УДК 528.48

О. М. Самойленко

ВИЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРОВОГО ПОЛОЖЕННЯ ТА ОРІЄНТАЦІЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА КООРДИНАТНИМ ПЛОЩИННИМ І ТРЕКОВИМ МЕТОДАМИ

Описываются разработанные автором методы, позволяющие по координатам закрепленных на динамическом объекте точек, вычисленным по результатам геодезических измерений при различных положениях объекта, определить пространственное положение и ориентацию его оси вращения по методу наименьших квадратов и оценить точность этого определения.

The paper deals with the author's methods that allow to determine spatial position and orientation of the rotation axis of a dynamic object on the basis of coordinates of points fixed on the object calculated according to the results of geodetic measurements made at different positions of the object by least squares method. The accuracy of the methods is evaluated.

Постановка проблеми. Багато інженерних об'єктів за своїм функціональним призначенням мають частини, що обертаються. Існує практична потреба у визначенні геометричних параметрів цих об'єктів, а саме просторового положення та орієнтування їхніх осей обертання. Для цього необхідно розробити спеціальні геодезичні методи вимірювань, а також методи опрацювання результатів.

Зв'язок теми з важливими науковими та практичними завданнями. До динамічних об'єктів, що мають осі обертання, відносять обертові печі, вагоноперекидачі, вали паперо- та картоноробних машин, прокатних станів, машин безперервного розливання сталі, радіотелескопи і станції лазерної локації (СЛЛ) штучних супутників Землі. Визначення просторового положення та орієнтування їхніх осей дозволяє одержати всі взаємопов'язані геометричні параметри з точністю, достатньою для безпечного та ефективного функціонування об'єктів. Для радіотелескопів та СЛЛ це дає змогу провести локальну геодезичну прив'язку їхніх реперних точок до GPS-маркерів та визначити геометричні параметри математичної моделі їх наведення на світила і супутники, а також зміни у часі.

Аналіз досліджень та публікацій на дану тему. Методику визначення просторового положення та орієнтування осі обертання динамічного об'єкта автор запропонував ще у 1985 р. [1] для станцій лазерної локації та у 1994 р. [2] для радіотелескопа РТ-22. Пізніше її було розвинуто у працях [3-9].

Трек (траєкторія) точки, яка рухається довкола осі обертання, скажімо, радіотелескопа, інтерпретується як такий, що лежить на перетині площини та сфери (див., наприклад, публікації [10-12]). У статті [5] описується координатний трековий метод. Для вирішення задачі апроксимації колом застосовується стандартне програмне забезпечення для вирівнювання горизонтальних геодезичних мереж методом найменших квадратів (МНК) разом з вирівнюванням самої мережі.

Невирішені частини загальної проблеми. Досі не сформовано загальних принципів оброблення результатів вимірювань при визначенні просторового положення та орієнтування осей обертання динамічних об'єктів координатним площинним та координатним трековим методами. Не розроблено методики опрацювання результатів вимірювань для випадку, коли трек точки лежить у місці перетину площини та циліндра, а рух декількох точок, що обертаються довкола однієї осі, описується вкладеними циліндрами. Не досліджено також питання оцінювання точності геометричних параметрів після оброблення даних.

Постановка завдання: розробити строгу, як цього вимагає метод найменших квадратів, методику опрацювання результатів вимірювань в ході визначення просторового положення та орієнтування осей обертання динамічних об'єктів для довільної кількості треків точок, які лежать у різних площинах, сумісно координатним площинним і координатним трековим методами, а також методику оцінювання точності визначуваних геометричних параметрів.

Виклад основного матеріалу дослідження. ***1. Обчислення просторового положення та орієнтування осі обертання динамічного об'єкта координатним площинним і трековим методами з використанням рівняння площини та сфер з одним центром.***

Розділимо геометричні параметри осей обертання динамічних об'єктів на три групи:

- просторове орієнтування осі – це її зенітний кут та азимут;
- просторове положення осі – це координати будь-якої точки на ній;
- інші геометричні параметри – биття (коливання) осі тощо.

