



НОВИЙ СПОСІБ РОЗМІЩЕННЯ КЛОТОЇДИ ТА ЇЇ З'ЄДНАННЯ З НЕЗМІЩЕНОЮ КОЛОВОЮ КРИВОЮ

Предложен новый способ размещения и выбора параметров переходных кривых для автомобильных и железных дорог, обеспечивающий соединение клотоиды с круговой кривой без ее смещения, включая и образование клотоидных кривых при совмещении трассы с серединой круговой кривой, намеченной в процессе полевых изысканий.

It is offered a new method of placement and selection of the parameters of transient curves on highways and railways that provide junction of a clotoid with a circular curve without its displacement, including creation clotoid curves by matching a route with the middle circular curve planned in the process of field surveys.

У технічних умовах проектування автошляхів у деяких країнах обмежуються довжини прямих залежно від категорії дороги в інтервалі 1,5-5 км [4]. Короткі криві, розміщені між довгими прямими, значно спотворюють перспективу і плавність траси, видаються водіям як різкий поворот дороги [7]. Тому нормативні документи рекомендують розмічати трасу у формі звивистої лінії, яка вписується в рельєф і ландшафт місцевості (так зване клотоїдне проектування). Згідно з ДБН [5], перехідні криві слід влаштовувати при радіусах заокруглень, менших за 3000 м на автошляхах I категорії і 2000 м – на шляхах інших категорій.

На залізницях згідно з ДБН В.2.3-19-2008 при влаштуванні колій шириною 1520 мм встановлюються такі вимоги: мінімальна довжина прямих ділянок не регламентується, мінімальні радіуси кривих – 3000 або 4000 м на швидкісних магістралях і 2000 м або 1000 м – на лініях VI, VII категорій; мінімальні довжини перехідних кривих беруть відповідно від 300 до 20 м, а коловий інтервал між ними обов'язковий, хоча точно і не регламентований.

Згідно з ДБН В.2.3-7-2010 у метрополітенах на головних коліях радіуси кривих мають бути не менші за 600 м, довжини перехідних кривих – від 80 до 20 м, а інтервал колової кривої між перехідними – не менше 15 м.

При розплануванні криволінійних ділянок вирішують дві задачі: 1) забезпечення плавності руху завдяки компенсуванню відцентрової сили, що виникає на заокругленнях, 2) максимального наближення траси до колової кривої, на якій виконують всі польові вишукування, складають план та профіль траси, за якими виконують і будівельні роботи [1].

Плавність нарощування відцентрової сили та її компенсація відгоном віражу на автошляхах чи підвищенням зовнішньої рейки на залізничних коліях досягаються використанням перехідних кривих, з яких клотоїда забезпечує плавне зменшення радіуса p кривої від нескінченності на її початку до радіуса R в кінці.

Як відомо, в сучасній практиці вишукувань транспортних лінійних споруд у всіх випадках вибирають вершину кута (ВК) повороту траси, вимі-

рюють у ній кут ϕ і, задавшись проектним радіусом R , обчислюють або вибирають із таблиць елементи колової кривої (тангенс – T , довжину – K , бісектрису – B і домір – D). Потім за їх значеннями розмічують точки – початок (ПК), середину (СК) і кінець (КК) колової кривої. При необхідності за відомою технологією [8,2] розмічують початки (ППК₁ і ППК₂) та кінці (КПК₁ і КПК₂) перехідних кривих, а також середину вкороченої і зміщеної на величину p колової кривої.

Недолік використання клотоїди як із незміщеним, так і зміщеним центрами колової кривої, включаючи і кадїюду [3], в тому, що вкорочена колова крива повинна зміщуватися до центра з первісного положення на величину p , яку можна обчислити за формулою

$$p \approx \frac{L^2}{24R}, \quad (1)$$

де L – довжина перехідної кривої; R – проектний радіус колової кривої.

Виходячи з попередніх викладок, пропонуємо новий спосіб розміщення і розмічування криволінійної ділянки траси з використанням клотоїд, які з'єднуються з коловою кривою траси або між собою без зміщення p , тобто :

1) при $p=0$ – для криволінійної ділянки з двох клотоїд та роздільної і незміщеної колової кривої;

2) при $p=0$ – для криволінійної ділянки з двох з'єднаних між собою клотоїд у точці СК – в середині незміщеної колової кривої.

