієнтів кореляції. Після визначення коефіцієнтів кореляції необхідно перевірити головну гіпотезу, де r_{xy} = 0 (тобто, коли коефіцієнт кореляції дорівнює нулю), та альтернативну гіпотезу r_{xy} ≠ 0 (тобто, коли коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю) за такою формулою [3]:

$$t_{xy} = \frac{r_{xy} \sqrt{f}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} > t_{1-\alpha/2, f}, \quad (11)$$

де t_{xy} – безрозмірна величина; r_{xy} – коефіцієнт кореляції; f = n – 2 – ступені свободи; t_{1-α/2, f} – абсциса розподілу Стьюдента; α – рівень значимості.

Результати перевірки гіпотези відображені в таблицях визначення коефіцієнтів кореляції.

Перевірка середніх значень різниць перевищень. Для цього використовуємо формулу [4]

$$|t_{\bar{\delta}}| = \frac{\bar{\delta} \sqrt{n}}{m} < t_{1-\alpha/2, f}, \quad (12)$$

де |t_{δ̄}| – безрозмірна величина; δ̄ – середнє значення ряду різниць перевищень; n – кількість спостережень; m – СКП окремо взятої різниці, обчисленої за формулою (6); t_{1-α/2, f} – абсциса розподілу Стьюдента; f = n – 1 – кількість ступенів свободи; α – рівень значимості. Т-тест дає змогу перевірити, наскільки середнє значення рядів відрізняється від нуля: головна гіпотеза, що середнє=0, та альтернативна гіпотеза, що середнє≠0. Результати перевірки зведено в табл. 10.

Таблиця 10. Результати Т-тесту для середніх значень різниць перевищень

Параметр дослідження	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆
Середні значення різниць	0,03	-0,14	-0,20	-0,09	0,09	-0,15
СКП окремої різниці, мм	0,78	0,69	1,28	1,19	0,57	1,14
t _{δ̄}	0,42	-1,93	-1,44	-0,75	1,56	-1,26
t _{1-α/2, f}	2,28					
Підтвердження гіпотези	+	+	+	+	+	+

Перевірка різниці двох середніх значень перевищень. Використаємо знову Т-тест для перевірки головної гіпотези, де середнє₁-середнє₂=0, та альтернативної гіпотези, де середнє₁-середнє₂≠0. Скористаємося формулою [3]

$$|t_{\Delta\bar{\delta}}| = \frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}{\sqrt{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}}} < t_{1-\alpha/2, f}, \quad (13)$$

де |t_{Δδ̄}| – безрозмірна величина; δ̄_i – середні значення різниць; m – СКП окремих різниць для кожного ряду; n₁ та n₂ – кількість різниць у кожному з рядів; t_{1-α/2, f} – абсциса розподілу Стьюдента; $\frac{1}{f} = \frac{c^2}{f_1} + \frac{(1-c)^2}{f_2}$; c = $\frac{m_1^2}{n_1} : \left(\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2} \right)$; α – рівень значимості. Результати наведено у табл. 11.

Таблиця 11. Результати Т-тесту для різниці середніх значень різниць перевищень

Параметри	d ₁ -d ₂	d ₃ -d ₄	d ₅ -d ₆
t _{Δδ̄}	1,59	-0,55	1,82
t _{1-α/2, f}	2,26	2,26	2,27
Підтвердження гіпотези	+	+	+

Висновки. Отже, середні значення різниць перевищень близькі до нуля, хоча є і певні відхилення у рядах різниць d₂ та d₃; середні значення рядів різниць майже однакові.