Просторове орієнтування площини визначають координатним площинним методом за координатами точок, які лежать на цій площині. Якщо площина описується треком точки при обертанні осі, то просторове орієнтування цієї площини є одночасно і просторовим орієнтуванням осі обертання.

Координатний трековий метод полягає у визначенні просторового положення точки на осі обертання як центра кола, яке утворює точка під час руху довкола осі.

Обидва методи можуть застосовуватись кожен окремо, але найефективніше їх сумісне використання. Тим більше, що для визначення і просторового положення, і просторового орієнтування застосовуються ті самі координати точок треку.

Визначувані геометричні параметри та виміряні величини пов'язані між собою рівняннями, які випливають з рівняння площини, перпендикулярної до осі обертання, та рівняння сфери з центром у центрі треку в просторовій прямокутній системі координат:

$$x_{ij}\cos A_F\sin z_F + y_{ij}\sin A_F\sin z_F + z_{ij}\cos z_F - p_j = 0;$$
$$\sqrt{(x_{ij}-x_0)^2+(y_{ij}-y_0)^2+(z_{ij}-z_0)^2} - R_j = 0, \qquad (1)$$

де x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} – визначені в процесі вимірювань координати точок, що належать до площини та сфери одночасно, тобто це координати точок треку з номером i марки з номером j.

Визначуваними геометричними параметрами просторового орієнтування осі обертання динамічного об'єкта є: A_F – азимут (дирекційний кут) проекції осі обертання об'єкта на горизонтальну площину; z_F – зенітна відстань осі обертання об'єкта; p_j – найкоротша відстань від початку координат до паралельної площини з номером j, в якій лежать координати треку точки.

Визначуваними геометричними параметрами просторового положення осі обертання динамічного об'єкта є: x_0, y_0, z_0, – координати центра сфери та R_j – радіус сфери з номером j.

Таких пар рівнянь можна скласти стільки, скільки визначено координат точок. Кожний трек точки утворює одну площину зі своїм параметром p_j та одну сферу зі своїм радіусом R_j. У випадках, коли треки лежать у близьких паралельних площинах, центри сфер для треків декількох марок можна прийняти суміщеними. Якщо вони рознесені по осі на певну відстань, координати кожного центра визначаються окремо.

Коефіцієнти параметричних рівнянь поправок одержують частковим диференціюванням рівнянь зв'язку за виміряними та шуканими величинами. Виходячи з наведених вище рівнянь, для кожної точки (тріади вимірювань) параметричні рівняння поправок набувають такого вигляду:

$$u_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11ij}a_{12ij}a_{13ij} \\ a_{21ij}a_{22ij}a_{23ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{x_{ij}} \\ v_{y_{ij}} \\ v_{z_{ij}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11ij}b_{12ij}b_{13ij}b_{14ij}b_{15ij}b_{16ij}b_{17ij} \\ b_{21ij}b_{22ij}b_{23ij}b_{24ij}b_{25ij}b_{26ij}b_{27ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta p_j \\ \delta R_j \\ \delta A_F \\ \delta z_F \\ \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{1ij} \\ l_{2ij} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

де u_{ij} – радіальне відхилення, що є найкоротшою відстанню від точки, координати якої визначені до кола, яке лежить на перетині площини та сфери.