Розглянемо **випадок розміщення двох клотоїд з роздільною коловою кривою**. Для визначення положення клотоїди, зокрема її точки КПК, відносно колової кривої траси при умові, що $p=0$, знайдемо центральний кут ϕ_k , а потім прямокутні координати – абсцису x_k і ординату y_k колової кривої в точці КПК відносно початку колової кривої (ПК) (мал.1) за формулами

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{180^\circ k}{\pi R} = \frac{k}{R}; \quad x_k = R \sin \phi_k; \\ y_k &= R(1 - \cos \phi_k) \approx \frac{k^2}{2R} \left(1 - \frac{k^2}{12R^2} + \dots\right), \end{aligned} \quad (2)$$

де кут ϕ_k подається у кутовій та радіанній мірах.

Прямокутні координати точки КПК відносно



початку перехідної кривої визначаються з рівняння клотоїди за формулами [8,2]

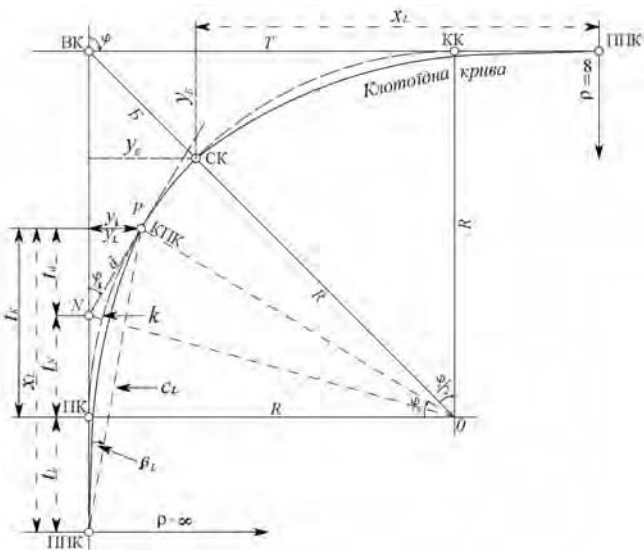
$$\begin{aligned} x_L &= L\left(1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \dots\right); \\ y_L &= \frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \dots\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, у кінці перехідних кривих має витримуватися умова, щоби $y_L = y_k$ або

$$\frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \dots\right) = R(1 - \cos\varphi_k). \quad (4)$$

Звідси легко визначити довжину перехідної кривої:

$$L = \frac{R\sqrt{6(1 - \cos\varphi_k)}}{1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \dots} \approx R\sqrt{6(1 - \cos\varphi_k)}. \quad (5)$$



Мал. 1. Перехідна крива, з'єднана із незміщеною коловою кривою

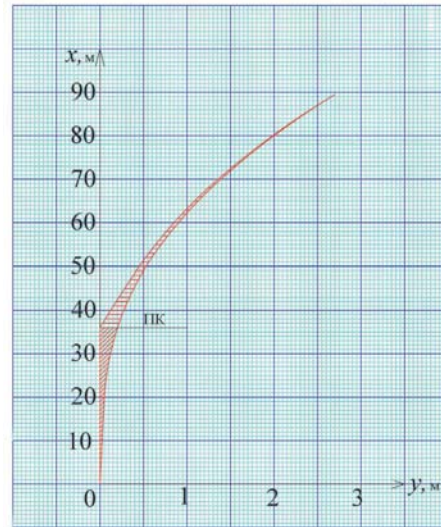
Зауважимо, що прийняті в розрахунках наближені вирази, особливо перший, забезпечують визначення величин x_L і y_L з похибкою, меншою за 1 мм. Із формули (5) випливає, що довжина перехідної кривої є функцією радіуса колової кривої і центрального кута, який стягує замінну частину цієї кривої. Проте доцільнішою видається залежність, яка отримана з порівняння формул (2) і (3), а саме:

$$L = k \frac{\sqrt{3\left(1 - \frac{k^2}{12R^2} + \dots\right)}}{1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \dots} \approx k \sqrt{3\left(1 - \frac{k^2}{12R^2} + \dots\right)} \approx k\sqrt{3}, \quad (6)$$

в якій визначальною є довжина k замінної частини колової кривої (від ПК до КПК) та її радіус. Для обчислення точного (до 1 мм) значення L за першою залежністю треба для її знаменника визначити наближене значення ($L \approx k\sqrt{3}$) та скористатися

методом ітерацій.

Аналіз формули (6) свідчить, що для зміни L у бік збільшення або зменшення потрібно відповідно змінювати k , що не суперечить сучасній практиці проектування залізниць і автошляхів.



