$$m_F \approx K_1 m_т \sqrt{a^2+b^2};\; m_F \approx K_2 a m_т;$$
$$K_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(N-\frac{n+1}{2N}\right)};\; K_2 = K_1\sqrt{2}, \qquad (20)$$

де a, b – довжини сторін ділянки: m_T – середня квадратична похибка визначення положення межового знака; N, n – кількість основних і проміжних точок меж ділянки прямокутної та квадратної форм.

Значення множників K_1 і K_2 наведено в табл. 3.

Таблиця 3. **Множники *K* для визначення похибок площі фігур**

Фігура	Кількість проміжних точок меж ділянки					
	0	1	2	3	4	6
Прямокутник	0,71	0,70	0,67	0,66	0,65	0,63
Квадрат	1,00	0,98	0,95	0,94	0,92	0,88

Якщо, наприклад, на довших межах прямокутної ділянки (мал. 5, *б*) взяти по одній допоміжній точці, то для площі розміром 160×180 м при похибці m_T =0,05 м абсолютна та відносна похибки площі відповідно будуть:

$$m_F = 0{,}67\cdot 0{,}05\sqrt{160^2+80^2} = 6{,}0 \text{ м}^2;$$
$$\frac{m_F}{F} = \frac{6{,}0}{12800} = \frac{1}{2133} = 0{,}05\,\%.$$

Для аналогічної квадратної ділянки розміром 113×113 м ці похибки відповідно будуть:

$$m_F = 0{,}95\cdot 113\cdot 0{,}05 = 5{,}4 \text{ м}^2;\; \frac{m_F}{F} = \frac{5{,}4}{12800} = \frac{1}{2384} = 0{,}04\,\%,$$

які свідчать про те, що найвища точність визначення площі досягається на квадратних ділянках.

Висновки. 1. Серед трьох розроблених способів спрямлення меж земельних ділянок основним є перший, який можна взяти базовим для складання комп'ютерної програми, а інші – похідні від нього.

2. При спрямленні довгих меж для точного визначення площі ділянок необхідно координувати допоміжні (створні) точки.

Література

1. *Інструкція* про встановлення (відновлення) меж земельних ділянок в натурі (на місцевості) та їх закріплення межовими знаками від 18.05.2010 р. № 376. – К.: Держкомзем України, 2010. – 11 с.

2. *Маслов, А.В.* Геодезические работы при землеустройстве / А.В. Маслов, Г.И. Горохов, Э.М. Ктиторов, А.Г. Юнусов. – М.: Недра, 1976. – 256 с.

3. *Цилль, В.* Инженерная геодезия / В. Цилль. – М.: Недра, 1974. – 432 с.

Надійшла 25.08.13

* * *

УДК 528.2/3+551.24

О. А. Тадєєв

ШЛЯХИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА ГЕОДЕЗИЧНИМИ ДАНИМИ

Обоснованы подходы к решению задачи оценки деформаций земной поверхности по геодезическим данным на основе теории отображения поверхностей. Выполнена систематизация решений в типичных геодезических координатных системах с учетом перспектив использования конечных результатов для интерпретации геодинамических явлений. Сформулирован алгоритм решения задачи.

The approaches and ways of solving the problem of evaluation of the earth surface deformations by geodetic data based on the theory of reflection of surfaces have been grounded. Classification of solutions in typical geodetic frames with allowances made for the perspectives of the use of the final results for the interpretations of geodynamic phenomena are done. The algorithm for solving the problem is formulated.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями. Активний розвиток і широке запровадження сучасних технологій для координування фізичної поверхні Землі стимулювали потужний рух у напрямі вирішення багатьох задач сучасної геодинаміки.

Геодезичні методи моніторингу геодинамічних процесів у частині накопичення даних повторних спостережень забезпечують нині достатньо високу точність реєстрації багатьох показників рухів земної поверхні. Наявні дані та їх інтерпретація для вирішення наукових і прикладних проблем, пов'язаних з геодинамікою, є предметом досліджень не лише окремих науковців та цілих колективів, вони стали основою не однієї міжнародної та вітчизняної програми. Разом з тим теоретичні основи опрацювання даних і наступного аналізу одержаних результатів залишаються практично незмінними впродовж десятиліть. Це значно обмежує потенційні інформативні можливості накопичених геодезичних даних, звужує сферу практичного застосування результатів спостережень для інтерпретації геодинамічних явищ.

