



ОПТИМАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ПРОЕКТНИХ ЛІНІЙ НА ПРОФІЛІ ЛІНІЙНИХ СПОРУД

Описана методика аналітичного проектування профіля лінійних споруд з дотриманням балансу земляних мас. Аналітичні залежності отримані на основі методів найменших квадратів і квадратичного програмування. Розглядається приклад проектування профіля траси дороги.

The method of analytical designing of a linear structure profile with keeping earth mass balance is described. The analytical results obtained on the basis of least-squares method and quadratic programming are presented. An example of designing a profile of a road route is given.

Під час проектування лінійних споруд, вертикального планування території тощо виникають задачі з визначення оптимального положення лінії на профілі з додержанням балансу і мінімуму площ виїмки та насипу. У практиці проектування така задача розв'язується графоаналітичним способом, коли деякі числові дані визначають графічно, а інші – аналітично. Потрібно визнати, що при нанесенні проектної лінії на профіль таким способом не вдається за один прийом задовольнити умову балансу і мінімуму площ виїмки та насипу. Тому в багатьох випадках доводиться застосовувати метод послідовних наближень, який передбачає виконання додаткових креслень і розрахунків. Перспективнішим для визначення положення проектної лінії на профілі є аналітичний спосіб, який дозволяє автоматизувати процес проектування і розрахунків.

Дослідження питання аналітичного вирівнювання профілю з додержанням балансу і мінімуму площ виїмки та насипу описані в працях [1, 2] та інших. Автор статті [1] запропонував досить складний алгоритм розв'язання задачі, що ґрунтується на методі послідовних наближень та вимагає врахування положення проектної лінії на початку профілю (виїмка або насип). У праці [2] наводяться формули для визначення проектного позначки точки на початку профілю і проектного ухилу лінії, які забезпечують мінімум суми квадратів робочих позначок, але умова балансу при цьому не витримується. Фрагментарне рішення задачі проектування профілю з дотриманням балансу розглянуто у праці [3].

У даній статті пропонується алгоритм для одностороннього визначення проектних позначок точок і ухилу прямої лінії на профілі, що задовольняє вимоги балансу і мінімуму площ виїмки та насипу.

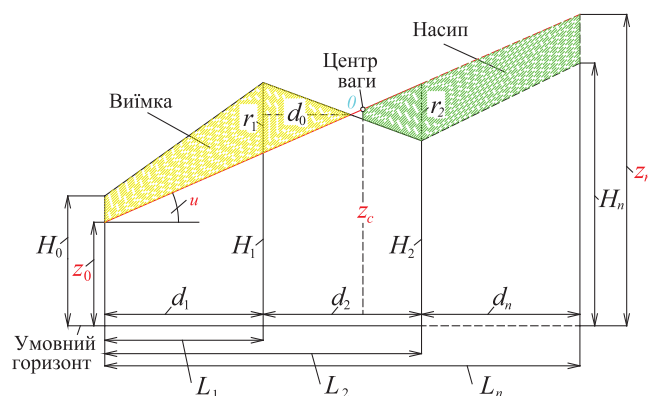
Профіль лінійної споруди, наприклад дороги, будують за результатами нівелювання точок, закріплених на місцевості по осі майбутньої лінійної споруди. Тому відстані між точками профілю і висотні позначки цих точок відомі. Задача проектування осі лінійної споруди на профілі полягає у пошуку таких проектних позначок точок та ухилу прямої лінії, які забезпечують баланс і мінімум площ виїмки та насипу. Така умова буде витримуватися, якщо площа виїмки дорівнюватиме площі насипу, а суми квадратів цих площ будуть мінімальними.

© П. І. Баран, М. П. Марущак, 2010

Для забезпечення балансу земляних мас проектною позначкою центра ваги лінії (мал. 1) можна обчислити за формулою [3]

$$Z_C = \frac{1}{2L_n} [d_1(H_0 + d_1(H_1 + H_2)) + d_2(H_2 + H_3) + \dots + d_n(H_{n-1} + H_n)] = \frac{1}{2L_n} [d_1H_0 + (d_1 + d_2)H_1 + (d_2 + d_3)H_2 + \dots + (d_{n-1} + d_n)H_{n-1} + d_nH_n], \quad (1)$$

де L_n – довжина лінії або секції; H_i – фактична позначка точок профілю; d_i – відстані між ними ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).