4. Застосування F-тесту для рядів різниць перевищень. Перевірка рядів різниць між собою. F-тест вказує на розбіжність дисперсій двох рядів різниць



перевищень, де головною гіпотезою є $m_1^2 = m_2^2$, а альтернативною – $m_1^2 \neq m_2^2$ [3]:

$$F_m = \frac{m_1^2}{m_2^2} < F_{\alpha/2, f_1, f_2}, \quad (14)$$

де F_m – безрозмірна величина; m_i – СКП окремої різниці для кожного ряду; $F_{\alpha/2, f_1, f_2}$ – це $(1-\alpha/2)\%$ -ва вірогідність F – розподілу; f_1, f_2 – ступені свободи двох рядів $f = n-1$; α – рівень значимості.

Результати F-тесту зведено в табл. 12-15.

Таблиця 12. Результати F-тесту для рядів різниць перевищень

Перевірка рядів	d_1-d_2	d_3-d_4	d_5-d_6	d_1-d_2	d_3-d_4	d_5-d_6
Рівень значимості	$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,025$		
Ступені свободи	$f_1 = 88$	$f_2 = 88$		$f_1 = 88$	$f_2 = 88$	
F_m	1,27	1,16	4,03	1,60	1,34	16,24
$F_{\alpha/2, f_1, f_2}$	1,42			1,52		
Підтвердження гіпотези	+	+	-	-	+	-

Таблиця 13. Результати F-тесту для рядів абсолютних різниць перевищень

Перевірка рядів	абс. (d_1-d_2) та абс. (d_3-d_4)	абс. (d_1-d_2) та абс. (d_5-d_6)	абс. (d_3-d_4) та абс. (d_5-d_6)
Рівень значимості	$\alpha = 0,05$		
Ступені свободи	$f_1 = 88$		$f_2 = 88$
F_m	1,26	0,79	1,82
$F_{\alpha/2, f_1, f_2}$	1,42	1,42	1,42
Підтвердження гіпотези	+	+	-

Таблиця 14. Результати F-тесту при сортуванні різниць перевищень за кількістю штативів у секції

Параметри	d_1-d_2	d_3-d_4	d_5-d_6
F-тест для рядів – штативів від 2 до 10	+	+	+
F-тест для рядів – штативів від 10 до 20	+	+	-
F-тест для рядів – штативів від 20 до 30	+	+	-
F-тест для рядів – штативів від 30 до 40	+	+	-
F-тест для рядів – штативів від 40 до 90	+	+	+

Таблиця 15. Результати F-тесту при сортуванні різниць перевищень за довжиною секції

Параметри	d_1-d_2	d_3-d_4	d_5-d_6
F-тест для рядів – секції від 0,1 до 1 км	+	+	-
F-тест для рядів – секції від 1 до 2 км	+	+	-
F-тест для рядів – секції від 2 до 3 км	+	+	-
F-тест для рядів – секції від 3 до 4,2 км	+	+	+

Сформуємо загальну таблицю для різниць перевищень із зазначенням частки від'ємних та додатних їх значень (табл. 16).

Таблиця 16. Частка додатних та від'ємних значень різниць перевищень

Параметри	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
Загальна кількість різниць	89	89	89	89	89	89
Різниць ≥ 0	46	41	36	42	55	43
Різниць < 0	43	48	53	47	34	46
% ≥ 0	51,7	46,1	40,4	47,2	61,8	48,3
% < 0	48,3	53,9	59,6	52,8	38,2	51,7

Висновки. У 95 % випадків ряди різниць (d_1-d_2) та (d_5-d_6) мають різні дисперсії, що зумовлено розбіжностями в даних по прямих та зворотних ходах. У табл. 16 подаються результати аналізу всіх різниць за їх значенням, а саме, який відсоток різниць більше за нуль, а який – менше за нуль. У попередніх аналізах ми бачили, що ряд різниць d_5 має досить високі показники надійності, а саме найменшу СКП окремої різниці (0,57 мм), найменшу СКП арифметичного середнього (0,06 мм), найменше значення асиметрії (0,06 мм) та ексцесу (-0,36 мм). Тоді виходить, що значення від'ємних різниць мають бути в 1,5 раза більшими за значення додатних, щоб компенсувати їхній вплив. Оскільки різниці d_5 отримано шляхом віднімання усереднених перевищень лівих та правих нівелювань, то можна зробити такі висновки: усереднене значення правих нівелювань більше, ніж усереднене значення лівих нівелювань, що спричинює появу більшої за 0 кількості різниць. Виникає запитання: усереднене значення правих нівелювань більше за усереднене значення лівих чи навпаки? Тим самим ми наголошуємо на відносності, але це ще потребує детальнішого розгляду.