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми. Традиційно теоретичною основою відстеження явищ деформації земної поверхні за геодезичними даними є математична теорія пружності [3], а технічним апаратом її реалізації – метод скінченних елементів. Застосування методу для вирішення геодинамічних задач передбачає кускову апроксимацію функції, яка виражає закономірності деформування земної поверхні за скінченним числом точок області її визначення за елементами поверхні певних геометричних форм та скінченних розмірів.

Здебільшого за геометричну форму скінченного елемента поверхні приймають симплекс, а зважаючи на мінімальне число його вершин, апроксимацію реалізують лінійною функцією [1]. Такий підхід забезпечує класичне аналітичне рішення задачі. У працях [5,6] метод розвинуто на скінченні елементи у формі чотирикутників, які утворюються вузлами регулярної географічної координатної сітки. Зміщення вузлів виявлені інтерполяцією за нерівномірно розміщеними пунктами спостережень, а до апроксимації на таких скінченних елементах залучено апарат білінійних функцій та комбінації локальних сплайн-функцій Ерміта.

За будь-якого з окреслених підходів у рамках методу скінченних елементів основою рішення є формування тензора деформації, який виражає афінне перетворення векторного поля зміщень геодезичних пунктів. За умов такого перетворення тензор є носієм інформації про деформований стан поверхні виключно лінійного характеру. Навіть якщо дійсний закон перебігу процесу деформування відображує нелінійні функції, при формуванні тензора здійснюється їх лінеаризація, а компоненти тензора є лише першими (лінійними) складовими розкладу функцій у ряд Тейлора. Таке рішення є наслідком обраної лінійної моделі деформації суцільного середовища.

Хоча загальна теорія пружності передбачає описування також і нелінійних деформацій [8], її пряме застосування для вирішення геодинамічних задач за геодезичними даними не завжди виправдане. Це зумовлено особливостями походження та структури таких даних [10]. Безперечно, за умови дійсно лінійного закону деформації висока інформативність результатів опрацювання методом скінченних елементів не викликає жодних сумнівів. Але при відхиленнях від лінійного ефективність методу знижується і гранично маємо формальні результати опрацювання. Останнє безсумнівне навіть з математичної точки зору, оскільки за таких умов нехтувати нелінійними членами розкладання функцій в ряд неприпустиме. Експериментальні аргументації такого висновку наведено у праці [13].

У ній же розкрито ще один недолік методу: за умови вибору скінченних елементів у формі симплексу кінцеві результати опрацювання позбавлені можливості надійного оцінювання їхньої точності, а сама задача з геодезичної точки зору підпадає під розряд некоректно поставлених. Тож з метою забезпечення належної достовірності результатів опрацювання методом скінченних елементів необхідно завчасно перевірити вихідні дані на предмет їх відповідності умовам лінійної моделі деформації. Обґрунтування методики такої перевірки та деякі результати експериментальних досліджень розкрито у статтях [12,13]. За неналежного обґрунтування умов лінійної моделі окремі ділянки земної поверхні позбавлені можливості неупередженого оцінювання їхньої деформації.

Постановка завдання. Наведений аналіз засвідчує необхідність узагальнення чинної методики на випадок оцінювання нелінійних деформацій земної поверхні або вироблення альтернативних підходів до вирішення задачі. Виходячи з цього, метою дослідження визнано систематизацію і обґрунтування підходів до вирішення задачі залежно від типу вихідних геодезичних даних та масштабів геодинамічних процесів, а також відповідне обґрунтування теоретичних рішень задачі для оцінювання деформацій будь-якого характеру.

