копов, Г. Сидоренко, И. Тревого // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Нац. ун-т "Львівська політехніка". – 2005. – Вип. ІІ. – С. 26-33.

2. *Друзюк, В.* Сучасні геодезичні прилади і технології: науково-технічне метрологічне забезпечення / В. Друзюк, А. Мазур, І. Тревого, І. Цюпак // Метрологія та прилади. – 2010. – № 3. – С. 19-26.

3. *Тревого, І.* Аналіз зміни координат пунктів Яворівського наукового геодезичного полігона / І. Тревого, І. Цюпак, С. Савчук [та ін.] // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Нац. ун-т "Львівська політехніка". – 2009. – Вип. І. – С. 46-50.

4. *Тревого, І.С.* Вдосконалення еталонної геодезичної мережі наукового геодезичного полігона / І.С. Тревого, І.М. Цюпак, В.М. Друзюк, В.У. Волошин // Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS-технології: зб. наук. пр. XV Міжнар. симпоз. [Алушта (Крим), 13-18 верес. 2010 р.]. – Л., 2010. – С. 34-36.

5. *Тревого, І.* Забезпечення метрологічної атестації сучасної геодезичної техніки на науковому геодезичному полігоні / І. Тревого, І. Цюпак, В. Купко // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Вид.-во Львівської політехніки. – 2011. – Вип. ІІ. – С. 49-51.

6. *Тревого,* І.С. Сучасні вимоги до метрологічного забезпечення еталонної фундаментальної геодезичної мережі для повірки GNSS-приймачів / І.С. Тревого, І.М. Цюпак // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Вид.-во Львівської політехніки. – 2013. – Вип. І. – С. 40-42.

7. *Шануров, Г.А.* О геометрической структуре метрологического полигона для аттестации геодезических приемников ГНСС/ Г.А. Шануров // Геопрофи. – 2008. – № 1. – С. 62-64.

8. *Trevoho, I.S.* Metrological provide of geodetic networks for testing GNSS receiver / Trevoho I.S., Tretyak K.R., Tsyupak I.M. // Geophysical Research Abstracts. – Vol. 15. – EGU2013-5136, 2013. – Geodetic Congress the EGU General Assembly 2013. – 08-12 April 2013. – Vienna. – http://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2013/EGU2013-5136.pdf

9. *Trevoho, I.S.* Prospects of metrological provision linear geodetic of measurements on the geodetic test field / I.S. Trevoho, I.M. Tsyupak // Reports on Geodesy. – 2013. – Vol. 94. – No. 1. – Warsaw University of Technology. – Pp. 56-63.

Надійшла 12.02.14

* * *

УДК 528.06+528.1

В. А. Рябчій, В. В. Рябчій

ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНІХ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Проанализированы известные средние и свойства их отклонений, которые определены по результатам равноточных измерений одной величины. Описываются классификация этих средних на три группы, а также принципы установления неравенств и зависимостей между ними.

Known averages and their deviations determined according to results of equally accurate measurements of one value were analyzed. Classification of these averages into three groups as well as finding of inequalities and relations between them were described.

Постановка проблеми. Питання обчислення простої арифметичної середньої та особливостей відхилень від неї результатів вимірювань описане в багатьох підручниках і навчальних посібниках [2, 3, 5-7, 10, 12 та ін.].

У джерелі [8], крім простої та загальної арифметичної середніх, наводяться ще такі їх різновиди: геометрична $\bar{x}_g$ і гармонічна $\bar{x}_h$, які обчислюють за формулами

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}; \qquad (1)$$

$$\bar{x}_h = \frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}. \qquad (2)$$

Але, які властивості мають ці середні та їх відхилення, автор не наводить.

У праці [4] вказується, що, крім цих, є також інші середні, а саме квадратична x_s і степенева x_{ck}:

$$\bar{x}_s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}; \qquad (3)$$

$$\bar{x}_{ck} = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\Sigma x^k}. \qquad (4)$$

Аналіз досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми. М. Г. Відуєв і Г. С. Кондра в книзі [4] присвятили середнім цілий параграф. Дуже ретельно проаналізовано середні та описано різницю між тими середніми, які використовуються в статистиці й геодезії. Крім формул середніх (1-4), наведено цікаву нерівність

$$\bar{x}_h \le \bar{x}_g \le \bar{x}_a \le \bar{x}_s, \qquad (5)$$

де $\bar{x}_a$ – проста арифметична середина.

При цьому, що важливо, наводиться приклад використання гармонічної середньої в електротехніці (фізиці).