Позначимо:

$$\begin{vmatrix} a_{11ij}a_{12ij}a_{13ij} \end{vmatrix} = A_{1ij}; \quad \begin{vmatrix} a_{21ij}a_{22ij}a_{23ij} \end{vmatrix} = A_{2ij};$$
$$b_{11ij} = -1; \quad b_{12ij} = 0; \quad \begin{vmatrix} b_{13ij}b_{14ij} \end{vmatrix} = B_{1ij}; \quad \begin{vmatrix} b_{15ij}b_{16ij}b_{17ij} \end{vmatrix} = 0;$$
$$b_{21ij} = 0; \quad b_{22ij} = -1; \quad \begin{vmatrix} b_{23ij}b_{24ij} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} b_{25ij}b_{26ij}b_{27ij} \end{vmatrix} = B_{2ij}.$$

Вільні члени рівнянь поправок одержуємо за формулами

$$l_{1ij} = x_{ij}\cos A_F{}^0\sin z_F{}^0 + y_{ij}\sin A_F{}^0\sin z_F{}^0 + z_{ij}\cos z_F{}^0 - p_j{}^0;$$
$$l_{2ij} = \sqrt{(x_{ij}-x_0^0)^2+(y_{ij}-y_0^0)^2+(z_{ij}-z_0^0)^2} - R_j{}^0, \qquad (3)$$

де A_F^0, z_F^0, p_j^0, x_0^0, y_0^0, z_0^0, R_j^0 – наближені значення визначуваних параметрів.

Запишемо систему рівнянь поправок у загальному матричному вигляді:

$$U = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \cdot V = \begin{vmatrix} -E & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & -E & 0 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta p \\ \delta R \\ \delta A \\ \delta x_{\overline{0}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

У цій формулі

$$A_1 = \begin{vmatrix} A_{1i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1i2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1ik} \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} A_{2i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2i2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{2ik} \end{vmatrix};$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} B_{1i1} \\ B_{1i2} \\ \dots \\ B_{1ij} \\ \dots \\ B_{1ik} \end{vmatrix}; \quad B_2 = \begin{vmatrix} B_{2i1} \\ B_{2i2} \\ \dots \\ B_{2ij} \\ \dots \\ B_{2ik} \end{vmatrix}; \quad \delta p = \begin{vmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \dots \\ \delta p_j \\ \dots \\ \delta p_k \end{vmatrix}; \quad \delta R = \begin{vmatrix} \delta R_1 \\ \delta R_2 \\ \dots \\ \delta R_j \\ \dots \\ \delta R_k \end{vmatrix};$$

$$\delta A = \begin{vmatrix} \delta A_F \\ \delta z_F \end{vmatrix}; \quad \delta x_{\overline{0}} = \begin{vmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Зворотна вага радіального відхилення u_{ij} дорівнює:

$$P_{u_{ij}}^{-1} = Q_{u_{ij}} = \begin{vmatrix} a_{11ij}a_{12ij}a_{13ij} \\ a_{21ij}a_{22ij}a_{23ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{x_{ij}} K_{x_{ij}y_{ij}} K_{x_{ij}z_{ij}} \\ K_{y_{ij}x_{ij}} q_{y_{ij}} K_{y_{ij}z_{ij}} \\ K_{z_{ij}x_{ij}} K_{z_{ij}y_{ij}} q_{z_{ij}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11ij}a_{21ij} \\ a_{12ij}a_{22ij} \\ a_{13ij}a_{23ij} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{1ij} \\ A_{2ij} \end{vmatrix} q_{xyz} \begin{vmatrix} A_{1ij}^T & A_{2ij}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1ij}q_{xyz}A_{1ij}^T & A_{1ij}q_{xyz}A_{2ij}^T \\ A_{2ij}q_{xyz}A_{1ij}^T & A_{2ij}q_{xyz}A_{2ij}^T \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

де q_{xyz} – кореляційна матриця координат, наведена в праці [8], виходячи з того, що координати не є прямо виміряні величини. Їх одержують опосередковано за кутовими та лінійними вимірюваннями, тому вони можуть вважатися виміряними умовно для цієї конкретної задачі.