Виклад основного матеріалу досліджень. Рухи земної поверхні, які виражені чисельно за результатами повторних геодезичних спостережень, можна ідентифікувати як перетворення фізичної поверхні Землі, редукованої на ту чи іншу відносну відлікову поверхню. Будь-яка із загальноприйнятих у геодезії відлікових поверхонь має геометричну сутність і зумовлює встановлення відповідної координатної системи для геодезичних пунктів, які підлягають спостереженням. Така мотивація дає підстави розглядати проблему з геометричної точки зору безвідносно до походження і характеру рухів земної поверхні. Окреслимо проблему з позицій проективно-диференціальної геометрії [14], а для пошуку шляхів вирішення використаємо теорію поверхонь [2] та деякі рішення щодо врахування спотворень при їх відображенні, які знайшли застосування в математичній картографії [7].

Розглянемо деяку регулярну поверхню S з довільною криволінійною системою координат x, y і виділимо на ній замкнену неперервну область $\Delta \subset S$ (мал. 1). Нехай n точок $M_i(x_i,y_i) \in \Delta$ $(i=\overrightarrow{1,n})$ цілком визначають область Δ. Допустимо, з тих чи інших причин поверхня S зазнала деформації і порушилось взаємне положення точок M_i. Внаслідок деформації поверхня S трансформувалась у деяку поверхню S' з криволінійними координатами x', y', а область Δ спроектувалась на область $\Delta' \subset S'$. При цьому Δ' зберегла властивості замкненої неперервної області. Її визначають ті ж точки M_i, але $M_i(x'_i,y'_i) \in \Delta'$. Нехай відображення точок $M_i(x_i,y_i) \in \Delta$ на точки $M_i(x'_i,y'_i) \in \Delta'$ описує функції

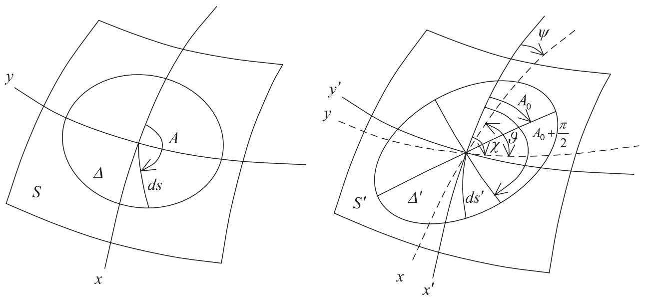
$$x' = u(x,y); \quad y' = v(x,y). \tag{1}$$

Співвідношення між точками $M \in \Delta$ і точками $M \in \Delta'$, яке виражають функції (1), називається відображенням (проекцією) області $\Delta \subset S$ на область $\Delta' \subset S'$. За канонами теорії відображення поверхонь, функції (1) повинні бути однозначними, неперервними і двічі диференційованими з умовою $\partial(x', y')/\partial(x, y) \neq 0$. Такі вимоги виражають властивість гомеоморфізму – відображення, яке реалізовується такими функціями, взаємно однозначне і взаємно неперервне. Властивість гомеоморфізму дозволяє задавати поверхні їх метричними формами і тим самим описувати не тільки власне проекцію, а й внутрішню геометрію відображуваних поверхонь, зумовлену зміною їх метричних властивостей. Ця обставина є вирішальною з огляду перспектив застосування теорії відображення поверхонь до вирішення поставленої проблеми, якщо брати до уваги, що зміна метричних властивостей поверхонь спричинена їхньою деформацією. Тоді геометричні параметри гомеоморфного відображення (1), які описують такі зміни і передають спотворення проекції, – це і є, по суті, характеристики деформації вихідної поверхні.

Отже, якщо описати лінійний елемент ds на поверхні S першою квадратичною формою

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, \qquad (2)$$

де коефіцієнти E,F,G є неперервними і двічі диференційованими функціями криволінійних координат x, y, і так само – лінійний елемент ds' на поверхні S', то співвідношення ds'/ds розкриває можливості (з урахуванням функцій (1)) одержання різних величин, які характеризують властивості відображення $\Delta \subset S$ на $\Delta' \subset S'$: коефіцієнт спотворення проекції μ в довільному азимуті A, коефіцієнти екстремальних спотворень $\mu_{max}=a$ та $\mu_{min}=b$ і відповідні їм головні напрями A_0 та $A_0+\pi/2$, коефіцієнти m і n спотворень на поверхні S' координатних ліній поверхні S і азимути ψ та χ їх зображень на S', кути $\vartheta=\psi-\chi$ і $\varepsilon=\vartheta-\pi/2$ спотворення ортогональності координатних ліній x, y на поверхні S', коефіцієнт p спотворення площі замкненої області $\Delta \subset S$ при її відображенні на S' (мал. 1).



