



УДК 528.34

Ю. В. Щербак

ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ПЛОЩ ЗЕМЕЛЬНИХ ДІЛЯНОК ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ПРОКЛАДАННЯ ПОЛІГОНОМЕТРИЧНИХ ХОДІВ ПО ЇХ ВЕРШИНАХ

Предложены формулы для определения и оценки точности площадей земельных участков по результатам линейно-угловых измерений при проложении ходов полигонометрии по их вершинам. Проведённый расчёт средней квадратической ошибки позволяет рассматривать предлагаемый способ для определения площадей земельных участков в целях земельного кадастрирования.

Formulas were suggested to determine and evaluate the accuracy of sizes of land plots according to linear and angular measurements results in laying of polygonal courses on their tops. The calculation of the mean square error allowed to consider the proposed method for determination of sizes of land plots for the purpose of land cadastral activity.

Постановка проблеми. Площі земельних ділянок визначають, як правило, за координатами їх вершин. Якщо необхідно визначити площі за результатами лінійно-кутових вимірювань, то варто враховувати, що подібний підхід використовують переважно для простих геометричних фігур. При вирахуванні площі будь-якої форми на місцевості достатньо розбити її на трикутники, визначити їх площі і ці площі скласти. Проте при такому способі обчислення необхідні додаткові розрахунки, а при оцінюванні точності враховувати коефіцієнти кореляції між площами суміжних фігур, що не завжди виправдано.

На практиці нерідко для геодезичного забезпечення кадастру по вершинах земельних ділянок прокладають полігонометричні ходи. Тому й виникла актуальна задача визначення та оцінювання точності площ, одержаних при безпосередніх лінійно-кутових вимірюваннях.

Актуальність дослідження. Однією з концептуальних засад ведення державного земельного кадастру на сучасному етапі вважається обов'язковість кадастрового обліку всіх земельних ділянок у межах кадастрового округу. База даних повинна включати відомості про всі земельні ділянки на території, визначеній індексною картою, і завжди бути в актуальному стані та без "білих плям". Такий підхід дасть змогу контролювати баланс площ відповідних територій [7]. Даними про площі, отриманими графічним методом або з використанням спрощених формул, нерідко користуються без належного оцінювання точності робіт. Проте сучасні геодезичні прилади дозволяють отримувати результати високої точності, тому визначення площ має ґрунтуватись на математично строгих високоточних методах [3].

Зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями. Ведення державного земельного кадастру – необхідна умова створення сприятливих умов для розвитку земельних відносин. Топографо-геодезичні, картографічні та землевпорядні роботи, що виконуються при встановленні меж земельної ділянки в натурі, здійснюються з

дотриманням законів України "Про державний земельний кадастр", "Про землеустрій", "Про топографо-геодезичну і картографічну діяльність", Положення про земельно-кадастрову інвентаризацію земель населених пунктів, Інструкції з топографічного знімання [4] та інших нормативних актів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У виданні [3] розглядаються питання визначення площ територій, редукованих на поверхню відносності (земний еліпсоїд або картографічну проекцію), а також методика оцінювання точності такого визначення. У статті [5] запропоновано алгоритми для вирішення завдань територіального землеустрою, таких як поділ земельної ділянки на певну кількість дрібніших однакового розміру, визначення умовної вартості ділянок з неоднорідно розподіленими по площі якісними характеристиками, поділ загальної площі на ділянки з однаковою умовною вартістю землі (у випадках неоднорідного розподілу якісних характеристик по площі). У публікації [1] аналізуються формули для оцінювання точності визначення площі довільної геометричної фігури, утвореної пунктами геодезичної мережі, та пропонується формула, що дозволяє провести оцінювання точності з врахуванням кореляції між похибками координат пунктів. Публікацій, що стосуються визначення площ земельних ділянок, коли по вершинах ділянки прокладено хід полігонометрії, автором не виявлено.

Виклад основного матеріалу. Земельно-кадастрові роботи, які передбачені земельним законодавством як складові державного земельного кадастру, забезпечують повноту відомостей про всі земельні ділянки в межах України. Їх здійснюють на основі земельного законодавства з метою врегулювання земельних правовідносин.

Суб'єктами земельних відносин є громадяни, юридичні особи, органи місцевого самоврядування та органи державної влади. Об'єктами земельних відносин є землі в межах території України, земельні ділянки та права на них, у т. ч. на земельні частки (паї). Завданням земельного законодавства є врегулювання земельних відносин з метою забезпечення права на землю громадян, юридичних осіб, територіальних громад та держави, раціонального

© Ю. В. Щербак, 2013





використання й охорони земель. Серед видів земельно-кадастрових робіт особливо важливим є кількісний облік земель.