Мал. 1. Поздовжній профіль

Уведемо позначення ваг $p_i = d_i + d_{i+1} / 2L_n$ у формулу (1):

$$Z_C = p_0H_0 + p_1H_1 + \dots + p_nH_n. \quad (2)$$

Проектний ухил u , який забезпечує мінімум площ S виїмки та насипу, одержимо за умовою $[S^2] = \min$, а саме:

$$u = \frac{AD - BC}{AE - B^2}; \quad A = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2; \\ B = d_1^2(L_0 + L_1) + d_2^2(L_1 + L_2) + \dots + d_n^2(L_{n-1} + L_n); \\ C = d_1^2(H_0 + H_1) + d_2^2(H_1 + H_2) + \dots + d_n^2(H_{n-1} + H_n); \\ D = d_1^2(H_0 + H_1)(L_0 + L_1) + d_2^2(H_1 + H_2)(L_1 + L_2) + \dots + \\ + d_n^2(H_{n-1} + H_n)(L_{n-1} + L_n); \\ E = d_1^2(L_0 + L_1)^2 + d_2^2(L_1 + L_2)^2 + \dots + d_n^2(L_{n-1} + L_n)^2, \quad (3)$$



де L_i – пікетажне значення точки профілю; n – кількість точок на ділянці профілю.

Проектні Z та робочі r позначки інших точок профілю обчислюють за формулами

$$Z_i = Z_C + u(L_i - L_C); \quad r_i = Z_i - H_i, \quad (4)$$

де $L_C = L_n/n$ – пікетажне значення центра ваги ділянки.

Площі трапеції і трикутника виїмки та насипу на профілі обчислюють відповідно за формулами

$$S_i = d_i \frac{r_i + r_{i+1}}{2}; \quad S_i = \frac{d_i^0 r_i}{2} = \frac{d_i r_i^2}{2(r_i - r_{i+1})}, \quad (5)$$

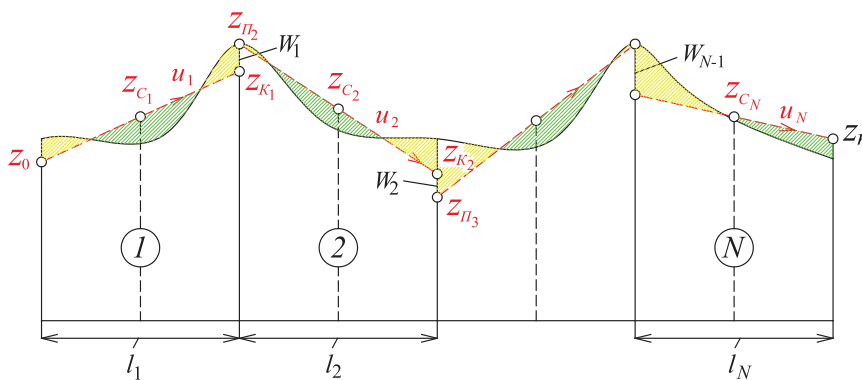
які зберігають знаки "плюс" і "мінус" відповідно для насипу та виїмки.

Відстані d_i^0 і d_{i+1}^0 від першої та другої точок до точки нульових робіт (точка перетину проектної лінії із землею поверхнею) обчислюються за формулами

$$d_i^0 = \frac{d_i r_i}{r_i - r_{i+1}}; \quad d_{i+1}^0 = \frac{-d_i r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}}. \quad (6)$$

Зауважимо, що формули (5) і (6) алгоритмічні й працюють з дотриманням знаків робочих позначок.