Мал. 2. Взаємне розташування клотоїди і замінної частини колової кривої

До речі, визначена клотоїда має найбільше відхилення від замінної частини колової кривої у її першій частині довжиною $k/3$, а далі обидві криві практично збігаються. На мал. 2 показано площу ΔF між двома кривими, яку визначено методом інтегрування, а саме:

$$\Delta F = \frac{L^3}{24R} - \frac{k^3}{6R} = \frac{L^3}{104R}.$$

Поділивши цю площу на L , отримаємо відповідно середню і максимальну інтегральні різниці ординат кривих на всій довжині перехідної кривої:

$$\Delta \bar{y} = \frac{L^2}{104R}; \quad \Delta \bar{y}_{\max} = \frac{L^2}{80R},$$

які при $L=100$ м і $R=500$ м становлять відповідно 0,20 і 0,25 м.

Завдяки такому зближенню кривих пікетажні значення кінцевих точок кривих, прийняті під час вишукувань або проектування, зменшуються на незначну величину:

$$\Delta P = L_1 + L_2 - (k_1 + k_2 + t_{L_1} + t_{L_2}),$$

яка в наведеному прикладі при загальній довжині кривих 305,280 м становить всього 40 мм.

Оскільки на практиці користуються довжинами перехідних кривих, кратними 10 м на автошляхах і 20 м на залізницях, то доцільніше користуватися перетвореною формулою (6), визначаючи довжину k_0 замінної частини колової кривої, яка відповідає вибраному значенню довжини L_0 клотоїди. При цьому, враховуючи ітераційний характер обчислень, спочатку обчислюється наближене значення $k'_0 \approx L_0/\sqrt{3}$, яке підставляється в розширену



формулу для отримання остаточного значення k_0 , а саме:

$$k_0 = L_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{L_0^2}{56R^2} + \frac{L_0^4}{7040R^4} - \dots}{3 \left(1 - \frac{(k_0')^2}{12R^2} + \frac{(k_0')^4}{360R^4} - \dots \right)}} \approx L_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{L_0^2}{56R^2} + \dots}{3 \left(1 - \frac{(k_0')^2}{12R^2} + \dots \right)}}. \quad (7)$$

Так, для отримання $L_0=90,000$ м обчислюється наближене значення $k_0' \approx 51,962$ м, а потім за формулою (7) – її точна величина $k_0=51,970$ м.

Таким чином, описаний спосіб дозволяє визначити умови розташування перехідної кривої, в точці КПК якої радіус кривини $\rho=R$. У цьому легко пересвідчитися, якщо за формулами прямокутних координат (3) взяти перші x' , y' та другі x'' , y'' похідні та підставити їх у формулу для визначення радіуса кривини кривої:

$$\rho = \frac{\sqrt{[(x')^2 + (y')^2]^3}}{x'y'' - x''y'} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{L^2}{2C}\right)^2\right]^3}}{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{L^4}{4C^2}\right)} = R. \quad (8)$$

Додатковим доказом правильності обчислень може бути очевидна формула

$$R = \sqrt{(x_L - t_L)^2 + (R - y_L)^2},$$

яка безпосередньо впливає з мал. 1.

Формули (5), (6) і особливо (7) вважаємо ефективнішими, оскільки при вишукуванні транспортних споруд у камеральних або польових умовах спочатку за нормативним значенням радіуса визначають елементи колової кривої, зокрема її довжину K , а потім, після вибору довжини перехідної кривої, розраховують її основні елементи для фіксації положення кривих у геометрії траси, зокрема із використанням таблиць кривих за величинами R і L . Інші параметри клотоїди, необхідні для її розмічування в натурі, визначаються за формулами

$$t_k = x_k = R \sin \varphi_k; \quad t_L = x_L - t_k; \\ c_L = \sqrt{x_L^2 + y_L^2}; \quad \beta_L = \arctg(y_L / x_L), \quad (9)$$

де t_k – абсциса точки КПК від ППК; t_L – абсциса ППК відносно ППК; c_L, β_L – хорда і полярний кут перехідної кривої.

Проміжні точки перехідної кривої розмічують за їх прямокутними координатами x_i, y_i , які обчислюють за відомими формулами з використанням віддалення l_i біжучої точки від ППК [1,2,8], а саме:

$$x = l \left(1 - \frac{l^4}{40C^2} \left(1 - \frac{l^4}{86,4C^2} \right) \right); \\ y = \frac{l^3}{6C} \left(1 - \frac{l^4}{56C^2} \left(1 - \frac{l^4}{125,7C^2} \right) \right); \quad C = RL. \quad (10)$$

Одночасно обчислюють ординату $y_{ПК}$ за формулою (3) при $l_{ПК} \approx t_L$.

