Висновки. З метою підвищення інформативних можливостей геодезичних даних у геодинамічних дослідженнях у частині оцінювання деформацій земної поверхні запропоновано вирішення проблеми на основі теорії відображення поверхонь із застосуванням теорії похибок вимірів та способу найменших квадратів. Обґрунтовано правомірність застосування такої основи для вирішення проблеми, окреслено підходи до вирішення задачі, пов'язані з типом вихідних геодезичних даних та перспективами застосування кінцевих результатів для інтерпретації геодинамічних явищ. Здійснено систематизацію рішень при вираженні геодинамічних процесів у типових геодезичних координатних системах. Вибір координатних систем диктується параметризацією поверхонь загальної теорії відображень. Сформульовано алгоритм рішення задачі оцінювання деформацій земної поверхні за означеними підходами.

Література

1. *Есиков, Н.П.* Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н.П. Есиков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 173 с.
2. *Каган, В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В.Ф. Каган. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1947-1948. – 919 с.
3. *Ландау, Л.Д.* Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с.
4. *Мазмишвили, А.И.* Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968. – 440 с.
5. *Марченко, О.М.* Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О.М. Марченко, К.Р. Третяк, А.Я. Кульчицький [та ін.]. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 308 с.
6. *Марченко, О.М.* Поле лінійних швидкостей та рухи земної кори у регіоні Південно-Східної Європи / О.М. Марченко, К.Р. Третяк, Н.П. Ярема [та ін.] // Геодинаміка. – 2012. – № 2. – С. 18-27.
7. *Мещеряков, Г.А.* Теоретические основы математической картографии / Г.А. Мещеряков. – М.: Недра, 1968. – 160 с.
8. *Оден, Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
9. *Пеллинен, Л.П.* Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
10. *Тадєєв, О.А.* Особливості тектонофізичної інтерпретації геодезичних даних в геодинамічних дослідженнях / О.А. Тадєєв // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Техн. науки. – 2013. – № 1. – С. 224-232.
11. *Тадєєв, О.А.* Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О.А. Тадєєв // Геодез., картогр. і аерофотознім. – 2013. – № 78. – С. 140-145.
12. *Тадєєва, О.О.* Систематизація територій за показниками деформації земної поверхні // Геодез., картогр. і аерофотознім. – 2013. – № 77. – С. 127-134.
13. *Тадєєва, О.О.* Достовірність результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів / О.О. Тадєєва, О.А. Тадєєв, П.Г. Черняга // Геодинаміка. – 2012. – № 2. – С. 28-33.
14. *Фиников, С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. – М. – Л.: ОНТИ, 1937. – 265 с.

Надійшла 11.09.13

* * *

УДК 528.06+528.1

В. А. Рябчій, В. В. Рябчій

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ ДЛЯ ОБҐРУНТУВАННЯ ПРОСТОЇ І ЗАГАЛЬНОЇ АРИФМЕТИЧНИХ СЕРЕДИН

Проанализирована функция правдоподобия Фишера и определены ее изменения в зависимости от количества измерений и значений средних квадратических погрешностей. Установлено, что значение этой функции быстро меняется. Также установлено, что значение параметра a_1 (математическое ожидание, простая арифметическая середина, общая арифметическая середина и т. п.) не влияет на значение функции правдоподобия Фишера. Доказано, что основное влияние на значение этой функции оказывает количество измерений и значение самих средних квадратических погрешностей.

Fisher's likelihood function is analyzed and determined its value depending on the number of measurements and values of the middle square error. Established that the value of this function is changing quickly. Also found that the value of a1 (mathematical expectation, a simple arithmetic middle, total arithmetic middle or otherwise) does not affect the likelihood function Fischer. It is shown that the main effect on the value of this function has the number of measurements and the most important middle square errors.

Постановка проблеми та аналіз публікацій. У працях [3-7, 10-12, 18] метод максимальної правдоподібності Фішера розглядається для обґрунтування того, що проста і загальна арифметичні середини забезпечують максимальне значення функції правдоподібності. Не ставлячи під сумнів сам метод і не поширюючись про функції простої та загальної арифметичних серединн, які застосовуються ще з часів Ґаусса і добре відомі читачам, уточнимо застосування методу і поміркуємо про значення цієї функції.

Насамперед відмітимо, що обґрунтування суті простої та загальної арифметичних середин, їх переваг перед усіма іншими функціями відоме всім і воно не залежить від методу максимальної правдоподібності Фішера.

Для рівноточних і нерівноточних вимірів однієї величини функції правдоподібності мають відповідно такий вигляд:

$$L_{\text{р}} = L_1, L_2, ..., L_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}; \qquad (1)$$

$$L_{\text{нр}} = L_1, L_2, ..., L_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot ... \cdot \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - a_1)^2}{\sigma_i^2}}, \qquad (2)$$

де $L_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2\sigma_i^2}}$ – функція правдоподібності для однієї виміряної величини; a_1 і σ – два параметри нормального розподілу: математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення виміряної величини.