Оскільки лінійні споруди мають значну протяжність, то для проектування профілю споруди ділять на секції з приблизно однаковими ухилами (мал. 2), обчислюють проектні позначки центрів ваги секцій $Z_{C_1}, Z_{C_2}, \dots, Z_{C_N}$ ($j=1, 2, \dots, N$), визначають за формулою (3) ухили u_1, u_2, \dots, u_N для кожної секції окремо, а потім корегують їх для забезпечення стикування ліній на межах секцій. У процесі корегування ухилів проектних ліній позначки центрів ваги не змінюються, щоб не порушити умови балансу земляних робіт.



Мал. 2. Проектування профілю по секціях

Для визначення поправок до ухилів треба скласти систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}l_2\varepsilon_2 - W_{12} &= 0; \\ \frac{1}{2}l_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}l_3\varepsilon_3 - W_{23} &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}l_j\varepsilon_j + \frac{1}{2}l_{j+1}\varepsilon_{j+1} - W_{j,j+1} &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}l_{N-1}\varepsilon_{N-1} + \frac{1}{2}l_N\varepsilon_N - W_{N-1,N} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

і розв'язати її методом найменших квадратів (МНК). У формулах позначено: ε_i – поправки до ухилів; N – кількість секцій; $W_{j,j+1}$ – різниця проектних позначок стикових точок суміжних секцій; l_j – довжина секцій.

Величину $W_{j,j+1}$ можна обчислити за формулою

$$W_{j,j+1} = (Z_{C_{j+1}} - Z_{C_j}) - \frac{1}{2}(l_j u_j + l_{j+1} u_{j+1}). \quad (8)$$

Якщо трасу поділено на дві секції, то поправки будуть:

$$\varepsilon_1 = \frac{2l_1 W_{12}}{l_1^2 + l_2^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{2l_2 W_{12}}{l_1^2 + l_2^2}, \quad (9)$$

а якщо на три, то:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2l_1[W_{12}(l_2^2 + l_3^2) - W_{23}l_2^2]}{l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{2l_2(W_{12}l_3^2 + W_{23}l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{2l_3[W_{23}(l_1^2 + l_2^2) - W_{12}l_2^2]}{l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ухили проектних ліній виправляють за таким виразом:

$$U_j = u_j + \varepsilon_j. \quad (11)$$

Після цього обчислюють проектні висотні позначки усіх точок профілю за формулою (4).

Для прикладу розглянемо поздовжній профіль траси (мал. 3), на якому потрібно спроектувати пряму із забезпеченням балансу і мінімуму площ виїмки та насипу.

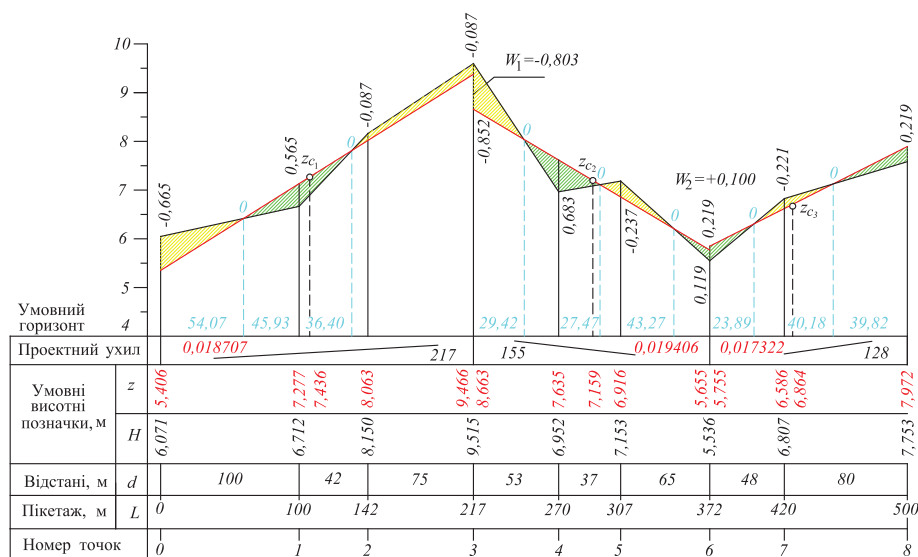
Трасу поділено на три секції завдовжки 217, 155 і 128 м. Проектні висотні позначки центрів ваги секцій будуть такими:

$$\begin{aligned} Z_{C_1} &= \frac{1}{2 \cdot 217} [100(6,071 + 6,712) + 42(6,712 + 8,150) + 75(8,150 + 9,515)] = 7,436 \text{ м}; \\ Z_{C_2} &= \frac{1}{2 \cdot 155} [53(9,515 + 6,952) + 37(6,952 + 7,153) + 65(7,153 + 5,536)] = 7,159 \text{ м}; \\ Z_{C_3} &= \frac{1}{2 \cdot 128} [48(5,536 + 6,807) + 80(6,807 + 7,753)] = 6,864 \text{ м}; \end{aligned}$$

Величини A, B, C, D, E при їх зменшенні в 1000 раз становитимуть:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1,7389; B_1 = 344,6263; C_1 = 25,3356; \\ D_1 &= 5479,9669; E_1 = 92896,2521; \\ A_2 &= 0,8403; B_2 = 137,9769; C_2 = 11,9177; \\ D_2 &= 1834,7552; E_2 = 28949,0787; \\ A_3 &= 0,8704; B_3 = 123,6992; C_3 = 12,1622; \\ D_3 &= 1776,5421; E_3 = 20355,4816. \end{aligned}$$

Підставивши значення A, B, C, D, E у формулу (3), одержимо ухили проектних ліній у секціях:



Мал. 3. Профіль траси із трьох секцій

$$u_1 = \frac{1,7389 \cdot 5479,9669 - 344,6263 \cdot 25,3356}{1,7389 \cdot 92896,2532 - 344,6263^2} = 0,018707;$$

$$u_2 = \frac{0,8403 \cdot 1834,7552 - 137,9769 \cdot 11,9177}{0,8403 \cdot 28949,0787 - 137,9769^2} = -0,019406;$$

$$u_3 = \frac{0,8704 \cdot 1776,5421 - 123,6992 \cdot 12,1622}{0,8704 \cdot 20355,4816 - 123,6992^2} = 0,017322.$$

Проектні позначки точок профілю, які обчислені за формулою (4), виписані на профіль. Різниця позначок кінцевої і початкової точок проектних ліній становитиме:

$$W_{12} = 7,159 - 7,436 - \frac{1}{2}(217 \cdot 0,018707 - 155 \cdot 0,019406) = -0,803 \text{ м};$$

$$W_{23} = 6,864 - 7,159 - \frac{1}{2}(-155 \cdot 0,019406 + 128 \cdot 0,017322) = 0,100 \text{ м}.$$

Поправки в ухили, розраховані за формулами (10), будуть такими:

$$\varepsilon_1 = -0,006586; \quad \varepsilon_2 = -0,001140; \quad \varepsilon_3 = 0,002943.$$

Виправлені ухили ліній:

$$U_1 = 0,018707 + (-0,006586) = 0,012121;$$

$$U_2 = -0,019406 + (-0,001140) = -0,020546;$$

$$U_3 = 0,017322 + 0,002943 = 0,020265.$$

Проектні позначки стикових точок 3 і 6 двох секцій дорівнюють:

$$Z_3' = 7,436 + 0,012121 \cdot 217 / 2 = 8,751 \text{ м};$$

$$Z_3'' = 7,159 + 0,020546 \cdot 155 / 2 = 8,751 \text{ м};$$

$$Z_6' = 7,159 + (-0,020546 \cdot 155 / 2) = 5,567 \text{ м};$$

$$Z_6'' = 6,864 + (-0,020265) \cdot 128 / 2 = 5,567 \text{ м}.$$

Збіжність позначок стикових точок свідчить, що корегування ухилів правильне. Обчислені за виправленими ухилами проектні й робочі позначки усіх точок профілю показано на мал. 4.