Для розмічування залишкової колової кривої способами прямокутних або полярних координат доцільно визначити дотичну NP , початкову точку N якої розмічують від точки ПК за відстанями

$$t_N = \frac{y_L}{\operatorname{tg} \varphi_k}; \quad d = \sqrt{t_N^2 + y_L^2} = \frac{y_L}{\sin \varphi_k}. \quad (11)$$

Практичне застосування розробленого методу проілюструємо на основі колової кривої з такими вихідними даними та обчисленими її елементами: $\varphi=26^\circ 16'$; $R=500$; $T=116,660$; $K=229,220$; $B=13,429$ і $D=4,101$ м. Довжину L_0 перехідної кривої прийнято рівною 90,000 м й обчислено відповідні величини для знаходження довжини замінної колової кривої та розмічування перехідної кривої на місцевості:

$k_0' \approx 51,962$; $k_0 = 51,970$; $\varphi_k = 5^\circ 57' 19,2''$; $x_k = t_k = 51,876$; $y_k = 2,6984$; $x_L = 89,927$; $y_L = 2,6984$ (контроль обчислень); $t_L = x_L - x_k = 38,050$; $c_L = 89,968$; $\beta_L = 1^\circ 43' 07,4''$; $y_{ПК} = 0,204$; $t_N = 25,868$; $d = 26,008$ м; $\varphi_k = 5^\circ 57' 18,8''$ (контроль обчислень).

Як бачимо, обрана перехідна крива довжиною 90 м відповідає технічним вимогам утворення віражу на залишковій коловій кривій, половина довжини якої становить $k_3/2=114,610-51,970=62,64$ м, що, з одного боку, можна вважати прийнятним, а з другого – створюється резерв для збільшення довжини перехідної кривої на 20-30 м. Таким чином, спосіб забезпечує можливість застосування клотоїди аналогічної довжини на другій половині кривої (симетричні перехідні криві) або клотоїди іншої довжини (несиметричні перехідні криві). Очевидно, у першому випадку залишкові відрізки колової кривої матимуть однакову довжину, а в другому різну та ще й з несиметричним розташуванням.

Аналіз величин t_k й t_L свідчить, що більша частина перехідної кривої (майже 60 %) займає зону колової кривої, а менша (до 40 %) – зону прямолінійної траси (див. мал. 2). Більше того, ці частини співвідносяться як k : $0,73k$ (сума цих коефіцієнтів пропорційності дорівнює $\sqrt{3}$, тоді як у традиційній системі довжина клотоїди поділяється ПК на дві половини, положення яких визначається відомими параметрами [8,2]:

$$t_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{L^2}{120R^2} \left(1 - \frac{L^2}{140R^2} \right) \right); \quad t_2 = x_L - t_1, \quad (12)$$

а у кривій із зміщеним центром колової кривої використовується величина $t_p = ptg \varphi / 2$ для збільшення віддалення ППК від вершини кута повороту траси. У запропонованому способі подібне зміщення клотоїди, навпаки, скеровано до вершини кута повороту траси і становить: $t_p = t_1 - t_L$ (для наведеного вище прикладу воно дорівнює 6,937 м).

Власне саме ця обставина стала основною причиною зміщення клотоїди з колової кривої, що надто ускладнило технологію розрахунків та розмічування



кривих у транспортних лінійних спорудах.

Треба відзначити, що розміщення перехідних кривих можна здійснити при умовах, коли

$$k_1 + \bar{K} + k_2 \leq K \text{ або } \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{3}} + \bar{K} \leq K, \quad (13)$$

де \bar{K} – залишкова колова крива, яка повинна мати відповідну довжину залежно від типу споруди. Якщо ця вимога не задовольняється, то збільшують нормативне значення радіуса, а отже, і довжину колової кривої K .

У варіанті проектування **симетричних клотоїдних кривих** довжини $L_1 = L_2 = L$ на автомобільних магістралях також визначаються описаним вище способом за формулами (5) або (6) з використанням проекції бісектриси колової кривої на вісь ординат і половини колової кривої, тобто при

$$y_k = B \cos \varphi / 2; \quad k \approx K/2 \quad (14)$$

Очевидно, що вказані клотоїдні криві стикуються на середині колової кривої (СК) і є симетричними без залишкової колової кривої (див. праву частину мал. 1).