Функції (1) і (2) логарифмують:

$$\ln L_{\text{р}} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}; \qquad (3)$$

$$\ln L_{\text{нр}} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \sum_{i=1}^{n}\ln\sigma_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - a_1)^2}{\sigma_i}. \qquad (4)$$

Частинні похідні по a_1 дорівнюватимуть відповідно:

$$\frac{\partial \ln L_{\text{р}}}{\partial a_1} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1); \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \ln L_{\text{нр}}}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - a_1)}{\sigma_i}. \qquad (6)$$

Прирівнюючи вирази (5) і (6) до нуля, отримуємо формули простої і загальної арифметичних середин, що, як стверджують, забезпечують максимальне значення функцій (1) і (2).

Ю. В. Лінник у [12] пише, що щільність імовірності довільного вектора $X=(x_1,..., x_n)$ (повторної вибірки) має такий вигляд, як це передає формула (1). Крім того, він зазначає: "щільність імовірності вибірки у математичній статистиці має особливу назву – *функція правдоподібності вибірки*", а далі пише: "Припис максимальної правдоподібності вимагає при заданому σ вибирати $a=\hat{a}$ так, щоби $L(x_1,..., x_n, a)=\max$".

Хоча метод і не викликає заперечень, але деякі нюанси його використання дають привід все ж засумніватися: так це чи ні? Обґрунтування методу для математичного опрацювання результатів геодезичних вимірювань та для аналізу характеру вимірів має велике значення. Параметр σ ми не розглядаємо.

Застосування формул (1) і (2) описано в низці попередніх праць, названих вище, але їх повного аналізу з урахуванням значення показника степеня досі не зроблено, окрім випадку, коли розрахунки велися для побудови кривої Ґаусса.

Постановка завдання. Мета статті – виявити, як змінюється значення функції максимальної правдоподібності в залежності від кількості вимірювань.

Виклад основного матеріалу. У працях [3, 8, 17] наводиться формула ймовірності появи сукупності істинних похибок, яка має вигляд:

$$P_{\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1^2}{m_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{m_2^2} + ... + \frac{\Delta_n^2}{m_n^2}\right)} \cdot \frac{d\Delta_1}{m_1} \cdot \frac{d\Delta_2}{m_2} \cdot ... \cdot \frac{d\Delta_n}{m_n}, \qquad (7)$$

тут Δ_i – істинна похибка; m_i – середня квадратична похибка (СКП).

М. Г. Відуєв і Г. С. Кондра у книжці [5] пишуть: "Щільність нормального або стандартного розподілу, інакше – нормальну щільність, обчислюють за формулою

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma(x) \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\{x - M(x)\}^2}{2\sigma(x)}}\text{"}. \qquad (8)$$

П. М. Зазуляк і співавтори навчального посібника [10] вказують, що функція густини (щільності) розподілу характеризує швидкість, з якою змінюється функція розподілу в точці *x*. Вони ж наводять механічну інтерпретацію терміна "густина розподілу ймовірностей": "... вся одинична маса ймовірностей розподілена за певним законом на осі *Ox* в інтервалі всіх можливих значень неперервної випадкової величини. Тоді, вважаючи за маси всіх окремих точок у цьому інтервалі величини, пропорційні ймовірностям, функція $f(x)$ означатиме ніщо інше, як лінійну густину (щільність) у точці *x*".

С. П. Войтенко [7] вважає, що кожен з вимірів x_i підкоряється закону нормального розподілу зі щільністю

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_i - M_x)^2}{\sigma_i^2}}. \qquad (9)$$

Він же у [6] вказує: "неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, якщо щільність ймовірності має рівняння

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - Mx)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (10)$$

У посібнику [1] зазначається: "з допомогою функції e^{-x^2} будується функція, яка залежить від двох параметрів – числа m і позитивного числа σ:

$$x \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\text{"}. \qquad (11)$$

Ліпман Берс, автор даного посібника, назвав цей вираз "функцією", а також вказав, що за цією функцією будується графік.

В. Ф. Лук'янов [13] дає такі формулювання: "Кожне співвідношення, що встановлює зв'язок між значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають законом розподілу імовірностей, які задають найчастіше у вигляді функції або щільності розподілу". А ще він зазначає, що нормальний закон характеризується щільністю розподілу типу

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}. \tag{12}$$

М. В. Смірнов і Д. О. Бєлугін [18] пишуть, що нормальний закон розподілу характеризується щільністю імовірності, яка визначається з рівності

$$P(x)=n(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{13}$$

М. Г. Папазов і С. Г. Могильний [15] стверджують, що функція $f(x)$ – це похідна від функції розподілу, яка характеризує ніби щільність, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці. Дана функція називається щільністю розподілу.