Для контролю обчислення робочих позначок використовуються ваги p_i формули (2), а саме:

$$[pr] = \frac{1}{1000} \{100 \cdot 0,050 + 142 \cdot 0,621 + 90 \cdot 0,710 + 113 \cdot 0,031 + 80 \cdot 0,408\} - [117 \cdot 0,308 + 128 \cdot 0,764 + 102 \cdot 0,251 + 128 \cdot 0,267] = 0,1932 - 0,1936 = -0,0004 \text{ м}.$$

Середня абсолютна робоча позначка дорівнює 0,379 м, сума робочих позначок $[r] = 0,230$ м, а сума їх квадратів 1,873 м. Обчислені за формулами (5) площі насипу і виїмки становлять: $\sum S_{\text{внм}} = 71,2$ м², $\sum S_{\text{нас}} = 71,2$ м², які свідчать про баланс земляних робіт.

Подібну задачу можна розв'язати, застосовуючи метод квадратичного програмування (МКП). За цим методом проектні і робочі позначки будь-якої точки профілю визначаються за формулами

$$Z_{ji} = Z_{Cj} + (L_i - L_{Cj})U_j;$$

$$r_{ji} = Z_{Cj} + (L_i - L_{Cj})U_j - H_i. \quad (12)$$

Умова стикування проектних ліній сусідніх секцій має вигляд:

$$Z_{Cj} + (L_i - L_{Cj})U_j = Z_{C_{j+1}} + (L_i - L_{C_{j+1}})U_{j+1}$$

або

$$(L_i - L_{C_{j+1}})U_{j+1} - (L_i - L_{Cj})U_j + Z_{C_{j+1}} - Z_{Cj} = 0. \quad (13)$$

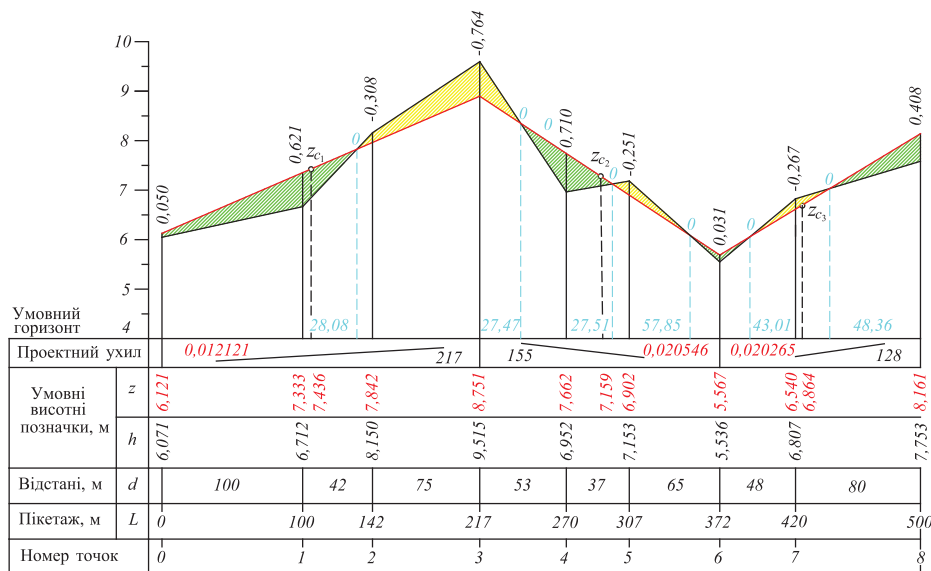
Обмеження (13) складаються для $(N-1)$ секцій профілю. В разі потреби до них приєднуються обмеження на стикування проектних ліній на початку та в кінці траси: $r_0 = 0$ і $r_n = 0$ або одне із них, з меншою робочою позначкою.

Крім того, для отримання значень ухилів секцій, які б не перевищували максимально допустимого значення ухилу U_m для даної категорії споруди (автошляху, залізниці, трубопроводу самопливної каналізації тощо), використовуються обмеження

$$\text{Abs}(U_j) \leq U_m \text{ або } \text{Abs}(U_j) - U_m \leq 0, \quad (14)$$

як це прийнято в електронних таблицях Excel (програма Solver-Пошук розв'язку).