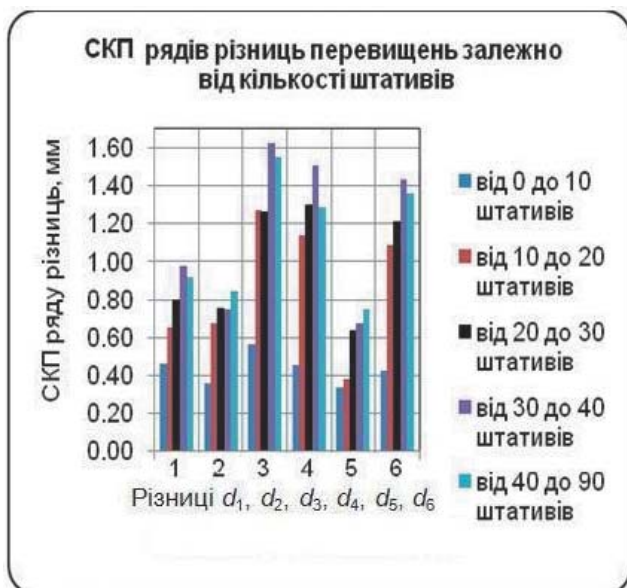
5. Застосування критерію Пірсона (критерій χ^2). Цей критерій є найнадійнішим при порівнянні емпіричного розподілу з нормальним, але при цьому необхідно мати достатню кількість різниць, щоб сформувані не менше 8-ми інтервалів і щоб у кожному з них було не менше 5-ти різниць [2]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (15)$$

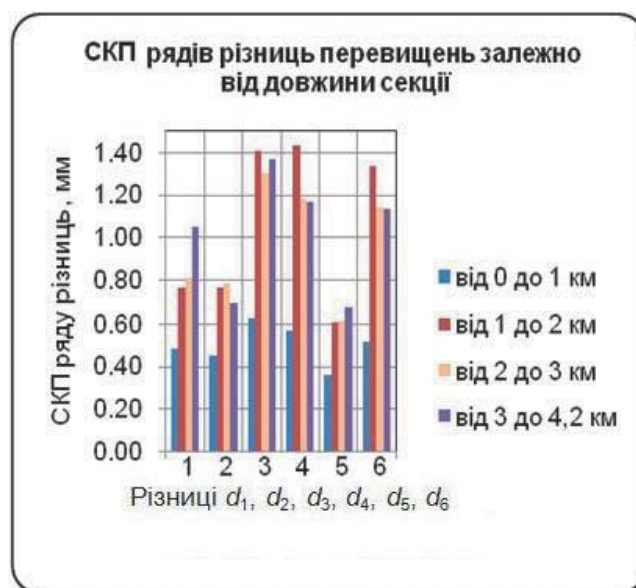
де m – кількість інтервалів; k_i – кількість різниць, що потрапили до i -го інтервалу; n – кількість усіх різниць; p_i – вірогідність потрапляння випадкової величини до i -го інтервалу. Після обчислення χ^2 визначають величину p ; якщо $p > 0,5$, то розподіл нормальний, якщо $0,3 \leq p \leq 0,5$, – добрий, якщо $0,1 \leq p \leq 0,3$, – задовільний, якщо $p < 0,1$, – незадовільний.

Висновок. Критерій Пірсона застосовують, коли є необхідна кількість різниць – не менше 100.