У джерелі [9] розглядаються формули нерівностей середніх (5). Більше ніяких відомостей про середні з рівноточних вимірів нема.

Е. Беккенбах та Р. Беллман у праці [1] зазначають: "...нерівність між арифметичними та геометричними середніми – лише одна з ланок у ланцюгу аналогічних нерівностей...". Але самі нерівності не вказуються.

Г. Г. Харді, Дж. Е. Літтльвуд і Г. Поліа у [13] вказують, що з урахуванням перестановок "середні типу $\Sigma\alpha = \Sigma\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = \frac{1}{n!}\Sigma! a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n}$ можна назвати симетричними середніми". Крім того, зазначається, що ці середні не порівнюються між собою, за винятком деяких умов. Але практичних прикладів не наведено.

Невирішені частини загальної проблеми. Прискіпливий читач може заявити, що різниці між наведеними вище середніми незначні. Так, це правда. Але дослідження результатів вимірювань – важлива і цікава задача як із теоретичної, так і з практичної точки зору. Тому в основу цієї статті лягли міркування відомих вчених М. Г. Відуєва і Г. С. Кондри: "У теорії похибок вимірів істотне місце має бути відведено і визначальним властивостям середніх, особливо при вивченні умов вимірювань" [4].

У даній статті умови вимірювань не розглядаються, а досліджуються тільки деякі середні, їх властивості та відповідні відхилення від результатів вимірів.

Постановка задачі (мета статті): використовуючи аналітичний метод досліджень, визначити, які властивості мають перелічені вище середні та їхні відхилення під час оброблення результатів рівноточних вимірювань у порівнянні з простою арифметичною серединою, а також перевірити одержані результати практичними (експериментальними) розрахунками.

Виклад основного матеріалу. Визначаємо СКП досліджуваних середніх. Формула СКП будь-якої середньої загалом виглядає так:

$$m_{\bar{x}} = m_x \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_n}\right)^2}, \qquad (6)$$

де $\bar{x}$ – відповідна середня; m_x – СКП результатів вимірювань, яка обчислюється для кожної середньої за формулою Бесселя:

$$m_x = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}. \qquad (7)$$

При цьому до відповідних букв будуть додаватись індекси, які позначатимуть середні, їхні СКП і відхилення.

Відхилення v результатів вимірювань від відповідних середніх $\bar{x}$ будемо обчислювати за формулою $v = x_i - \bar{x}$. Також обчислимо нормовані відхилення t і $\bar{t}$ з використанням СКП одного виміру m_x і відповідних середніх $m_{\bar{x}}$ за формулами $t = v/m_x$; $\bar{t} = v/m_{\bar{x}}$.

Квадрати нормованих відхилень результатів вимірів від відповідної середньої з використанням СКП одного виміру і відповідних середніх дорівнюватимуть:

$$t^2 = \frac{v^2}{m_x^2}; \quad \bar{t}^2 = \frac{v^2}{m_{\bar{x}}^2}.$$

Гармонічну середню обчислюємо за формулою (2). Часткові похідні становитимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_i} = \frac{n}{\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right)^2 \cdot x_i^2}. \qquad (8)$$

Чисельник і знаменник формули (8) помножимо на n, тоді СКП гармонічної середньої дорівнюватиме:

$$m_{\bar{x}_h} = m_{x_h} \cdot \frac{\bar{x}_h^2}{n} \sqrt{\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} + ... + \frac{1}{x_n^4}}.$$

Проведемо деякі обчислення. Їх результати занесено до табл. 1. Для скорочення записів та обчислень ранжирувані значення довжин у ній наведено без десятків і сотень метрів.

Таблиця 1. **Результати обчислення гармонічної середньої та похибок**

n	x_i, м	$\bar{x}_h$, м	v_h, мм	$v_h v_h$, мм^2	t_h	$\bar{t}_h$	t_h^2	$\bar{t}_h^2$
1	1,150	1,159957	-9,957	99,140	-1,259	-2,816	1,586	7,929
2	1,155		-4,957	24,571	-0,627	-1,402	0,393	1,965
3	1,160		0,043	0,002	0,005	0,012	0,000	0,000
4	1,165		5,043	25,433	0,638	1,426	0,407	2,034
5	1,170		10,043	100,864	1,270	2,840	1,614	8,067
$\sum$	5,800		0,216	250,009	0,027	0,061	4,000	19,996

При цьому: m_{x_h}=7,905841 мм, $m_{\bar{x}_h}$=3,535994 мм.