Після обернення матриці (6) матрицю ваг для окремої точки можна подати у вигляді:

$$P_{u_{ij}} = \begin{vmatrix} P_{u_{ij}11} & P_{u_{ij}12} \\ P_{u_{ij}21} & P_{u_{ij}22} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Матрицю нормальних рівнянь N та вільний член нормальних рівнянь L одержуємо додаванням окремих матриць, що складаються для кожної тріади виміряних величин (координат точок):

$$N = \begin{vmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \\ B_1^T & 0 \\ 0 & B_2^T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{u11} & P_{u12} \\ P_{u21} & P_{u22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -E & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & -E & 0 & B_2 \end{vmatrix};$$

$$L = \begin{vmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \\ B_1^T & 0 \\ 0 & B_2^T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{u11} & P_{u12} \\ P_{u21} & P_{u22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Після цього система нормальних рівнянь набуде відомого вигляду:

$$\begin{vmatrix} P_{u11} & P_{u12} & -B_1^T P_{u11} & -B_1^T P_{u12} \\ P_{u21} & P_{u22} & -B_2^T P_{u21} & -B_2^T P_{u22} \\ -P_{u11}B_1 & -P_{u12}B_2 & B_1^T P_{u11} B_1 & B_1^T P_{u12} B_2 \\ -P_{u21}B_1 & -P_{u22}B_2 & B_2^T P_{u21} B_1 & B_2^T P_{u22} B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta p \\ \delta R \\ \delta A \\ \delta x_{\overline{0}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -(P_{u11}l_1 + P_{u12}l_2) \\ -(P_{u21}l_1 + P_{u22}l_2) \\ B_1^T (P_{u11}l_1 + P_{u12}l_2) \\ B_2^T (P_{u21}l_1 + P_{u22}l_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

У свою чергу систему (9) можна передати у блочній формі:

$$\begin{vmatrix} P_u & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Використовуючи узагальнений алгоритм Ґаусса, обчислення можна дещо спростити:

$$[N_{22} \cdot 1] = N_{22} - N_{21} P_u^{-1} N_{12} = N_{22} - N_{21} Q_u N_{12};$$
$$[L_2 \cdot 1] = L_2 - N_{21} P_u^{-1} L_1 = L_{22} - N_{21} Q_u L_1, \quad (11)$$

де Q_u розраховується за формулою (6).

Таким чином, зменшується кількість обчислень при складанні та вирішенні нормальних рівнянь. Невідомі поправки до наближених значень геометричних параметрів знаходимо за формулами

$$\delta A \delta x_0 = -[N_{22} \cdot 1]^{-1} \cdot [L_2 \cdot 1];$$
$$\delta p \delta R = -Q_u N_{12} \cdot \delta A \delta x_0 - Q_u L_1, \quad (12)$$

де $\delta A \delta x_0 = \begin{vmatrix} \delta A \\ \delta x_0 \end{vmatrix}$; $\delta p \delta R = \begin{vmatrix} \delta p \\ \delta R \end{vmatrix}$.

2. Обчислення просторового положення та орієнтування осі обертання динамічного об'єкта координатним площинним і трековим методами через рівняння паралельних площин та сфер з різними центрами. Описаний у п. 1 метод обчислень можна застосовувати, якщо треки декількох точок лежать приблизно в одній площині. Наскільки точки можуть відхилятися від цієї площини – окрема тема. Загалом, коли площини треків лежать далеко одна від одної або у випадку, коли за координатами точок треків обчислюються координати декількох точок на осі обертання, друге вихідне рівняння (1) записується:

$$\sqrt{(x_{ij} - x_{0j})^2 + (y_{ij} - y_{0j})^2 + (z_{ij} - z_{0j})^2} - R_j = 0, \quad (13)$$

де x_{0j}, y_{0j}, z_{0j} – координати центра сфери з номером j; R_j, – радіус сфери з номером j.