Мал. 1. Схема і напрями відображення $\Delta \subset S$ на $\Delta' \subset S'$

Окремі з означених величин за змістом тотожні відповідним аналогам, якими оперують при вирішенні геодинамічних задач на основі теорії деформації суцільного середовища. Зокрема, дилатація θ уподібнюється коефіцієнтові p, максимальне та мінімальне розширення (E_1 та E_2) і напрям головної осі деформації φ – коефіцієнтам $\mu_{max}=a$ та $\mu_{min}=b$ і азимутові A_0, зсув γ_m виражає різниця a-b, а обертання ω ділянки поверхні як абсолютно твердого тіла описують кути ϑ і ε. Така тотожність має просте пояснення: означені параметри деформації виражає тензор, який в обох теоріях має диференціальне походження. Його компонентами є частинні похідні функцій відображення (1), які в класичному рішенні окресленої проблеми підлягають лінеаризації. З цієї точки зору вирішення проблеми з позицій теорії поверхонь можна вважати узагальнюючим. Беручи до уваги, що означені величини описують відповідні їм властивості гомеоморфного відображення незалежно від виду функцій (1), відкриваються нові перспективи вирішення проблеми оцінювання деформацій земної поверхні.

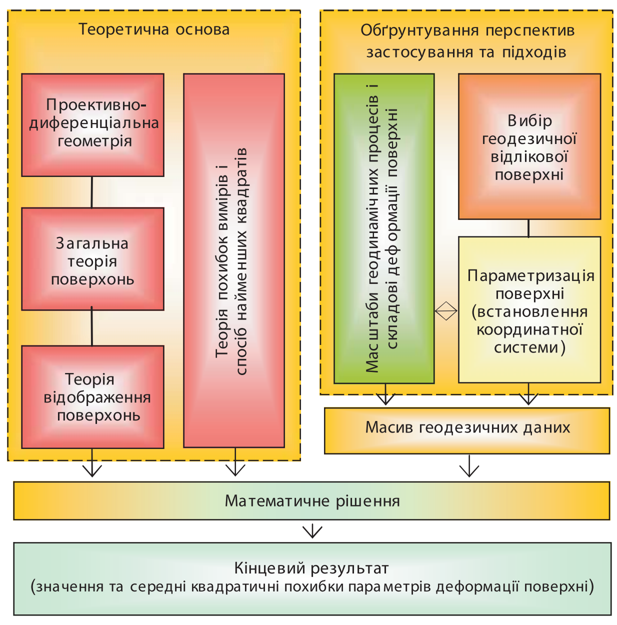
Визначальним при такому рішенні є встановлення функцій, які реалізовують відображення (1). Враховуючи дискретну структуру геодезичних даних, єдиним доступним засобом оцінювання неперервних у просторі деформацій є емпіричний, який передбачає апроксимацію невідомих функцій за відомим дискретним розподілом. Завдання виведення емпіричних формул, які відповідають функціям (1), не має однозначного строгого рішення, чим порушуються умови гомеоморфізму відображення. Тому рішення необхідно вмотивовувати з точки зору коректності його постановки.

Вибір аналітичної форми функцій може бути обґрунтований змістом поставленого завдання за попередньою інформацією про характер деформації земної поверхні. З формальної математичної точки зору оптимальну аналітичну форму доцільно встановлювати за критеріями точності апроксимації, тим самим оцінюючи ступінь наближення кінцевого рішення до строгого з огляду на умови гомеоморфізму.