Н. І. Ідельсон в [11] також посилається на функцію правдоподібності Фішера для знаходження оптимальних параметрів a і S (у сучасній літературі це a_1 і σ):

$$\psi(x_i,a,s)=\frac{1}{S^n(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{\sum(x-a)^2}{2S^2}}. \tag{14}$$

Хоч він логарифмує через десяткові логарифми, але кінцевий результат та висновок такі ж самі. "Отже, – пише він, – умова "ψ – максимум" виконується і нормальний закон витримує "тест" на критерій найбільшої правдоподібності".

Г. М. Фіхтенгольц [19] посилається на формулу Ньютона і Лейбніца (Барроу): "Похідна від змінної площі $P(x)$ по скінченній абсцисі x дорівнює скінченній ординаті $y=f(x)$".

В. Д. Большаков [3] також посилається на цю теорему. Він дійшов висновку, чому дорівнює ордината, але водночас пише: "Геометрично ймовірність P у виразі $P=\varphi(\Delta)\cdot\delta\Delta$ являє собою площу на рисунку заштрихованої елементарної ділянки при нескінченно малому значенні $\delta\Delta$".

М. Г. Відуєв і Г. С. Кондра [5] пишуть: "Площа, обмежена кривою розподілу, при зміні $\sigma(x)$ залишається незмінною і дорівнює одиниці".

К. Ф. Ґаусс у [9] наводить формулу

$$\varphi(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\cdot\Delta^2} \tag{15}$$

і вказує: "Одержана таким чином функція, очевидно, не може з усією строгістю передати ймовірність помилок у можливих межах їх значень, ... що у певній системі спостережень імовірність Δ відобразиться як

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\cdot\Delta^2}\text{...".} \tag{16}$$

У цій самій праці Ґаусс пише: "Позначимо через $\varphi(x)$ відносну ймовірність помилки при певному виді спостережень; тоді, треба думати, через безперервність помилок імовірність деякої помилки, яка лежить між нескінченно близькими значеннями x та $x+dx$, дорівнюватиме $\varphi(x)\ dx$".

Наведені приклади свідчать, що не всі автори трактують дану величину як імовірність.

Як відомо, для побудови кривої Ґаусса (кривої нормального розподілу) необхідно встановити щільність розподілу, яка використовується як її ордината:

$$\varphi(\Delta)=y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}, \tag{17}$$

де h – міра точності кривої Ґаусса, яку знаходимо з формули

$$h=\frac{1}{m\sqrt{2}}, \tag{18}$$

тут m – СКП вимірів.

Тепер запишемо формулу (17) у такому вигляді (без h):

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{m^2}}\cdot\frac{1}{m} \tag{19}$$

або

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\ \frac{1}{m}, \tag{20}$$

де t – нормована похибка, яку обчислюють за формулою

$$t_i=\frac{\Delta_i}{m}. \tag{21}$$

Проаналізувавши наведені формули (1, 2, 7, 14), можна зробити висновок, що, незважаючи на деякі розбіжності в літерному позначенні символів, за ними обчислюється одна й та сама величина, тільки її назви різні: функція правдоподібності або ймовірність появи якоїсь сукупності похибок. Порівнявши формули функції правдоподібності для однієї виміряної величини (8-13, 15-17, 19, 20), можна сказати те саме: обчислюється величина, назви якої різні: функція правдоподібності, функція щільності розподілу, функція густоти розподілу, ордината кривої Ґаусса, відносна ймовірність. При цьому функція правдоподібності для всіх виміряних величин фактично складається з добутку щільностей або ординат кривої. То ж питання: а яка величина отримується насправді? Ми обираємо такі терміни: функція правдоподібності й ордината кривої Ґаусса.

Згідно з [16], якщо різниці чисельника показника степеня числа e в (1) і (2) дорівнюють істинним похибкам $(x_i-a_1)=\Delta_i$ і для рівноточних, і для нерівноточних вимірів, то показник степеня числа e дорівнюватиме:

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}=-\frac{n}{2}; \tag{22}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_1)^2}{\sigma_i^2}=-\frac{n}{2}. \tag{23}$$

Приймаючи, що параметр a_1 дорівнює простій або загальній арифметичним серединам, показник степеня числа e буде:

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}=-\frac{n-1}{2}; \qquad (24)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_1)^2}{\sigma_i^2}=-\frac{n-1}{2}. \qquad (25)$$

Врахувавши вирази (22-25), формули правдоподібності (1) і (2) набудуть такого вигляду:

$$L_{\text{р}}=L_1,L_2,...,L_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\frac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{n}{2}}; \qquad (26)$$

$$L_{\text{нр}}=L_1,L_2,...,L_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\frac{1}{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot...\cdot\sigma_n}e^{-\frac{n}{2}}; \qquad (27)$$

$$L_{\text{р}}=L_1,L_2,...,L_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\frac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{n-1}{2}}; \qquad (28)$$

$$L_{\text{нр}}=L_1,L_2,...,L_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\frac{1}{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot...\cdot\sigma_n}e^{-\frac{n-1}{2}}. \qquad (29)$$

У формулах (26-29) приймемо, що $\sigma=m$, та виділимо параметри, які мають вплив на значення цих функцій:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n=a;\quad e^{-\frac{n}{2}}=b_1;\quad e^{-\frac{n-1}{2}}=b_2;$$
$$\frac{1}{m^n}=c;\quad \frac{1}{m_1\cdot m_2\cdot...\cdot m_n}=d. \qquad (30)$$

Для аналізу впливу цих параметрів, що входять у формули (26-29), зробимо деякі розрахунки, результати яких зведемо в табл. 1.