Система рівнянь поправок у загальному матричному вигляді для випадку, коли за координатами точок треків обчислюються координати декількох точок на осі обертання, має таку саму структуру за винятком двох блоків:

$$B_2 = \begin{vmatrix} B_{2i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2i2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{2ik} \end{vmatrix}; \quad \delta x_{\overline{0}} = \begin{vmatrix} \delta x_{01} \\ \delta x_{02} \\ \\ \delta x_{0j} \\ \\ \delta x_{0k} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

3. Обчислення просторового положення та орієнтування осі обертання динамічного об'єкта координатним площинним і трековим методами за рівнянням паралельних площин та вкладених циліндрів. Для випадку, коли вісь обертання об'єкта близька до вертикалі чи горизонталі, для обчислень можна застосувати інший підхід: замість рівняння сфери для апроксимації треків використати рівняння вкладених циліндрів. При цьому рівнянь паралельних площин буде стільки, скільки було треків.

Визначувані геометричні параметри та виміряні величини пов'язані між собою залежностями, які випливають з рівняння площини, перпендикулярної до осі обертання, та рівняння циліндра, вісь якого збігається з віссю обертання у центрі треку в просторовій прямокутній системі координат:

$$x_{ij}\eta_x + y_{ij}\eta_y + z_{ij} - p_j = 0;$$
$$\sqrt{(x_{ij} - x_0 - \eta_x(z_{ij} - z_0))^2 + (y_{ij} - y_0 - \eta_y(z_{ij} - z_0))^2} - R_j = 0, \quad (15)$$

де x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} – визначені при вимірюваннях координати точок, що належать площині та циліндру одночасно, тобто це координати точок треку з номером i марки з номером j.

Визначуваними геометричними параметрами просторового орієнтування осі обертання динамічного об'єкта є: η_x, η_y – тангенси проекцій кута нахилу осі обертання на координатні площини xH та yH; p_j – найкоротша відстань від початку координат до паралельної площини з номером j, в якій лежать координати треку точки. Визначуваними геометричними параметрами просторового положення осі обертання динамічного об'єкта є: x_0, y_0 –

координати точки, яка умовно прийнята за центр циліндра на висоті z_0 (тут z_0 задається, а не визначається); R_j – радіус циліндра з номером j.

Таких пар рівнянь складається стільки, скільки визначено координат точок. Кожний трек точки породжує одну площину зі своїм параметром p_j та один циліндр з радіусом R_j.

Коефіцієнти рівнянь поправок одержуємо частковим диференціюванням рівнянь зв'язку (15) за виміряними й шуканими величинами. Виходячи з наведених вище рівнянь, для цього випадку і для кожної точки (тріади вимірювань) рівняння поправок зрештою набуває вигляду:

$$u_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11ij} a_{12ij} a_{13ij} \\ a_{21ij} a_{22ij} a_{23ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{x_{ij}} \\ v_{y_{ij}} \\ v_{z_{ij}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11ij} b_{12ij} b_{13ij} b_{14ij} b_{15ij} b_{16ij} \\ b_{21ij} b_{22ij} b_{23ij} b_{24ij} b_{25ij} b_{26ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta p_j \\ \delta\eta_x \\ \delta\eta_y \\ \delta R_j \\ \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{1ij} \\ l_{2ij} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Позначимо:

$$\begin{vmatrix} a_{11ij} a_{12ij} a_{13ij} \end{vmatrix} = A_{1ij}; \quad \begin{vmatrix} a_{21ij} a_{22ij} a_{23ij} \end{vmatrix} = A_{2ij};$$

$$b_{11ij} = -1; \quad \begin{vmatrix} b_{12ij} b_{13ij} \end{vmatrix} = B_{1ij}; \quad b_{14ij} = 0; \quad \begin{vmatrix} b_{15ij} b_{16ij} \end{vmatrix} = 0;$$

$$b_{21ij} = 0; \quad \begin{vmatrix} b_{22ij} b_{23ij} \end{vmatrix} = B_{2ij}; \quad b_{24ij} = -1; \quad \begin{vmatrix} b_{25ij} b_{26ij} \end{vmatrix} = B_{3ij}.$$