При опрацюванні геодезичних даних для вирішення такого роду задач здебільшого використовують спосіб найменших квадратів [4]. Цей спосіб, враховуючи теорію похибок вимірів, разом з визначенням коефіцієнтів емпіричних формул забезпечує оцінювання точності як самих коефіцієнтів, так і їхніх функцій і формул загалом. Крім того, спосіб враховує неминучі похибки вихідних геодезичних даних. Застосування теорії похибок вимірів і способу найменших квадратів до вирішення поставленої проблеми у підсумку забезпечить надійне оцінювання точності обчислених за функціями (1) параметрів деформації.

Отже, спираючись на теорію відображення поверхонь та похибок вимірів як на теоретичну основу, за даним масивом вихідних геодезичних даних можна одержати ефективний і надійний результат вирішення поставленої проблеми. Важливо, що застосування такого підходу не передбачає обов'язкового поділу земної поверхні на елементи скінченних розмірів. Ефективність рішення обумовлена виключно кількістю геодезичних пунктів, які підлягають опрацюванню.

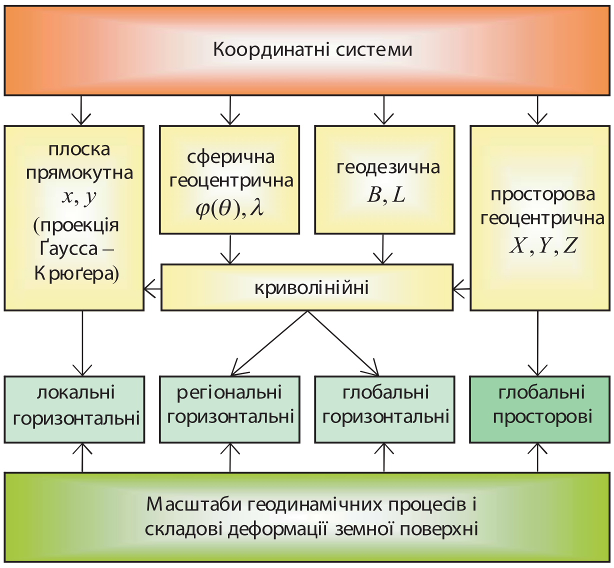
Для вироблення на такій теоретичній основі коректного математичного рішення задачі необхідне чітке обґрунтування підходу та узгодження типу вихідних геодезичних даних з перспективами застосування кінцевого результату для інтерпретації геодинамічних явищ (мал. 2). Адже основи загальної



Мал. 2. Теоретична основа, обґрунтування перспектив застосування та підходів до вирішення задачі

теорії відображення поверхонь розглядаються у довільній криволінійній системі координат.

У процесі вирішення різних прикладних задач з метою досягнення найкращої відповідності змісту досліджуваних проблем або одержання простих рішень координатні системи на взаємно відображуваних поверхнях конкретизуються – здійснюється відповідна параметризація поверхонь. Питання параметризації поверхонь прямо пов'язані з вибором координатних систем на геодезичних відлікових поверхнях і, як наслідок, із типом геодезичних даних. Виходячи з того, що перетворення фізичної поверхні Землі внаслідок деформації передається в таких координатних системах, а також беручи до уваги масштаби перетворень, спробуємо систематизувати різні підходи, визначити перспективи застосування кінцевого результату та відповідні шляхи вирішення проблеми (мал. 3).



Мал. 3. Перспективи вираження геодинамічних процесів у типових геодезичних координатних системах

Очевидно, найпростіше рішення досягається на площині в прямокутній системі координат x, y. Така координатна система поширюється на геодезичну відлікову поверхню, яка відповідає проекції Ґаусса – Крюґера. У ній реалізовується переважна більшість рішень геодинамічних задач. Система прямокутних координат x, y відповідає найпростішій рімановій (евклідовій) параметризації поверхонь у проективно-диференціальній геометрії. Як у геодезичних, так і загалом в геометричних задачах її практичне застосування обмежене, оскільки вона є локальною системою. При відображенні скінченних областей поверхонь доводиться перераховувати їх координати при переході від однієї точки поверхні до іншої, що ускладнює розрахунки. При вирішенні геодезичних задач такий недолік зводиться до необхідності перетворення координат з однієї зони проекції в іншу. Це має наслідком описування в даній системі геодинамічних процесів виключно локального масштабу. Виняток можуть становити горизонтальні складові рухів земної поверхні регіонального масштабу на ділянках незначної протяжності по довготі, де спотворення прямокутних координат мінімальні. За такого вибору параметризації внутрішня геометрія поверхонь описується найпростіше. Зокрема, для лінійного елемента ds маємо співвідношення:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{3}$$