Для ілюстрування цього методу нижче подано розв'язок задачі для наведеного вище прикладу із трьох секцій профілю з використанням системи рівнянь поправок (робочих позначок):



Мал. 4. Виправлений профіль траси

кінці траси. Але теоретично останні дві вимоги для r_0 і r_N не завжди можуть бути одночасно виконані без зміни позначок центрів ваги (а практично, без порушення балансу земляних робіт – діє правило "коромисла"). Тому спочатку доцільніше розв'язати задачу окремо без цих обмежень, і після аналізу розв'язку скорегувати положення кінцевих профільних ліній з фактичними позначками кінцевих точок траси.

Приклад розв'язування задачі в Excel з мінімізацією суми квадратів робочих позначок (функція мети – $F = \sum_{i=0}^8 r_i^2 = \min$) наведено у таблиці.

$$\begin{aligned} -108,5U_1 + ZC_1 - h_0 &= r_0; \\ -8,5U_1 + ZC_1 - h_1 &= r_1; \\ -33,5U_1 + ZC_1 - h_2 &= r_2; \\ 108,5U_1 + ZC_1 - h_3 &= r_3; \quad -77,5U_2 + ZC_2 - h_3 = r_3; \\ -24,5U_2 + ZC_2 - h_4 &= r_4; \\ 12,5U_2 + ZC_2 - h_5 &= r_5; \\ 77,5U_2 + ZC_2 - h_6 &= r_6; \quad -64,0U_3 + ZC_3 - h_6 = r_6; \\ -16,0U_3 + ZC_3 - h_7 &= r_7; \\ 16,0U_1 + ZC_3 - h_8 &= r_8, \end{aligned}$$

які після підстановки позначок центрів ваги і фактичних позначок точок рельєфу матимуть такий робочий вигляд:

$$\begin{aligned} -108,5U_1 + 1,365 &= r_0; \\ -8,5U_1 + 0,724 &= r_1; \\ 33,5U_1 - 0,714 &= r_2; \\ 108,5U_1 - 2,079 &= r_3; \quad -77,5U_2 - 2,356 = r_3; \\ -24,5U_2 + 0,207 &= r_4; \\ 12,5U_2 + 0,006 &= r_5; \\ 77,5U_2 + 1,623 &= r_6; \quad -64U_3 + 1,328 = r_6; \\ -16,0U_3 + 0,057 &= r_7; \\ 16,0U_3 - 0,889 &= r_8. \end{aligned}$$

Запис двох формул робочих позначок дається для 3-ї і 6-ї точок стикування ліній профілю. Оскільки теоретично значення цих позначок мають збігатися, то для розв'язування задачі накладаємо обмеження на різницю робочих позначок r_3 і r_6 , а саме:

$$\begin{aligned} 108,5U_1 + 77,5U_2 + 0,277 &= 0; \\ 77,5U_2 + 64U_3 + 0,295 &= 0, \end{aligned}$$

до яких приєднуються ще два обмеження на величини $r_0=0$ і $r_8=0$ для збігання проектних і фактичних позначок профільної лінії на початку та в

Проектування профілю траси методом квадратичного програмування

Номер точки	Пікетаж L, м	Позначки h, м	Центр ваги секції		Ухили U	Позначки Z, м	Позначки r, м	
			L, м	Z _c , м			точок	стиків
0	0	6,071	-	-	-	6,071	0	-
1	100	6,712	108,5	7,436	0,012581	7,329	0,617	-
2	142	8,150	-	-	-	7,857	-0,292	-
3	217	9,515	-	-	-	8,801	-0,714	-0,714
4	270	6,052	294,5	7,159	-0,02119	7,678	0,726	-
5	307	7,153	-	-	-	6,894	-0,259	-
6	372	5,536	-	-	-	5,517	-0,019	-0,019
7	420	6,807	436	6,864	0,021047	6,525	-0,282	-
8	500	7,753	-	-	-	8,211	0,458	-