Вільні члени рівнянь поправок одержуємо за формулами

$$l_{1ij} = x_{ij}\eta_x^0 + y_{ij}\eta_y^0 + z_{ij} - p_j^0 = 0;$$

$$l_{2ij} = \sqrt{(x_{ij} - x_0^0 - \eta_x^0(z_{ij} - z_0^0))^2 + (y_{ij} - y_0^0 - \eta_y^0(z_{ij} - z_0^0))^2} -$$
$$- R_j^0 = 0, \quad (17)$$

де η_x^0, η_y^0, p_j^0, x_0^0, y_0^0, R_j^0 – наближені значення визначуваних геометричних параметрів.

Систему рівнянь поправок у загальному матричному вигляді запишемо так:

$$U = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \cdot V = \begin{vmatrix} E & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & E & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta p \\ \delta\eta_{xy} \\ \delta R \\ \delta x_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

У формулі (18) матриці A_1 та A_2 мають таку саму структуру, що й аналогічні матриці (5), а інші матриці та вектори матимуть вигляд:

$$B_1 = \begin{vmatrix} B_{1i1} \\ B_{1i2} \\ \ldots \\ B_{1ij} \\ \ldots \\ B_{1ik} \end{vmatrix}; \; B_2 = \begin{vmatrix} B_{2i1} \\ B_{2i2} \\ \ldots \\ B_{2ij} \\ \ldots \\ B_{2ik} \end{vmatrix}; \; B_3 = \begin{vmatrix} B_{3i1} \\ B_{3i2} \\ \ldots \\ B_{3ij} \\ \ldots \\ B_{3ik} \end{vmatrix}; \; \delta P = \begin{vmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \ldots \\ \delta P_j \\ \ldots \\ \delta P_k \end{vmatrix}; \; \delta R = \begin{vmatrix} \delta R_1 \\ \delta R_2 \\ \ldots \\ \delta R_j \\ \ldots \\ \delta R_k \end{vmatrix};$$

$$\delta\eta_{xy} = \begin{vmatrix} \delta\eta_x \\ \delta\eta_y \end{vmatrix}; \; \delta x_0 = \begin{vmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Зворотну вагу та вагу радіальних відхилень від циліндра u_{ij}, а також матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь і вектор вільних членів обчислюємо за формулами, аналогічними формулам (6-9).

4. Оцінювання точності результатів вимірювань та визначуваних геометричних параметрів. Після вирішення нормальних рівнянь поправки до виміряних величин, за які умовно прийняті координати точок треків, у будь-якому випадку обчислюються за формулами

$$\begin{vmatrix} v_{x_{ij}} \\ v_{y_{ij}} \\ v_{z_{ij}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{x_{ij}} K_{x_{ij}y_{ij}} K_{x_{ij}z_{ij}} \\ K_{y_{ij}x_{ij}} q_{y_{ij}} K_{y_{ij}z_{ij}} \\ K_{z_{ij}x_{ij}} K_{z_{ij}y_{ij}} q_{z_{ij}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11ij} a_{21ij} \\ a_{12ij} a_{22ij} \\ a_{13ij} a_{23ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{u_{ij}11} & P_{u_{ij}12} \\ P_{u_{ij}21} & P_{u_{ij}22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{ij1} \\ u_{ij2} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Оцінку точності вимірювань визначаємо за наведеними нижче формулами:

$$U^T P_u U = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} u_{1ij} & u_{2ij} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{u_{ij}11} & P_{u_{ij}12} \\ P_{u_{ij}21} & P_{u_{ij}22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{1ij} \\ u_{2ij} \end{vmatrix} \quad (21)$$