а параметри деформації (відображення) визначаються за принципами теорії квазіконформних відображень. Рішення задачі на такій основі розкрито у статті [11]. Тут же доведено його тотожність рішенню на основі теорії пружності за умови лінійного закону деформації, переваги пропонованого рішення і перспективи його застосування для оцінювання локальних горизонтальних деформацій нелінійного характеру.

Якісно вищого результату можна досягти при вирішенні задачі в криволінійних системах координат – сферичній геоцентричній φ(або θ), λ і геодезичній B, L, які реалізовуються на геосфері та земному еліпсоїді обертання. За змістом такі системи уподібнюються криволінійній ізометричній параметризації поверхонь обертання з кривиною, яку виражає функція $\lambda(x, y)$, де x, y – довільні криволінійні координати.

В ізометричній параметризації $\lambda(x, y)=r$, а лінійний елемент

$$ds^2 = r^2(dq^2 + d\lambda^2), \tag{4}$$

де q, λ – ізометричні широта і довгота; r – радіус паралелі на широті q. Ізометрична мережа меридіанів і паралелей збігається з такою ж географічною мережею, чим спрощується рішення. Враховуючи сталу кривину геосфери радіуса R,

$$ds^2 = (Rd\varphi)^2 + (rd\lambda)^2. \tag{5}$$

На земному еліпсоїді обертання

$$ds^2 = (MdB)^2 + (rdL)^2, \tag{6}$$

де M – радіус кривини меридіанного перерізу на широті B.

За такого вибору геодезичних криволінійних координатних систем результатом рішення задачі на засадах теорії відображень є параметри горизонтальних деформацій земної поверхні, редукованої на відповідну відлікову поверхню. Емпіричні формули, які відповідають функціям (1) і реалізовують відображення поверхонь, – гармонічного типу. Їх можна встановлювати апроксимацією гармонічних функцій тим же способом найменших квадратів шляхом розкладу функцій в ряд. Побудова емпіричних формул тоді зводиться до найповнішого наближення на обраній поверхні лінійних комбінацій відповідних осцилюючих функцій.

Такий прийом застосовується при вирішенні задач фізичної геодезії, наприклад, при функціональному представленні емпіричних даних різних силових полів Землі [9]. Якщо його застосовувати й до описування поля деформацій, то одержані результати дають змогу дослідити ймовірні взаємозв'язки останнього з іншими силовими полями. Беручи до уваги властивості відображення (деформації), які характеризують параметри m та n, ψ та χ, а також ϑ та ε, крім того, розкриваються перспективи врахування впливу геодинамічних ефектів на деформування геодезичних координатних систем (наприклад, врахування руху полюсів). В останньому випадку йдеться про оцінювання параметрів деформації земної поверхні глобального масштабу за умови відповідного мережевого покриття і достатнього чисельного представлення вихідних геодезичних даних. Результат рішення задачі за такого підходу об'єктивно описує горизонтальні деформації поверхні також регіонального і локального масштабів, що визначається географічною належністю геодезичних пунктів.

Окреслені вище підходи забезпечують оцінювання горизонтальної складової деформацій земної поверхні. Щодо перспектив оцінювання просторових деформацій, то така задача набуває логічного змісту за умови наявності даних геодезичного моніторингу в мережах перманентних GPS-станцій та інших станцій супутникової геодезії. Останні забезпечують координування земної поверхні в геоцентричній просторовій системі. Система геоцентричних координат *XYZ* – тривіальний випадок параметризації співфокусних поверхонь триортогональної системи [2]. Загальна теорія поверхонь забезпечує рішення задачі в довільних криволінійних координатах *x, y, z* такої системи. Функції відображення мають загальний вигляд:

$$x' = u(x,y,z);\ \ y' = v(x,y,z);\ \ z' = w(x,y,z), \qquad (7)$$

а лінійний елемент простору ds виражається диференціальним співвідношенням

$$ds^2 = A^2dx^2 + B^2dy^2 + C^2dz^2. \qquad (8)$$

Коефіцієнти *A, B, C* визначають кривину поверхонь yOz, xOz, xOy (тут *O* – фокус триортогональної системи). Беручи до уваги, що в системі *XYZ* координатні поверхні мають нульову кривину, коефіцієнти $A=B=C=1$, що спрощує математичне вирішення задачі як у частині встановлення емпіричних формул, котрі реалізовують відображення (7), так і вираження його властивостей.

Побудова емпіричних формул здійснюється елементарною апроксимацією функцій трьох змінних *X, Y, Z* способом найменших квадратів. Обчислені у підсумку величини, які виражають властивості відображення (7), оцінюють просторові деформації фізичної поверхні Землі. За умови використання даних на станціях з мережевим покриттям планетарного масштабу такі величини виражають глобальні деформації Землі (чи хоча б земної півкулі) як об'ємного просторового тіла. Лише в такому випадку набуває змісту характеристика, наприклад, дилатації – відносної зміни об'єму тіла.

Для інтерпретації глобальних геодинамічних явищ параметри просторових деформацій також можна розглядати осібно в проекціях на координатні площини *YOZ*, *XOZ*, *XOY*. За наявності даних у координатній системі *XYZ* для ділянок земної поверхні регіонального та локального масштабів подібне рішення допускається й для оцінювання деформацій відповідних територій (за винятком визначення об'ємної дилатації). Рішення може бути двояке: 1) визначення складових просторових деформацій поверхні в координатних площинах *YOZ*, *XOZ*, *XOY* за емпіричними формулами, які відповідають функціям відображення (7); 2) визначення за координатами *XYZ* горизонтальної складової деформації земної поверхні, редукованої на криволінійну відлікову поверхню (геосферу чи еліпсоїд) або площину. В цьому випадку достатньо завчасно здійснити перетворення координат пунктів із системи *XYZ* у координатну систему обраної відлікової поверхні й реалізувати рішення задачі на цій поверхні.

Означені підходи різняться типом вихідних геодезичних даних і наступним формальним математичним рішенням задачі. Його цілком визначає належність даних координатній системі обраної відлікової поверхні. Усі рішення мають єдиний алгоритм, який містить два блоки задач. Їх можна розкрити, як це передано на мал. 4. Перший блок схеми, маючи в основі теорію похибок вимірів і спосіб найменших квадратів, містить задачу апроксимації функцій за даним емпіричним розподілом з метою встановлення емпіричних формул, які реалізують відображення. Результат рішення цієї задачі повинен бути вмотивований або змістом вирішуваної проблеми, або формально показниками точності апроксимації.

Мал. 4. Алгоритм рішення задачі

Другий блок задач ґрунтується на теорії відображення поверхонь. По суті це ключове рішення проблеми, яке має метою вираження та оцінювання точності параметрів деформації земної поверхні за встановленими на попередній стадії емпіричними формулами. Основою такого рішення є формування тензора відображення (деформації) – симетричної матриці коефіцієнтів першої квадратичної (метричної) форми, яка відповідає лінійному елементові ds' на поверхні відображення S' і виражена за елементом ds вихідної поверхні S. Матриця має сталу структуру та алгоритм побудови для будь-яких поверхонь і цілком визначається функціями відображення. Її компоненти є частинними похідними функцій координат деформованої поверхні за її вихідними координатами і виражають перетворення, якому піддаються коефіцієнти метричної форми вихідної (недеформованої) поверхні при диференційованій трансформації її координат. Тензор заданий в окремій точці поверхні. Якщо його визначити для всієї області відображення Δ, утвориться тензорне поле, яке й визначає поле деформації з властивими йому параметрами.