У цих розрахунках використовувались і аналізувались формули (26) і (27) при рівності параметрів c і d. Значення функції правдоподібності за формулами (28) і (29) – не наводимо, але вони аналогічні. Замінюється тільки параметр b_1 на b_2. Їх зміну можна бачити у табл. 1 (графа 4). Параметр a у формулах (26-29) однаковий для кожного значення n (графа 2). Параметр a завжди буде меншим за одиницю й при збільшенні n він зменшується, умовно кажучи "зі значною швидкістю". Значення цього параметра є величиною безрозмірною.

Параметри b_1 і b_2 при збільшенні n також зменшуватимуться і будуть менше одиниці, але вони загалом більші, ніж параметр a при тому самому значенні n. Величина цього параметра теж безрозмірна (графа 4).

Параметри c і d відрізняються і можуть набувати таких значень: c=1, d=1; c<1, d<1; c>1, d>1. О. С. Чеботарьов [20] вказує: "... показник при e і множник $d\Delta/m$ – абстрактні числа...". Це треба розуміти так, що і параметри c і d – величини безрозмірні.

Для зменшення обсягу обчислень, які треба було б навести, приймемо, що знаменники параметрів c і d однакові, тобто $m_n=m_1\cdot m_2\cdot...\cdot m_n$. Тоді результати обчислень як для рівноточних, так і нерівноточних вимірів будуть однакові.

Спочатку приймемо, що параметри c і d дорівнюють одиниці. У такому разі значення функції дорівнюватиме добутку параметрів a і b_1 (табл. 1, графа 5). При цьому "швидкість зменшення" буде ще більша, ніж у параметра a.

Потім приймемо, що параметри c і d більші та менші одиниці відповідно. Визначимо параметр c при різних значеннях СКП (m=2, m=0,5, m=0,24, m=0,2) рівноточних вимірів і обчислимо значення функції (графи 6-13).

Аналізуючи одержані дані, можна помітити, що якщо параметр c більше одиниці, то значення функції зменшується (графи 6 і 7), а якщо менше – збільшується (графи 8-13). Але є критичне значення СКП (m=0,24), при якому і менше якого отримане значення функції дорівнює або більше одиниці (графи 10-13). Постає питання: "Якщо це ймовірність, то як вона може бути більше одиниці?" Це риторичне питання, яким автори хочуть підкреслити, що наведені величини не можуть бути ймовірностями. І тут напрошується припущення, що за формулами (26-29) обчислити ймовірність для всього діапазону імовірних значень СКП неможливо. А якщо це так, то є сумнів, що для значень СКП менше одиниці обчислена ймовірність правильна. І це як для сукупності, так і для однієї похибки (графи 10-13). Тож можна зробити висновок, що одержані значення не є імовірностями.

Якщо прирівняти параметр c до параметру d, то можна сказати, що при нерівноточних вимірах будуть такі самі результати, як і при рівноточних. Звідси виходить, що при нерівноточних вимірах категорія "імовірність" теж недоречна відносно цієї функції.

Знайшовши значення функції (26) при n=1 (табл. 1, рядок 1), можна виділити цікавий показник – добуток параметрів a і b_1. Цим добутком буде значення функції, коли СКП дорівнює одиниці. При інших значеннях СКП функції відповідно змінюватиметься. При цьому для кожного значення СКП буде своє значення функції, яке можна назвати "основним" і прийняти його за постійне число. Якщо це "основне" число піднести у степінь n, то можна одержати значення функції правдоподібності. Також значення функції правдоподібності можна обчислити за такими формулами:

$$L_{\text{р}}=\left(\frac{0{,}24197072}{m}\right)^n \qquad (31)$$

або

$$L_{\text{нр}}=\frac{0{,}24197072^n}{m_1\cdot m_2\cdot...\cdot m_n}. \qquad (32)$$

У випадках, коли за параметр a_1 бралася проста або загальна арифметичні середини, то ніякої залежності виявлено не було.

Для повнішого аналізу функції правдоподібності також було обчислено значення логарифмів функції (1).