або

$$U^T P_u U = V^T (q_{xyz})^{-1} V =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \begin{vmatrix} v_{x_{ij}} v_{y_{ij}} v_{z_{ij}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{x_{ij}} p_{x_{ij}y_{ij}} p_{x_{ij}z_{ij}} \\ p_{y_{ij}x_{ij}} p_{y_{ij}} p_{y_{ij}z_{ij}} \\ p_{z_{ij}x_{ij}} p_{z_{ij}y_{ij}} p_{z_{ij}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{x_{ij}} \\ v_{y_{ij}} \\ v_{z_{ij}} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Середню квадратичну похибку (СКП) одиниці ваги обчислюємо за виразом

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{U^T P_u U}{N_k - K}}, \quad (23)$$

де $N_k = \sum_{j=1}^{k} n_j$ – загальна кількість точок, координати яких визначені на всіх треках; K=2k+5 – загальна кількість невідомих для випадку, описаного у п. 1; K=5k+2 – загальна кількість невідомих для випадку, описаного у п. 2, або K=2k+4 – загальна кількість невідомих для випадку, описаного у п. 3; n_j – кількість точок, координати яких визначені для кожного з треків з номером j; k – кількість треків.

СКП визначуваних геометричних параметрів для випадку, описаного в п. 1, знаходимо із залежностей

$$\sigma_{A_F} = \sigma_u \sqrt{Q_{K-4K-4}}; \quad \sigma_{z_F} = \sigma_u \sqrt{Q_{K-3K-3}};$$
$$\sigma_{x_0} = \sigma_u \sqrt{Q_{K-2K-2}}; \quad \sigma_{y_0} = \sigma_u \sqrt{Q_{K-1K-1}};$$
$$\sigma_{z_0} = \sigma_u \sqrt{Q_{KK}}, \quad (24)$$

де $Q_{K\text{-}1K\text{-}1}$, Q_{KK}, ... – діагональні члени оберненої матриці до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь N.

Для випадку, описаного в п. 2, за формулами, аналогічними виразам (24), оцінюються координати кожного центра треку, а для випадку, описаного в п. 3, σ_{z_0} не оцінюємо, бо ця координата задається.

Хоча у другому, загальному, випадку кількість рівнянь, яке треба вирішити, приблизно на 2,5·k-3 більше, ніж у першому й третьому випадках, це не становить великої складності для сучасних комп'ютерів. З практичної точки зору для коректного усереднення координат точок на осі може бути використаний як перший, так і другий або третій випадки чи їх комбінація.

Висновки та перспективи досліджень. 1. Запропоновано найбільш загальний варіант визначення просторового положення та просторового орієнтування осі обертання динамічного об'єкта координатним площинним та координатним трековим методами, які дозволяють сумісно обробляти за МНК результати спостережень будь-якої кількості точок при будь-якій кількості положень об'єкта.

2. Рівняння поправок (18), в якому треки точок апроксимуються вкладеними циліндрами та площинами, має перевагу над рівнянням поправок (4), де треки точок апроксимуються сферами та площинами, тому що рівняння (4) пов'язане тільки з виміряними величинами, якими умовно є координати точок, а рівняння (18) ще й з проекціями нахилу осі обертання на вертикальні координатні площини.

У перспективі необхідно дослідити залежність точності визначення просторового положення та орієнтування координатним площинним методом від кількості точок у треку, кількості самих треків та від їх розподілу вздовж осі обертання.