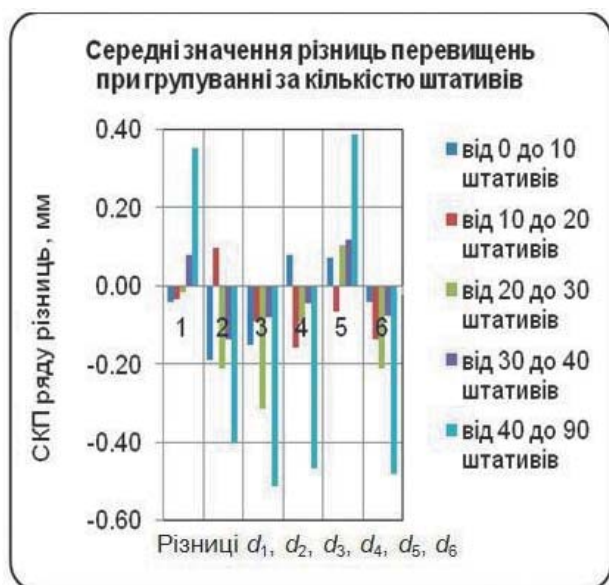
6. Аналіз різниць перевищень при сортуванні за кількістю штативів у секції та довжиною секцій. Аналіз розпочинається із сортування всіх різниць перевищень за такими параметрами: за кількістю штативів та за довжиною секції. При сортуванні за кількістю штативів ми отримали 5 груп, а при сортуванні за довжиною секцій – 4 групи. В кожній із груп визначалась СКП окремої різниці та середнє значення рядів різниць перевищень. Про результати можна судити з діаграм (мал. 1-4).



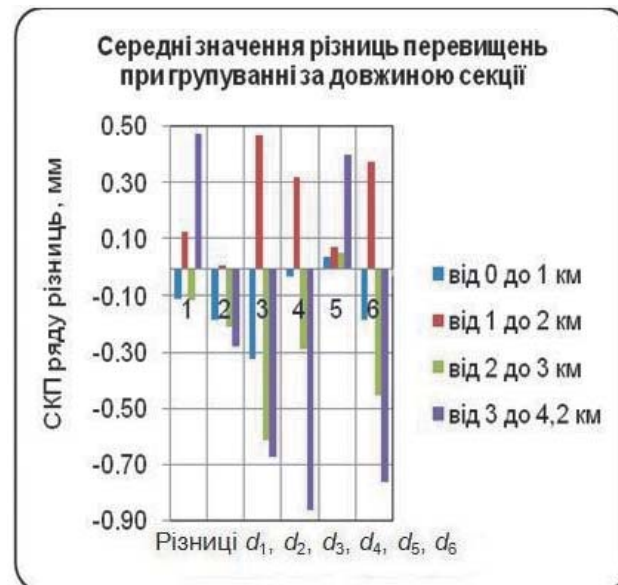
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Висновки. 1. Саме ряди різниць d_5 дають найкращі значення СКП окремих різниць як при сортуванні за кількістю штативів, так і при сортуванні за довжиною секцій. 2. Середні значення різниць d_5 також свідчать, що найкращі результати дає сортування за довжиною секцій.

Загальні висновки. Попередні підсумки аналізу різниць перевищень високоточного нівелювання дають підстави для таких узагальнень:

- усі різниці підпадають під дію нормального закону розподілу, хоча є і відхилення;
- середні значення різниць близькі до нуля, але є незначні відхилення у різницях d_2, d_3, d_6 , що може

бути спричинено певними системними впливами;

- на 95 % можна стверджувати, що ряди різниць d_1, d_2 та d_5, d_6 мають різні дисперсії, а різниці d_3, d_4 є однорідними. Це свідчить про те, що результати правих та лівих нівелювань є надійними;

- різниця середніх значень різниць є нульовою;
- різниця d_5 , що менше нуля – 62 %, а різниць, більших за нуль – 62 %; при цьому спостерігаються найкращі показники розподілу, що видається досить дивним і свідчить, швидше за все, про збільшення величини від'ємних різниць;

- спостерігається значна кореляція, що вказує на лінійний зв'язок між рядами. Нема лінійного зв'язку між значеннями різниць та довжиною



секцій, різницями та значенням перевищення.