До речі, гармонічна середня (2) є основою для ряду гармонічно степеневих середніх, подібно як на основі простої арифметичної середини визначаються квадратична та степенева середні. Тільки у степеневих середніх на основі простої арифметичної середини показник степеня береться зі знаком плюс, а гармонічно степеневих середніх – зі знаком мінус.

Результати обчислення гармонічно степеневих середніх наведено далі у табл. 7.

Геометричну середню обчислюємо за формулою (1). Визначаємо СКП цього виду середньої. Значення часткових похідних будуть такими:

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_1} = \frac{1}{n}\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{\frac{1-n}{n}} x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_2} = \frac{1}{n}\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{\frac{1-n}{n}} x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_n} = \frac{1}{n}\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{\frac{1-n}{n}} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}.$$

Помножимо і поділимо часткові похідні послідовно на x_1, x_2, ..., x_n:

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_1} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1-n}{n}} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_1};$$
$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_2} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1-n}{n}} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_2}; \qquad (9)$$
$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_n} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1-n}{n}} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_n}.$$

Враховуючи загальну формулу обчислення СКП будь-якої середньої (6), формулу обчислення геометричної середньої (1) і часткові похідні (9), отримаємо таку формулу для обчислення СКП геометричної середньої:

$$m_{\bar{x}_g} = \frac{m_{x_g} \bar{x}_g^n}{n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1-n}{n}} \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}}. \quad (10)$$

Виконаємо ще деякі обчислення. Результати зведемо в табл. 2.

Таблиця 2. **Результати обчислення геометричної середньої та похибок**

n	x_i, м	$\bar{x}_g$, м	v_g, мм	$v_g v_g$, мм^2	t_g	$\bar{t}_g$	t_g^2	$\bar{t}_g^2$	L_{xi}
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	1,150	1,159978	-9,978	99,569	-1,262	-2,822	1,593	7,965	319,895
2	1,155		-4,978	24,785	-0,630	-1,408	0,397	1,983	318,510
3	1,160		0,022	0,000	0,003	0,006	0,000	0,000	317,137
4	1,165		5,022	25,216	0,635	1,420	0,403	2,017	315,776
5	1,170		10,022	100,432	1,268	2,834	1,607	8,034	314,427
Σ	5,800		0,108	250,002	0,014	0,030	4,000	19,999	1595,745

При цьому: m_{x_g}=7,905731 мм, $m_{\bar{x}_g}$= 3,535682 мм, $L_{\bar{x}_g}$=317,143.

Після перетворень (10) СКП геометричної середньої можна обчислити і за такою формулою:

$$m_{\bar{x}_g} \cong m_{x_g} \bar{x}_g^n \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n\right)^{\frac{1-n}{n}} \sqrt{\frac{1}{\Sigma x^2}}. \quad (11)$$

Значення похибки, отримане за формулою (11), буде: $m_{\bar{x}_g}$= 3,535419 мм. За цією формулою можна контролювати обчислення СКП геометричної середньої. Формула (11) має добрий збіг з (10), якщо різниці між результатами вимірів x_i незначні.

Для обчислення СКП функції геометричної середньої (1) при великих значеннях результатів вимірів і значної кількості вимірів зручніше використовувати логарифмічну форму, наведену в [12]. Оскільки виміри рівноточні, то в загальному вигляді для даного випадку її можна записати як:

$$m_{\bar{x}_g} = \frac{m_{x_g}}{nL_{\bar{x}_g}} \sqrt{L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 + \dots + L_{x_n}^2}, \quad (12)$$

де $L_{\bar{x}_g}$ і L_{x_i} – зміни значень логарифмів геометричної середньої і результатів вимірів.

Зміни логарифмів обчислюємо за формулою

$$L_x = \frac{M \cdot 10^k}{x}, \quad (13)$$

де M=0,43429448 – модуль переходу від натуральних до десяткових логарифмів; k – показник степеня, що передає, в яких знаках логарифма обчислюються зміни.

Для даних у табл. 2 приймемо, що зміна значень результатів вимірів і геометричної середньої дорівнюють 1 мм, а k=6.

Визначивши зміни логарифмів за виразом (13) (табл. 2, графа 10), обчислимо СКП за формулою (12). У результаті отримаємо те саме значення, що і за виразом (10).