При цьому використано три обмеження: два – на стикування проектних ліній профілю в точках 3 і 6 та одне – на проходження проектної лінії через точку початку траси. Середня абсолютна робоча позначка становить 0,374 м, сума робочих позначок $[r]=0,235$ м (можливе обмеження на їх суму не використовувалося, щоби обмеженням на величину $r_0=0$ забезпечувалася вимога балансу), а сума їх квадратів – 1,860 м. Контрольна сума вагових робочих позначок $[pr]=0,1895-0,1900=-0,005$ м, яка практично не відрізняється від розв'язку за МНК. Розбіжності в ухилах ділянок, проектних і робочих позначок виявилися незначними. До речі, якщо поряд з обмеженнями на стикування профільних ділянок поставити третю вимогу: $[r]=0$, то значення робочих позначок змінюються від -1,97 до 1,24 м при істотній зміні суми їх квадратів (до 8,84 м²), але при цьому отримуються малі ухили ($u_1=0,000988$; $u_2=-0,004960$; $u_3=0,001393$).

Таким чином, запропонований алгоритм побудовано зі строгим дотриманням вимог щодо нульового балансу і мінімуму площ виїмки та насипу, що дає змогу використовувати його для аналітичного проектування профілю лінійних споруд, благоустрою



територій тощо. Очевидно, що в практиці варто надавати перевагу МКП, який дозволяє вести варіантне проектування. Тому його доцільно впроваджувати у навчальний процес і в програмні продукти типу AutoCAD.

Література

1. *Болотин, А.И.* Выравнивание профиля с обеспечением нулевого баланса и минимума площадей выемок и насыпей [Текст] / А.И.Болотин // Геодезия и фотограмметрия при мелиоративном строительстве: межвуз. науч.-темат. сб. – Новочеркасск: НИМИ, 1981. – С. 40-45.
2. *Коробочкин, М.И.* Алгоритмы и программы оптимального проектирования вертикальной планировки на ЭВМ [Текст] / М.И.Коробочкин. – М.: МИИЗ, 1973. – 107 с.
3. *Справочник по инженерной геодезии* [Текст] / П.И.Баран, Н.Г.Видуев, С.П. Войтенко [и др.] – К.: Вища шк., 1978. – 376 с.

Надійшла 05.08.10

* * *

До уваги авторів

1. Матеріали до "Вісника геодезії та картографії" подаються у текстовому редакторі Microsoft Word з дотриманням таких вимог: параметри сторінки А4; всі поля на сторінці по 2 см; розмір шрифту 10 пт; інтервал одинарний; автоматичні переноси не застосовувати; абзац починати за допомогою клавіші "ENTER".

2. Формули набираються у редакторі формул програми Microsoft Word. Розміри шрифту для формул: звичайний – 10 пт, великий індекс – 7 пт, малий індекс – 6 пт, великий символ – 11 пт, малий символ – 8 пт. **Ширина формули не повинна перевищувати 8 см.**

3. Малюнки, фото та схеми подаються **окремими файлами у графічному вигляді** у форматах *.eps (векторний), *.tif (растровий) з роздільною здатністю не менше 300 dpi, в моделі СМУК. Графічні зображення, вставлені в Microsoft Word або в інші редактори, **не приймаються!**

4. Розмірність малюнків і таблиць (ширина/висота): 80 / до 230 мм, 130 / 230 мм, 170 / до 230 мм. Розмір шрифту для таблиць – 10 пт. Кожна таблиця повинна мати заголовок.

5. До статті мають входити такі елементи: шифр УДК; резюме українською, російською та англійською мовами; основний текст відповідно до вимог ВАК України; список літератури, укладений за правилами стандартів і в алфавітному порядку; назва установи, де працює (вчиться) автор; відомості про авторів (**прізвище, повне ім'я та по батькові**, вчений ступінь, вчене звання, домашня і службова адреси, **телефон, електронна пошта**, інтернет-сторінка для зв'язку).

6. Стаття і додатки подаються на компакт-диску. Роздрукування матеріалів виконується через два інтервали.

Редакція