Статтею 203 Земельного кодексу України передбачено облік земель у кількісному і якісному відношенні: за площею та складом угідь. Облік реалізується через ведення державної статистичної звітності на основі Закону України "Про державну статистику", наказу Держкомстату України "Про затвердження форм державної статистичної звітності з земельних ресурсів та Інструкції з заповнення державної статистичної звітності з кількісного обліку земель (форми №№ 6-зем, ба-зем, бб-зем, 2-зем)".

Закономірно, що зазначення площ при здійсненні земельних правовідносин несе в собі не лише теоретичну й математичну сутність, але й має практичне значення. Введення поняття "орієнтована площа" земельних ділянок дозволяє встановити її для фігури, обмеженої довільною замкнутою ламаною лінією.

Відомо, що геометричну фігуру можна розглядати як траєкторію руху по замкнутому контуру, що складається з прямолінійних відрізків, які послідовно з'єднують вершини. Таку фігуру називають орієнтованою. Орієнтованою площею орієнтованого багатокутника вважають число, абсолютна величина якого дорівнює площі багатокутника неорієнтованого. При цьому орієнтована площа – число додатне, якщо багатокутник орієнтований проти годинникової стрілки, і від'ємне, якщо багатокутник орієнтований за годинниковою стрілкою. Для визначення площі багатокутника будь-якої складної форми на місцевості за вказаними сторонами і кутами доцільно використовувати методи обчислення площ орієнтованих багатокутників [6].

Нехай $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ – n -кутник, заданий на місцевості (мал. 1). Його площу визначають за формулою

$$\begin{aligned} S(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}) = & \frac{1}{2} d_1 [d_2 \sin \varphi_1 + d_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots + \\ & + d_{n-1} \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-2})] + \\ & + \frac{1}{2} d_2 [d_3 \sin \varphi_2 + \dots + d_{n-1} \sin(\varphi_2 + \dots + \varphi_{n-2})] + \dots + \\ & + \frac{1}{2} d_{n-2} [d_{n-1} \sin \varphi_{n-2}], \end{aligned} \quad (1)$$

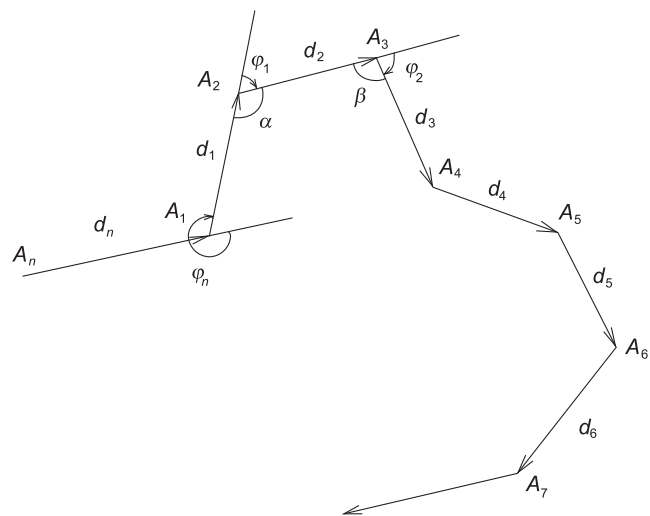
де d_1, d_2, \dots, d_{n-1} – довжини сторін між вершинами $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$; φ_i – кут, утворений суміжними сторонами d_i, d_{i+1} ; $\varphi_i + \varphi_{i+1} + \dots + \varphi_{i+k-1}$ – кут, утворений несуміжними сторонами d_i, d_{i+k} ; n – кількість вершин n -кутника.

Формулу (1) запишемо в згорненому вигляді:

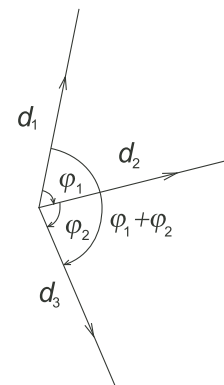
$$S = S(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right]. \quad (2)$$

Вираз (2) дає можливість вирахувати площу довільної фігури, якщо відомі довжини всіх сторін і орієнтовані кути, визначені на основі відомих не-

орієнтованих кутів (кутів між сторонами багатокутника). Значення орієнтованого кута, наприклад, утвореного сторонами $A_1A_2=d_1$ і $A_2A_3=d_2$, отримують при побудові векторів з однієї довільної точки і повороті вектора d_1 до збігу його напрямку з напрямком вектора d_2 (мал. 2). Оскільки поворот виконується за ходом годинникової стрілки, кут повороту φ_1 – число від'ємне. Проте в геодезії осі розташовані навпаки, тому кут повороту φ_1 – число додатне, а, виходячи із зображеного на мал. 1 і нескладної геометричної логіки, він дорівнює $180^\circ - \alpha$, де α – внутрішній кут багатокутника при вершині A_2 . Аналогічним чином можна вирахувати кут між двома несуміжними сторонами.