Виконаємо перетворення формули (12). Винесемо з-під кореня чисельник виразу (13) і отримаємо:

$$m_{\bar{x}_g} = \frac{m_{x_g} M \cdot 10^k}{nL_{\bar{x}_g}} \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}}. \quad (14)$$

Тепер вираз (14) можна скоротити на величину $M \cdot 10^k$, одержавши таку формулу:

$$m_{\bar{x}_g} = \frac{m_{x_g} \cdot \bar{x}_g}{n} \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}}. \quad (15)$$

Отже, за формулою (15) отримаємо те саме значення, що і за формулами (10 і 12).

Квадратичну середню обчислюємо за виразом (3). Часткові похідні матимуть вигляд:

$$\frac{\partial x_s}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}. \quad (16)$$

Підставивши часткові похідні (16) у формулу (6) та виконавши деякі перетворення, матимемо такі формули для обчислення СКП квадратичної середньої:

$$m_{\bar{x}_s} = \frac{m_{x_s}}{n_{\bar{x}_s}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}; \quad (17)$$

$$m_{\bar{x}_s} = m_{x_s} \frac{\sqrt{n}}{n}; \quad m_{\bar{x}_s} = \frac{m_{x_s}}{\sqrt{n}}. \quad (18)$$

Звісно, друга формула (18) простіша, і нею треба користуватись. Вона збігається з формулою обчислення СКП простої арифметичної середньої. Формула (17) цікава тим, що, як і у формулах (10, 11 і 15), тут беруть участь (або присутні) відповідні середні.

Результати обчислень зведено у табл. 3.

Таблиця 3. **Результати обчислення квадратичної середньої та похибок**

n	x_i, м	$\bar{x}_s$, м	v_s, мм	$v_s v_s$, мм^2	t_s	$\bar{t}_s$	t_s^2	$\bar{t}_s^2$
1	1,150	1,160022	-10,022	100,431	-1,268	-2,835	1,607	8,034
2	1,155		-5,022	25,216	-0,635	-1,420	0,403	2,017
3	1,160		-0,022	0,000	-0,003	-0,006	0,000	0,000
4	1,165		4,978	24,785	0,630	1,408	0,397	1,983
5	1,170		9,978	99,569	1,262	2,822	1,593	7,965
Σ	5,800		-0,108	250,002	-0,014	-0,030	4,000	20,000

При цьому m_{x_s}=7,905731 мм, $m_{\bar{x}_s}$=3,535550 мм.

Степеневу середню визначаємо з формули (4). Для прикладу приймемо, що показник степеня дорівнює чотирьом: k=4. Тоді вихідна формула матиме такий вигляд:

$$\bar{x}_{c_4} = \left(\frac{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}{n} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Часткові похідні дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial x_{c_4}}{\partial x_i} = \frac{x_i^3}{n\left(\frac{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}{n} \right)^{\frac{3}{4}}}.$$

Тоді СКП степеневої середньої становитиме:

$$m_{\bar{x}_{c_4}} = \frac{m_{x_{c_4}} \sqrt{x_1^6 + x_2^6 + \ldots + x_n^6}}{n\left(\frac{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}{n} \right)^{\frac{3}{4}}}.$$

Результати обчислень відображено у табл. 4.

Таблиця 4. **Результати обчислення степеневої середньої та похибок**

n	x_i, м	$\bar{x}_{c_4}$, м	v_{c_4}, мм	$v_{c_4}v_{c_4}$, мм^2	t_{c_4}	$\bar{t}_{c_4}$	$t_{c_4}^2$	$\bar{t}_{c_4}^2$
1	1,150	1,160065	-10,065	101,297	-1,273	-2,846	1,621	8,101
2	1,155		-5,065	25,651	-0,641	-1,432	0,410	2,051
3	1,160		-0,065	0,004	-0,008	-0,018	0,000	0,000
4	1,165		4,935	24,358	0,624	1,396	0,390	1,948
5	1,170		9,935	98,711	1,257	2,810	1,579	7,894
Σ	5,800		-0,323	250,021	-0,041	-0,091	4,000	19,996

При цьому $m_{x_{c_4}}$=7,906025 мм, $m_{\bar{x}_{c_4}}$=3,536076 мм.

Поняття простої арифметичної середньої добре відоме всім читачам, але вважаємо за необхідне подати формули і результати обчислень для зручності подальшого порівняння результатів досліджень. Формула для обчислення:

$$\bar{x}_a = \frac{\Sigma x}{n}.$$

Середня квадратична похибка одного виміру обчислюється за формулою Бесселя (7), а СКП простої арифметичної середньої з виразу

$$m_{\bar{x}a} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}.$$

Результати обчислень наведено у табл. 5.