- абсолютні значення різниць перевищень між різницями двох рядів мають майже однакові дисперсії.

- є певна лінійна залежність між абсолютною різницею двох рядів різниць перевищень, довжиною секцій, кількістю штативів у секції та (частково) перевищеннями.

- при сортуванні різниць за кількістю штативів у секції і за довжиною секції спостерігається значна кореляція.

- характер діаграм вказує на те, що різниці d_5 мають найкращі показники.

Здобуті результати – лише перший крок на шляху до вивчення даних високоточного нівелювання, оскільки для аналізу було залучено тільки 89 різниць перевищень. Для детальнішого та об'єк-

тивного з'ясування причин впливу на величину перевищень різних факторів необхідно дослідити дані перевищень, отриманих безпосередньо на станціях нівелювання, а також використати додаткову інформацію про стан атмосфери та ґрунту.

Література

1. *Видуев, Н.Г.* Математическая обработка результатов измерений [Текст] / Н.Г. Видуев, А.Г. Григоренко. – К.: Вища шк., 1978. – 376 с.

2. *Инструкция* по вычислению нивелировок. – М.: Недра, 1971. – 107 с.

3. *Egeltoft, T.* Data analysis and adjustment in precise leveling / T. Egeltoft. – Sweden: Royal Institute of Technology, 1996. – 124 p.

Надійшла 14.12.09

* * *

КАЛЕНДАР ПОДІЙ

Назва заходу	Дата і місце проведення	Веб-сайт
Науково-практична конференція „Оронімія Українських Карпат: дослідження, упорядкування, збереження”	м. Чернівці, 18-19 березня 2010 р.	http://www.guide.cv.ua
XXIV конгрес Міжнародної федерації геодезистів (FIG)	Австралія, м. Сідней, 11-16 квітня 2010 р.	www.fig2010.com
15-та Міжнародна науково-технічна конференція „ГЕОФОРУМ-2010”	м. Львів, 22-24 квітня 2010 р.	http://www/lp.edu.ua
XIV конференція користувачів ГІС від ESRI „Інформаційні технології в управлінні територіальним розвитком”	м. Ялта, 24-28 травня 2010 р.	http://www.ecomm.kiev.ua/index.php?option=com_content&task=section&id=10&Itemid=248
58-й з'їзд німецьких картографів	Німеччина, м. Берлін та Потсдам, 8-10 червня 2010 р.	http://dkt2010.dgfk.net/
3-тя Міжнародна конференція з картографії та ГІС (регіональний симпозиум для Центральної та Східної Європи)	Болгарія, м. Несебір, 15-20 червня 2010 р.	http://www/Cartography-GIS.com
Конференція INSPIRE “INSPIRE як основа співробітництва”	Польща, м. Краків, 22-25 червня 2010 р.	http://inspire.jrc.ec.europa.eu/events/conferences/inspire_2010/contact.cfm
ІнтерКарто – ІнтерГІС – 16	Російська Федерація, м. Ростов-на-Дону, 3-4 липня 2010 р. Австрія, м. Зальцбург, 6-8 липня 2010 р.	http://www.ssc-ras.ru (Ростов-на-Дону) http://www/intercartogis.org (Зальцбург)
IV Всеукраїнська науково-практична конференція “Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку-2010” (Національне картографування-2010)	м. Київ, 30 вересня – 1 жовтня 2010 р.	http://www.ukrmap.com.ua/index.php?name=News&op=Article&sid=55
Франкфуртський книжковий ярмарок	Німеччина, м. Франкфурт-на-Майні, 6-10 жовтня 2010 р.	http://www.buchmesse.de