Таблиця 1. **Результати обчислення значень функції правдоподібності**

n	$a=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$	$-\frac{1}{2}n$	$b_1=e^{-\frac{n}{2}}$	$a \cdot b_1$	$c=\frac{1}{2^n}$	L_p при $m=2$	$c=\frac{1}{0{,}5^n}$	L_p при $m=0{,}5$	$c=\frac{1}{0{,}24^n}$	L_p при $m=0{,}24$	$c=\frac{1}{0{,}2^n}$	L_p при $m=0{,}2$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
1	0,39894228	-0,5	0,60653066	0,24197072	0,50000000	0,12098536	2,0	0,48394145	4,17	1,00821135	5,0	1,20985362
2	0,15915494	-1,0	0,36787944	0,05854983	0,25000000	0,01463746	4,0	0,23419933	17,36	1,01649013	25,0	1,46374579
3	0,06349364	-1,5	0,22313016	0,01416735	0,12500000	0,00177092	8,0	0,11333876	72,34	1,02483689	125,0	1,77091814
4	0,02533030	-2,0	0,13533528	0,00342808	0,06250000	0,00021426	16,0	0,05484932	301,41	1,03325219	625,0	2,14255173
5	0,01010533	-2,5	0,08208500	0,00082950	0,03125000	0,00002592	32,0	0,02654386	1255,87	1,04173658	3125,0	2,59217397
6	0,00403144	-3,0	0,04978707	0,00020071	0,01562500	0,00000314	64,0	0,01284567	5232,78	1,05029065	15625,0	3,13615107
7	0,00160831	-3,5	0,03019738	0,00004857	0,00781250	0,00000038	128,0	0,00621655	21803,25	1,05891496	78125,0	3,79428374
8	0,00064162	-4,0	0,01831564	0,00001175	0,00390625	0,00000005	256,0	0,00300845	90846,89	1,06761008	390625,0	4,59052793
9	0,00025597	-4,5	0,01110900	0,00000284	0,00195313	0,00000001	512,0	0,00145591	378528,71	1,07637660	1953125,0	5,55386684
10	0,00010212	-5,0	0,00673795	0,00000069	0,00097656	0,00000000	1024,0	0,00070458	1577202,96	1,08521511	9765625,0	6,71936592
11	0,00004074	-5,5	0,00408677	0,00000017	0,00048828	0,00000000	2048,0	0,00034097	6571678,99	1,09412619	48828125,0	8,12944919
12	0,00001625	-6,0	0,00247875	0,00000004	0,00024414	0,00000000	4096,0	0,00016501	27381995,80	1,10311045	244140625,0	9,83544356
13	0,00000648	-6,5	0,00150344	0,00000001	0,00012207	0,00000000	8192,0	0,00007986	114091649,15	1,11216848	1220703125,0	11,89944702
14	0,00000259	-7,0	0,00091188	0,00000000	0,00006104	0,00000000	16384,0	0,00003865	475381871,48	1,12130088	6103515625,0	14,39658908
15	0,00000103	-7,5	0,00055308	0,00000000	0,00003052	0,00000000	32768,0	0,00001870	1980757797,82	1,13050828	30517578125,0	17,41776545
16	0,00000041	-8,0	0,00033546	0,00000000	0,00001526	0,00000000	65536,0	0,00000905	8253157490,91	1,13979128	152587890625,0	21,07294663
17	0,00000016	-8,5	0,00020347	0,00000000	0,00000763	0,00000000	131072,0	0,00000438	34388156212,10	1,14915051	762939453125,0	25,49518082
18	0,00000007	-9,0	0,00012341	0,00000000	0,00000381	0,00000000	262144,0	0,00000212	143283984217,10	1,15858659	3814697265625,0	30,84543688
19	0,00000003	-9,5	0,00007485	0,00000000	0,00000191	0,00000000	524288,0	0,00000103	597016600904,59	1,16810015	19073486328125,0	37,31846354
20	0,00000001	-10,0	0,00004540	0,00000000	0,00000095	0,00000000	1048576,0	0,00000050	2487569170435,79	1,17769183	95367431640624,8	45,14987831

Одержані значення значною мірою змінилися у порівнянні з даними табл. 1. Значення логарифмів функції правдоподібності для СКП, наведених у табл. 1, мають знак мінус, а при критичних значеннях ($m \le 0{,}24$) – знак плюс. Для скорочення обсягу статті вказані дані тут не наводяться.

Тепер розглянемо формули (19-21). У формулі (20) можна виділити три параметри:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = g; \quad e^{-\frac{1}{2}t^2} = l; \quad \frac{1}{m} = S.$$

Розглянемо вплив кожного параметра на обчислення ординат. Для цього виконаємо деякі розрахунки, результати яких зведемо у табл. 2.

Таблиця 2. **Результати обчислення ординат кривої Ґаусса в залежності від значень СКП**

n	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = g$	t	t^2	$e^{-\frac{1}{2}t^2} = l$	gl	y при m=2	y при m=0,39	y при m=0,24	y при m=0,2
1	0,39894	0,00	0	1,00000	0,39894	0,199	1,023	1,662	1,995
2	0,39894	1,00	1	0,60653	0,24197	0,121	0,620	1,008	1,210
3	0,39894	1,41	2	0,36788	0,14676	0,073	0,376	0,612	0,738
4	0,39894	2,00	4	0,13534	0,05399	0,027	0,138	0,225	0,270
5	0,39894	3,00	9	0,01111	0,00443	0,002	0,011	0,018	0,022

Проаналізуємо одержані результати.