Мал. 1. Орієнтований n -кутник



Мал. 2. Вирахування орієнтованого кута

При застосуванні даного способу площі визначають на основі вимірюваних довжин і кутів. Отже, площі являють собою функції результатів вимірювань. Помилки в результатах впливають на точність визначень.

Оцінимо точність визначення площі за формулою (2). Результати вимірювань скомпонуємо у вектор $X_T = [d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}]$ [2]. Приймаючи результати незалежними, охарактеризуємо точність вектора X коваріаційною матрицею:

$$K_X = \{m_{d_1}^2, m_{d_2}^2, \dots, m_{d_{n-1}}^2, m_{\varphi_1}^2, m_{\varphi_2}^2, \dots, m_{\varphi_{n-2}}^2\}$$





Середню квадратичну похибку (СКП) площі визначаємо за формулою

$$m_S^2 = FK_X F^T, \quad (3)$$

де F – ряд часткових похідних площі S від вимірних величин d_n і φ_n :

$$F = \left[\frac{\partial S}{\partial d_1} \frac{\partial S}{\partial d_2} \dots \frac{\partial S}{\partial d_{n-1}} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} \dots \frac{\partial S}{\partial \varphi_{n-2}} \right].$$

Тоді

$$m_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial d_1} \right)^2 m_{d_1}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial d_2} \right)^2 m_{d_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial d_{n-1}} \right)^2 m_{d_{n-1}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} \right)^2 m_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2} \right)^2 m_{\varphi_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_{n-2}} \right)^2 m_{\varphi_{n-2}}^2. \quad (4)$$

Необхідні для формул (3) і (4) часткові похідні отримаємо, виконавши диференціювання.

Для будь-якого $1 \leq l \leq n-1$ візьмемо похідну по d_l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial d_l} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial}{\partial d_l} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial d_i}{\partial d_l} \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) + d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} \frac{\partial d_k}{\partial d_l} \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=l+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=l}^{k-1} \varphi_j \right) + \sum_{i=1}^{l-1} d_i \sin \left(\sum_{j=i}^{l-1} \varphi_j \right) \right), \end{aligned}$$

звичайно, маючи при цьому на увазі, що

$$\sum_{i=1}^0 d_i \sin \left(\sum_{j=i}^{-1} \varphi_j \right) = 0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=n}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=n-1}^{k-1} \varphi_j \right) = 0.$$

Такий результат отримуємо при $l=1$ та $l=n-1$ відповідно.

Отже,

$$\frac{\partial S}{\partial d_l} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=l+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=l}^{k-1} \varphi_j \right) + \sum_{i=1}^{l-1} d_i \sin \left(\sum_{j=i}^{l-1} \varphi_j \right) \right), \quad 1 \leq l \leq n-1. \quad (5)$$

Для будь-якого $1 \leq m \leq n-2$ візьмемо похідну по φ_m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi_m} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \frac{\partial \sin \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right)}{\partial \varphi_m} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \cos \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \cos \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right]; \quad 1 \leq m \leq n-2. \quad (6)$$

Підставимо вирази (5) і (6) у (3) та отримаємо формулу СКП площі, визначеної з рівняння (1):

$$m_S^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{k=l+1}^{n-1} d_k \sin \left(\sum_{j=l}^{k-1} \varphi_j \right) + \sum_{i=1}^{l-1} d_i \sin \left(\sum_{j=i}^{l-1} \varphi_j \right) \right) \right)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{d_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left[d_i \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} d_k \cos \left(\sum_{j=i}^{k-1} \varphi_j \right) \right) \right] \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n-2} m_{\varphi_m} \right)^2; \quad 1 \leq l \leq n-1; \quad 1 \leq m \leq n-2. \quad (7)$$

Як приклад за формулою (7) знайдемо СКП визначення площі земельної ділянки у формі п'ятикутника. Результати обчислень зведемо у таблицю.

СКП визначення площі п'ятикутника залежно від характеристик приладу

Вершина	Довжина сторони, м	Внутрішній кут			Орієнтований кут			Площа ділянки, м ²	СКП визначення площі, м ²
		град.	мін.	сек.	град.	мін.	сек.		
1	110,000	90	00	00	90	00	00	20250	1,1
2	61,8181	133	41	52,38	46	18	7,62		
3	180,0000	95	00	00	85	00	00		
4	78,1976	100	55	18,11	79	04	41,89		
5	155,9773	120	22	49,51	59	37	10,49		
1									

Прилад Trimble M3, яким проводили вимірювання, має такі характеристики: $m_{d_i} = 5 \text{ мм} + 3 \text{ ppm}$; $m_{\varphi_m} = 5''$.