Висновки. З метою підвищення інформативних можливостей геодезичних даних у геодинамічних дослідженнях у частині оцінювання деформацій земної поверхні запропоновано вирішення проблеми на основі теорії відображення поверхонь із застосуванням теорії похибок вимірів та способу найменших квадратів. Обґрунтовано правомірність застосування такої основи для вирішення проблеми, окреслено підходи до вирішення задачі, пов'язані з типом вихідних геодезичних даних та перспективами застосування кінцевих результатів для інтерпретації геодинамічних явищ. Здійснено систематизацію рішень при вираженні геодинамічних процесів у типових геодезичних координатних системах. Вибір координатних систем диктується параметризацією поверхонь загальної теорії відображень. Сформульовано алгоритм рішення задачі оцінювання деформацій земної поверхні за означеними підходами.

Література

1. *Есиков, Н.П.* Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н.П. Есиков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 173 с.
2. *Каган, В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В.Ф. Каган. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1947-1948. – 919 с.
3. *Ландау, Л.Д.* Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с.
4. *Мазмишвили, А.И.* Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968. – 440 с.
5. *Марченко, О.М.* Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О.М. Марченко, К.Р. Третяк, А.Я. Кульчицький [та ін.]. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 308 с.
6. *Марченко, О.М.* Поле лінійних швидкостей та рухи земної кори у регіоні Південно-Східної Європи / О.М. Марченко, К.Р. Третяк, Н.П. Ярема [та ін.] // Геодинаміка. – 2012. – № 2. – С. 18-27.
7. *Мещеряков, Г.А.* Теоретические основы математической картографии / Г.А. Мещеряков. – М.: Недра, 1968. – 160 с.
8. *Оден, Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
9. *Пеллинен, Л.П.* Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
10. *Тадєєв, О.А.* Особливості тектонофізичної інтерпретації геодезичних даних в геодинамічних дослідженнях / О.А. Тадєєв // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Техн. науки. – 2013. – № 1. – С. 224-232.
11. *Тадєєв, О.А.* Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О.А. Тадєєв // Геодез., картогр. і аерофотознім. – 2013. – № 78. – С. 140-145.
12. *Тадєєва, О.О.* Систематизація територій за показниками деформації земної поверхні // Геодез., картогр. і аерофотознім. – 2013. – № 77. – С. 127-134.
13. *Тадєєва, О.О.* Достовірність результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів / О.О. Тадєєва, О.А. Тадєєв, П.Г. Черняга // Геодинаміка. – 2012. – № 2. – С. 28-33.
14. *Фиников, С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. – М. – Л.: ОНТИ, 1937. – 265 с.

Надійшла 11.09.13

* * *

УДК 528.06+528.1

В. А. Рябчій, В. В. Рябчій

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ ДЛЯ ОБҐРУНТУВАННЯ ПРОСТОЇ І ЗАГАЛЬНОЇ АРИФМЕТИЧНИХ СЕРЕДИН

Проанализирована функция правдоподобия Фишера и определены ее изменения в зависимости от количества измерений и значений средних квадратических погрешностей. Установлено, что значение этой функции быстро меняется. Также установлено, что значение параметра a_1 (математическое ожидание, простая арифметическая середина, общая арифметическая середина и т. п.) не влияет на значение функции правдоподобия Фишера. Доказано, что основное влияние на значение этой функции оказывает количество измерений и значение самих средних квадратических погрешностей.

Fisher's likelihood function is analyzed and determined its value depending on the number of measurements and values of the middle square error. Established that the value of this function is changing quickly. Also found that the value of a1 (mathematical expectation, a simple arithmetic middle, total arithmetic middle or otherwise) does not affect the likelihood function Fischer. It is shown that the main effect on the value of this function has the number of measurements and the most important middle square errors.

Постановка проблеми та аналіз публікацій. У працях [3-7, 10-12, 18] метод максимальної правдоподібності Фішера розглядається для обґрунтування того, що проста і загальна арифметичні середини забезпечують максимальне значення функції правдоподібності. Не ставлячи під сумнів сам метод і не поширюючись про функції простої та загальної арифметичних середин, які застосовуються ще з часів Ґаусса і добре відомі читачам, уточнимо застосування методу і поміркуємо про значення цієї функції.