Параметр g – постійне число. Його вплив не залежить від значення нормованої похибки t і СКП дорівнює приблизно чотирьом десятим.

Параметр l змінюється від одиниці до однієї сотої: $1 \ge l \ge 0{,}0111$.

Параметр l має максимальне значення, коли t=0, і мінімальне, коли t=3. Він залежить від значення квадрата нормованої похибки t^2. При цьому витримується така нерівність: $0 \le t^2 \le 9$.

Добуток параметрів g і l змінюється в межах $0{,}004 \le gl \le 0{,}4$.

Добуток параметрів g і l є величиною безрозмірною.

Тепер визначимося з параметром S. Він є оберненим значенням СКП, тобто величина СКП чинитиме основний вплив на значення ординати. При зменшенні значення СКП значення ординати збільшується. При цьому є два цікавих моменти. Коли СКП дорівнює одиниці, то ордината дорівнює добутку параметрів g і l, а коли $m \le 0{,}39$, ордината набуває значення більше одиниці. І тут, як і у випадку з визначенням імовірності появи сукупності похибок, теж виникає питання: якщо це визначена ймовірність, то як вона може бути більше одиниці?

Продовжимо аналізувати показник степеня числа e формул (1) і (2), коли параметр a_1 – довільне число, що не дорівнює ні загальній, ні простій арифметичним серединам. При цьому постійну величину $(-1/2)$ розглядати не станемо. Відхилення результатів вимірювань від загальної та простої арифметичних середин $\bar{x}_3$ і $\bar{x}$ та значення, що не дорівнюють загальній і простій арифметичним серединам x', обчислюються за формулами

$$\overline{V}_i = x_i - \overline{x_3}; \tag{33}$$

$$V_i = x_i - \bar{x}; \tag{34}$$

$$\varepsilon_i = x_i - x'. \tag{35}$$

Замінивши істинну похибку у (21) на відхилення (33-35), одержимо такі нормовані відхилення:

$$\overline{t_i} = \frac{\overline{V_i}}{m_{\overline{x}_i}}; \tag{36}$$

$$t_i = \frac{V_i}{m_{x_i}}; \tag{37}$$

$$t'_i = \frac{\varepsilon_i}{m'_{x_i}}. \tag{38}$$

Врахувавши особливості нормованих відхилень від загальної і простої арифметичних середин [16], можна записати, що суми квадратів нормованих відхилень дорівнюватимуть відповідно: $[\bar{t}^2]=n-1$; $[t^2]=n-1$.

Тепер визначимось, чому дорівнюватиме $[t'^2]$ при обчисленні відхилення за формулою (35). СКП одиниці ваги, одного виміру і значення, яке не дорівнює загальній та простій арифметичним серединам, можна обчислити практично за тими ж формулами, які використовуються для загальної та простої арифметичних середин. У випадку нерівноточних вимірів формули матимуть такий вигляд:

$$\mu' = \sqrt{\frac{[p_x \varepsilon\varepsilon]}{n-1}}; \tag{39}$$

$$m'_{x'} = \frac{\mu'}{\sqrt{[p_x]}}; \tag{40}$$

$$m'_{x_i} = \frac{\mu'}{\sqrt{p_{x_i}}} \tag{41}$$

Нормоване відхилення (38) піднесемо до квадрата і просумуємо його при i = 1, 2, ..., n:

$$\left[t'^2\right] = \frac{\varepsilon_1^2}{m'^2_{x_1}} + \frac{\varepsilon_2^2}{m'^2_{x_2}} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{m'^2_{x_n}} \tag{42}$$

Враховуючи вираз (41), рівняння (42) набуде вигляду:

$$\left[t'^2\right] = \frac{p_{x_1}\varepsilon_2^2}{\mu'^2} + \frac{p_{x_2}\varepsilon_2^2}{\mu'^2} + \ldots + \frac{p_{x_n}\varepsilon_n^2}{\mu'^2} \tag{43}$$

З урахуванням формули обчислення μ' (39) отримаємо:

$$[t'^2] = n - 1.$$

За аналогією для рівноточних вимірів, враховуючи формулу Бесселя, отримаємо такий самий вираз.

Таким чином, незалежно від значення, яке взяте замість параметра a_1, значення показника степеня числа e буде таким самим. А оскільки це так, то і значення функцій правдоподібності $L_{\text{р}}$ і $L_{\text{нр}}$ залежатимуть від кількості вимірювань та значень СКП вимірів.