Висновки. Визначення площ земельних ділянок запропонованим способом виконується за результатами лінійно-кутових вимірювань при прокладанні ходів полігонометрії по їх вершинах, тому що площі являють собою функції результатів вимірювань. Автором самостійно вирішено завдання оцінювання точності визначення площ методом диференціювання формули, призначеної для обчислення площі за всіма вимірними величинами, та складання матриці часткових похідних; вирахування коваріаційної матриці; вирахування середньої квадратичної похибки визначення площі. Отримана СКП визначення площі, яка узгоджується з вимогами нормативів, нині чинних на території України, дає змогу розглядати запропонований спосіб як надійний для визначення площ земельних ділянок для потреб земельного кадастру.

Перспективи подальших досліджень з означеного питання вбачаються в апробації та адаптації даного методу на практиці для обчислення площ та для автоматизації процесу виконання таких робіт.

Література

1. Аврунев, Е.И. Оценка точности геодезических сетей для целей государственного кадастра недвижимости





/ Е.И. Аврунев, К.А. Карпик // Изв. высш. учеб. завед. / Моск. гос. ун-т геодез. и картогр., 2011. – Вып. 5. – С. 94-99.

2. *Баландин, В.Н.* Определение площадей земельных участков / В.Н. Баландин, М.Я. Брынъ, В.А. Коугия [и др.]; под ред. В.А. Коугия. – М.: Типогр. "Новости", 2005. – 112 с.: ил.

3. *Барановський, В.Д.* Топографо-геодезичне та картографічне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Визначення площ територій / В.Д. Барановський, Ю.О. Карпінський, А.А. Лященко; за заг. ред. Ю.О. Карпінського. – К.: НДІГК, 2009. – 92 с.: іл. – (Сер. "Геодезія, картографія, кадастр").

4. *Земельні відносини в Україні: зб. законодавч. актів та нормат. док.; упоряд. Л. Новаковський, А. Третяк, Г. Во-*

лошин [та ін.]. – К.: Урожай, 1998. – 816 с. – (Законодавчі акти і нормативні документи).

5. *Іванов, А.И.* Решение некоторых задач территориального землеустройства с использованием алгоритмов пересечения невыпуклых полигонов / А.И. Иванов // Изв. высш. учеб. завед. / Изд-е Моск. гос. ун-та геодез. и картогр., 2011. – Вып. 4. – С. 6-11.

6. *Лопшиц, А.М.* Вычисление площадей ориентированных фигур: учеб. изд-е / А.М. Лопшиц. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. л-ры, 1956. – 62 с.

7. *Черняга, П.* Землеустрій і кадастр як інструмент управління земельними ресурсами / П. Черняга, О. Мельничук // Сучас. досягн. геодез. науки та вир-ва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2006. – Вип. II. – С. 65-67.

Надійшла 12.06.13

* * *

КАЛЕНДАР ПОДІЙ

Назва заходу	Дата і місце проведення	Веб-сайт (контактна адреса)
Міжгалузевий геоінформаційний форум	2-5 липня Зальцбург, Австрія	http://www.gi-forum.org/
Міжнародна конференція користувачів продуктів ESRI	8-12 липня Сан-Дієго, США	http://www.esri.com/events/user-conference
Міжнародний симпозіум з ПС та ДЗЗ	21-26 липня Мельбурн, Австралія	http://www.igarss2013.org/
26-та Міжнародна картографічна конференція Міжнародної картографічної асоціації	25-30 серпня Дрезден, Німеччина	http://www.icc2013.org
Міжнародний симпозіум Digital Earth (Електронна Земля)	26-29 серпня Кучінг, Малайзія	http://isde2013kuching.com/
IV Конгрес EUGEO – Асоціації географічних товариств Європи	5-7 вересня Рим, Італія	http://www.eugeo2013.com/
15-й Міжнародний конгрес ISM (Міжнародної маркшейдерської асоціації)	16-20 вересня Аахен, Німеччина	http://www.ism-germany-2013.de
Конференція і торгова виставка "Intergo"	8-10 жовтня Ессен, Німеччина	http://www.geospatialworldforum.org/
Франкфуртський книжковий ярмарок	9-13 жовтня Франкфурт, Німеччина	http://www.buchmesse.de/en/
10-та Міжнародна промислова виставка "GeoForm+2013"	15-17 жовтня Москва, Росія	http://www.geoexpo.ru/home/default.aspx