Література

1. *Самойленко, А.Н.* Определение взаимного положения двух астрономических приборов геодезическими методами [Текст] / А.Н. Самойленко, П.А. Чуланов // Інж. геод. – К.: Будівельник, 1989. – Вип. 32. – С. 83-86.
2. *Самойленко, А.Н.* Локальная геодезическая сеть на Симеизском геодинамическом полигоне [Текст] / А.Н. Самойленко. – К., 1996. – 36 с. (Препр. ГАО–96–1Р / ГАО НАН Украины).
3. *Самойленко, А.Н.* Определение геометрических параметров радиотелескопа РТ-70 геодезическими методами [Текст] / А.Н. Самойленко, В.В. Заец // Інж. геод. – К.: Будівельник, 2005. – Вып. 51. – С. 244-253.
4. *Самойленко, О.М.* Методика виконання геодезичних вимірювань при визначенні просторового положення азимутальної та кутомісної осей обертання радіотелескопу РТ-22 [Текст] / О.М. Самойленко // Інж. геод. – 2006. – Вип. 52. – С. 176-185.
5. *Самойленко, О.М.* Геодезична прив'язка радіотелескопів та станцій лазерної локації супутників до GPS-маркерів [Текст] / О.М. Самойленко // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. – Л.: Ліга-Прес, 2006. – Вип. І. – С. 46-52.
6. *Самойленко, О.М.* Результати геодезичної прив'язки радіотелескопа та станцій лазерної локації супутників до GPS-маркерів на Кримському геодинамічному полігоні "Сімеїз – Кацівелі" [Текст] / О.М. Самойленко, О.О. Хода, В.В. Заєць // Кинематика и физика небесных тел. – 2007. – Т. 23. – № 1. – С. 3-10.
7. *Самойленко, А.Н.* Определение геометрических параметров динамического объекта – радиотелескопа РТ-22 КрАО по результатам геодезических измерений в 1994, 2004 и 2008 годах [Текст] / А.Н. Самойленко // Інж. геод. – 2011. – Вип. 56. – С. 198-208.
8. *Самойленко, О.М.* Апроксимація поверхонь динамічних об'єктів сумісно з вирівнюванням результатів геодезичних вимірювань з урахуванням їх похибок та похибок вихідних даних [Текст] / О.М. Самойленко // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2011. – Вип. І. – С. 34-40.
9. *Самойленко, О.М.* Визначення просторової орієнтації осі обертання динамічного об'єкта геодезичним автоколімаційним методом [Текст] / О.М. Самойленко // Вісн. геод. та картогр. – 2011. – № 1. – С. 26-29.
10. *Sarti, P.* Surveying co-located space-geodetic instruments for ITRF computation [Text] / P. Sarti, P. Sillard, L. Vittuari // Journal of Geodesy. – 2004. – Vol. 78. – P. 210-222.
11. *Vittuari, L.* Siveying the GPS-VLBI Eccentriciti at Medicina: Methodological Aspects and Practicalities [Text] / L. Vittuari, P. Sarti, P. Sillard [at all.] // Proceedings of the IERS Workshop on site colocation. IERS Technical Note. – Paris, 2005. – No. 33. – P. 38-48.
12. *Dawson, J.* The determination of telescope and antenna invariant point (IVP) [Text] / J. Dawson, G. Johnston, B. Twilley // Proceedings of the IERS Workshop on site colocation. IERS Technical Note. – Paris, 2005. – No. 33. – P. 128-133.

Надійшла 16.10.12

* * *

УДК 528.48

П. І. Баран

ЕЛЕКТРОННИЙ РІВНЕВО-МАЯТНИКОВИЙ МЕТОД ВИМІРЮВАННЯ КРЕНІВ СПОРУД

Описывается методика организации наблюдений и обработки данных об измерении кренов сооружений, полученных с помощью электронных датчиков (уровенных или маятниковых), размещенных на разных ярусах. Для одновременного определения коэффициентов параболы аппроксимации общих изменений крена и его азимута используется метод наименьших квадратов, масштабы которых позволяют отслеживать динамику деформационного процесса.

It is described the methodology of organization of observation and processing of data on changes of buildings careens obtained with electronic pickups (level or pendulum ones) placed on different floors. For simultaneous determination of parabola coefficients of approximation of general change of the careen and its azimuth it is used least squares method that allows monitoring the dynamics of the deformation process.

Тенденція до зростання висотності споруд спонукає геодезистів до належної організації циклічних спостережень за їх вертикальністю як у процесі будівництва, так і під час експлуатації. На практиці крени визначають координатним і диференціальним методами [1]. У першому варіанті