Тепер порівняємо значення самих функцій (1) і (2) залежно від кількості вимірювань та значень

СКП. Прийнято вважати, що п'ять вимірів надійніші, ніж два, а десять вимірів краще, ніж п'ять тощо. Але з одержаних результатів розрахунків (табл. 1) можна побачити, що при збільшенні кількості вимірювань значення параметрів a, b_1, b_2 та самих значень функцій (1) і (2) стрімко зменшуються. Говорити про якісь максимуми або мінімуми цих функцій при $n>4$ недоречно, бо ці зміни незначні, наприклад, при $m=2$ (табл. 1, графа 7). Якоюсь мірою виняток становлять величини, обчислені за так званими критичними значеннями СКП ($m \leq 0{,}24$).

Адже, якщо взяти необмежену кількість вимірювань та необмежені значення, які не наведені в табл. 1, все одно буде інтервал з деякими протиріччями. Ці протиріччя можна пояснити тільки гіпотетично.

Таке саме відбувається і при визначенні ординат кривої Ґаусса. Але при цьому виникає ще більше протиріч. Тож насамперед встановимо наймення цієї величини. Те, що вона використовується при побудові кривої Ґаусса – це безсумнівно і однозначно. Називати ж її відносною або умовною імовірністю недоречно, враховуючи дані табл. 2.

Тепер щодо щільності або густини. У фізиці є таке поняття – "маса в об'ємі тіла". Тут не будемо наводити всі формулювання, не в цьому суть справи. Тлумачення, яке наведено в [10] – "лінійна густина" – дуже цікаве і добре сприймається студентами. Але все-таки ця величина – передусім ордината, яка вказує точки кривої Ґаусса.

Звісно, ординату можна назвати і щільністю, і густиною. Але як тлумачити ці терміни без врахування класичного формулювання фізики і теореми Лейбніца – Ньютона. Вочевидь це пряма (відрізок) або смужка, яка визначає положення кривої над віссю x. Якщо порівнювати дві ординати, то можна сказати, на якій ординаті похибки більша і, відповідно, ймовірність появи цих похибок менша. Тому цю ординату можна ще назвати ординатою імовірності (*а не самою імовірністю*) похибок в якійсь точці на осі x. При цьому кожна обчислена ордината має дві певні точки на цій осі.

Продовжимо аналізувати формулу правдоподібності взагалі. Згідно з відомостями з математики, параметр a_1 визначається класично: складається функція, береться похідна, вона прирівнюється до нуля і так далі. Але, що собою являє ця функція? Сама функція складається з добутку ординат. Якщо прийняти, що ордината – це все-таки не ймовірність, то отриманий добуток – це значення перемножених ординат, яке за своїм значенням стрімко зменшується в залежності від кількості вимірювань та значення СКП. Взагалі функцію можна скласти з відомих і невідомих умов, наприклад, $[\bar{V}]=0$: $(x_1-a_1)+(x_2-a_1)+...+(x_n-a_1)=0$.

Розкриваючи дужки, отримаємо: $a_1=\bar{x}=[x]/n$.

Також можна скласти і таку функцію (це не кращий варіант, а тільки для прикладу): $(x_1-a_1)+(x_2-a_1)+...+(x_n-a_1)=n$. Тоді $a_1=[x]/n$-1.

Стосовно загальної арифметичної середини, то і тут можна поставити таку умову: $[p_x\bar{V}] = 0$.

Тоді

$$p_{x_1}(x_1-a_1)+p_{x_2}(x_2-a_1)+...+p_{x_n}(x_n-a_1)=0. \quad (44)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$a_1=\bar{x}_3=\frac{[p_x x]}{[p_x]}.$$

І ще приклад функції:

$$f=[p_x\bar{V}\bar{V}]=p_{x_z}\bar{V}_1^2+p_{x_2}\bar{V}_2^2+...+p_{x_n}\bar{V}_n^2.$$

Візьмемо частинні похідні по кожному відхиленню від загальної арифметичної середини, скоротимо їх на 2 і просумуємо. Враховуючи умову (44), можна записати:

$$p_{x_1}\bar{V}_1+p_{x_2}\bar{V}_2+...+p_{x_n}\bar{V}_n=0.$$

Оскільки сума добутків ваг на відхилення дорівнює нулю, то можна сказати, що $[p_x\bar{V}\bar{V}]$ = min.

Наведені приклади не нові, але вони дають можливість стверджувати, що можна складати функції простіші, ніж формули Фішера, та одержувати обґрунтованіші висновки. При цьому вибором, зробленим ще Ґауссом щодо простої та загальної арифметичних середин, ми користуємось досі.

Отже, метод максимальної правдоподібності Фішера розглядається нами не як формальний математичний прийом, що застосовується для одержання статистичних оцінок, а з позицій аналізу і трактування його використання при обробленні результатів геодезичних вимірювань.

Висновки та пропозиції. Узагальнюючи наведене вище, можна зробити такі висновки та пропозиції:

1. Застосування простої і загальної арифметичних середин в ході математичного оброблення результатів геодезичних вимірів на сьогодні залишається найкращим підходом. А метод максимальної правдоподібності, як його обґрунтування, має певні проблеми з тлумаченням значення цієї функції.