За тими ж даними, що і в попередньому прикладі, при $B=13,429$; $y_k=13,077$; $k=K/2=14,610$ і $R=500$ м отримуємо нецілочислове значення $L=198,353$ м. Для контролю визначення L за формулою (3) обчислено значення y_L , що підтверджує правильність розв'язку задачі. Очевидно, що радіус кривини клотоїди в точці СК згідно з формулою (6) має дорівнювати нормативному радіусу колової кривої. З огляду на це відпадає питання про визначення цілочислового значення довжини клотоїди, що трошки ускладнює її розмічування на місцевості, оскільки із таблиць кривих можна вибрати тільки наближені значення прямокутних координат. Тому для отримання точних координат точок клотоїди доцільне використання комп'ютера.

Висновки. 1. Для проектування криволінійної ділянки з коловою кривою, спряженою з двома перехідними кривими, наприклад, клотоїдами, довжину останніх доцільно розраховувати новим способом за формулою (7), що забезпечує з'єднання

клотоїд з коловою кривою без її зміщення. В цьому випадку досягається збіжність дотичних до перехідної і колової кривих та їх радіусів, що забезпечує плавність руху на великих швидкостях.

2. Запропонований спосіб дозволяє застосовувати асиметричне розташування перехідних і залишкових колових кривих, а також влаштовувати винятково клотоїдні криві.

3. Завдяки простому поєднанню перехідної і колової кривих спосіб суттєво спрощує методику розмічування кривих на автошляхах та залізницях і скорочує кількість осей в лінійних транспортних спорудах, особливо в тунелях

Література

1. Баран, П.І. До теорії та практики розпланування сучасних перехідних кривих / П.І. Баран // Вісн. геодез. та картогр. – 1998. – № 3. – С. 20-26.
2. Баран, П.І. Інженерна геодезія / П.І. Баран. – К.: Віпол. – 2012. – 618 с.
3. Белятинский, А.А. Применение кривых нового типа при проектировании закруглений автомобильных дорог / А.А. Белятинский, А.М. Таранов // Строительство и архитектура. – 1981. – № 2. – С.104-106.
4. Бобков, В.Ф. Дорожные условия и безопасность движения / В.Ф. Бобков: учеб. для вузов. – М.: Транспорт, 1993. – 271 с.
5. Бойчук, В.С. Довідник дорожника / В.С. Бойчук. – К.: Урожай, 2002. – 560 с.
6. ДБН В.2.3-4-2000. Автомобільні дороги. – К.: Держ. ком. буд., архітект. та житл. політики України, 2000. – 100 с.
7. Каменецкий, Б.И. Автомобильные дороги / Б.И. Каменецкий, И.Г. Кошкин. – М.: Транспорт, 1979. – 144 с.
8. Левчук, Г.П. Прикладная геодезия / Г.П. Левчук, В.Е. Новак, Н.Н. Лебедев. – М.: Недра, 1983. – 400 с.
9. Сокол, Э.Н. Кривые переменного радиуса и их применение на трубопроводном транспорте / Э.Н. Сокол. – Л.: Выща шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 88 с.
10. Цилль, В. Инженерная геодезия: пер. с 6-го нем. изд. – М.: Недра, 1974. – 430 с.

Надійшла 22.05.13

* * *

УДК 528.3

С. Г. Савчук, О. В. Ланьо

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ RTK-ВИМІРЮВАНЬ У МЕРЕЖІ UA-EUPOS/ZAKPOS ЗА ТЕХНОЛОГІЄЮ SPARSE VRS

На основании проведенного экспериментального исследования в сети активных референционных станций UA-EUPOS/ZAKPOS и полученных результатов доказана возможность достижения высокого качества сетевого решения по технологии Sparse VRS на длинных базовых расстояниях.

On the basis of the experimental research in the network of active reference stations UA-EUPOS/ZAKPOS it is proved the possibility of high-quality network solutions by Sparse VRS technology at long base distances.

Постановка проблеми. За останні роки кількість постійно діючих референціальних станцій в Ук-

раїні, які утворюють так звану наземну GNSS-інфраструктуру [1], регулярно збільшується і на травень 2013 р. їх налічувалось уже близько 150-ти. Зростають масштаби обміну GNSS-даними між

© С. Г. Савчук, О. В. Ланьо, 2013