2. Значення функції Фішера швидко змінюється і залежить від кількості вимірювань та значень СКП.

3. При значеннях СКП ≤ 0,24 функція правдоподібності Фішера для n вимірів набуває значення більше одиниці, тому називати цю величину ймовірністю сукупності похибок недоречно. Також функція правдоподібності для однієї величини, або умовна ймовірність, щільність, густота, ордината, при СКП 0,39 набуває значення більше одиниці. Тому називати її умовною або просто ймовірністю також недоцільно. І все-таки кожна назва має свій сенс. Але одне незаперечно – це ордината ймовірності (ордината кривої Ґаусса).

4. Показник степеня числа e у функції правдоподібності дорівнює половині надлишкових вимірів зі знаком мінус при будь-якому прийнятому значенні параметра a_1 (проста арифметична середина, загальна арифметична середина або значення, яке не дорівнює їм). Якщо за параметр a_1 береться значення, яке приймається за істинне, то показник степеня числа e дорівнюватиме половині кількості вимірів зі знаком мінус.

5. На значення функції правдоподібності, крім кількості вимірів, найбільше впливає значення самої СКП одного виміру при рівноточних вимірах і значення СКП нерівноточних вимірів однієї величини (параметри c і d відповідно).

6. Звісно, коли відхилення результатів вимірю-

вань обчислюються від простої та загальної арифметичних середин, то СКП мінімальні, оскільки мінімальні $[\overline{V}\overline{V}]$ і $[p_x\overline{V}\overline{V}]$. Але, враховуючи зміни функції від кількості вимірювань і наведених СКП, можна припустити, що ці зміни за своєю величиною незначні й говорити про максимум або мінімум функції недоцільно. Тобто стверджувати, що функція правдоподібності має максимальне значення, коли параметр a_1 дорівнює простій або загальній арифметичним серединам, – недоречно. Або тоді доведеться змінити погляд на значення цих величин і вважати, що, наприклад, 0,00001 – це значна зміна.

Література

1. *Берс, Л.* Математический анализ. Т. 1; пер. с англ. Л.И. Головиной; под ред. И.М. Яглома: учеб. пос. для вузов / Л. Берс. – М.: Высш. шк., 1975. – 519 с.
2. *Большаков, В.Д.* Городская полигонометрия. Уравнивание и основы уравнивания / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1979. – 303 с.
3. *Большаков, В.Д.* Теория ошибок наблюдений: учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
4. *Большаков, В.Д.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: учеб. пос. для вузов / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
5. *Видуев, Н.Г.* Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
6. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с.
7. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2005. – 236 с.
8. *Гайдаев, П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
9. *Ґаусс, К.Ф.* Избранные геодезические сочинения; под общ. ред. С.Г. Судакова Т. 1. Способ наименьших квадратов; под ред., с введен. Г.В. Багратуни / К.Ф. Гаусс. – М.: Изд-во геодез. лит-ры, 1957. – 152 с.
10. *Зазуляк, П.М.* Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Л.: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.
11. *Идельсон, Н.И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений / Н.И. Идельсон. – М.: Геодезиздат, 1947. – 359 с.
12. *Линник, Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 352 с.
13. *Лукьянов, В.Ф.* Расчеты точности инженерно-геодезических работ / В.Ф. Лукьянов. – М.: Недра, 1981. – 285 с.
14. *Мазмишвили, А.И.* Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
15. *Папазов, М.Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.
16. *Рябчій, В.А.* Обґрунтування принципу найменших квадратів / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – Вип. I. – С. 104-107.
17. *Рябчій, В.А.* Теорія похибок вимірювань: навчальний посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Дп.: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.
18. *Смирнов, Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белуги. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
19. *Фихтенгольц, Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во "Наука", 1969. – 800 с.
20. *Чеботарев, А.С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей: учебн. для геодез. вузов и ф-тов / А.С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Надійшла 08.07.13

* * *

УДК 528.3:551.509

Н. М. Турчин

ОЦІНЮВАННЯ ІНТЕГРОВАНОГО ПОКАЗНИКА ОСАДЖУВАНОЇ ВОДЯНОЇ ПАРИ ЗА ДАНИМИ GPS-ВИМІРЮВАНЬ ТА РАДІОЗОНДУВАННЯ

Для прогнозирования погоды используется показатель влажной составляющей зенитной тропосферной задержки. На его основе вычисляются значения осажденного водяного пара. В данной статье анализируются значения этого показателя, полученные в процессе обработки данных GPS-наблюдений и радиозондирования атмосферы.

For weather forecasting the wet component of zenith tropospheric delay index is used. The values of precipitation of water vapour based on it are calculating. The analysis of values of this index resulting from the GPS-observation and radiosonde data processing is made.

Постановка проблеми. Дослідження вологої складової зенітної тропосферної затримки в ході GPS-спостережень бажане для покращення прогнозування погодних і кліматичних явищ.

Інтегрований показник водяної пари IWV (Integrated Water Vapor) в атмосфері виводять із