Таблиця 5. **Результати обчислення простої арифметичної середньої та похибок**

n	x_i, м	$\bar{x}_a$, м	v_a, мм	$v_a v_a$, мм^2	t_a	$\bar{t}_a$	t_a^2	$\bar{t}_a^2$
1	1,150	1,160000	-10,000	100,000	-1,265	-2,828	1,600	8,000
2	1,155		-5,000	25,000	-0,632	-1,414	0,400	2,000
3	1,160		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	1,165		5,000	25,000	0,632	1,414	0,400	2,000
5	1,170		10,000	100,000	1,265	2,828	1,600	8,000
Σ	5,800		0,000	250,000	0,000	0,000	4,000	20,000

При цьому m_{x_a}=7,905694 мм, $m_{\bar{x}_a}$=3,535534 мм.

Для зручності порівняння отриманих результатів (див. табл. 1-5) зведемо їх в одну табл. 6.

Таблиця 6. **Зведені результати обчислень середніх та їх показників**

n	Назва середньої	Значення середньої $\bar{x}$, м	$\sum v$, мм	$\sum v^2$, мм^2	m_x, мм	$m_{\bar{x}}$, мм	$\sum t$	$\sum t^2$	$\sum \bar{t}$	$\sum \bar{t}^2$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
1	Гармонічна	1,159957	0,216	250,009	7,905841	3,535994	0,027	4	0,061	19,996
2	Геометрична	1,159978	0,108	250,002	7,905731	3,535682	0,014	4	0,030	19,999
3	Проста арифметична	1,160000	0,000	250,000	7,905694	3,535534	0,000	4	0,000	20,000
4	Квадратична	1,160022	-0,108	250,002	7,905731	3,535550	-0,014	4	-0,030	20,000
5	Степенева	1,160065	-0,323	250,021	7,906025	3,536076	-0,041	4	-0,091	19,996

Аналізуючи за табл. 6 одержані результати обчислень середніх та їх показників і беручи за еталон обчислення простої арифметичної середньої, можна виявити такі закономірності:

1) сума відхилень результатів вимірювань від відповідних середніх становитиме: $\Sigma v = -n(\bar{x} - \bar{x}_a)$;

2) різниця сум квадратів відхилень результатів вимірювань від відповідної середньої та простої арифметичної середньої дорівнюватиме: $\Sigma v^2 - \Sigma v_a^2 = -n(\bar{x} - \bar{x}_a)^2$;

3) сума нормованих відхилень результатів вимірювань від відповідної середньої з використанням СКП одного виміру й СКП самої середньої будуть:

$$\Sigma t = \frac{\Sigma v}{m_x}; \qquad \Sigma \bar{t} = \frac{\Sigma v}{m_{\bar{x}}}.$$

Коли відхилення результатів вимірювань від простої арифметичної середньої використовуються для обчислення нормованих відхилень, то сума їх квадратів дорівнює кількості надлишкових вимірів. Це підтверджують значення всіх відповідних середніх (табл. 6, графа 9). Тобто сума квадратів нормованих відхилень результатів вимірів од відповідної середньої з використанням СКП одного виміру буде такою:

$$\Sigma t^2 = \frac{\Sigma v^2}{m_x^2} = n - 1. \tag{19}$$

Якщо для обчислення нормованих відхилень використовувати СКП самих середніх, то сума квадратів нормованих відхилень від простої арифметичної середньої дорівнюватиме:

$$\Sigma \bar{t}^2 = \frac{\Sigma v^2}{m_{\bar{x}}^2} = n(n-1). \tag{20}$$

Сума квадратів нормованих відхилень в інших середніх відрізнятиметься від значення $n(n-1)$ на різну, але невелику величину (табл. 6, графа 11).

Контролювати суми квадратів нормованих відхилень можна за такими формулами:

$$\Sigma \bar{t}^2 = \frac{\Sigma v^2}{m_{\bar{x}}^2} \tag{21}$$

або

$$\Sigma \bar{t}^2 = \frac{n-1}{K^2}. \tag{22}$$

де K, що дорівнює $m_x/m_{\bar{x}}$ – коефіцієнт відношення СКП середньої до відповідної СКП одного виміру.

Усі ці закономірності підкреслюють переваги передусім простої арифметичної середньої перед іншими.

Значення відповідних середніх (табл. 6, графа 2) підтверджують нерівність (5), але до цих даних додається степенева середня. З урахуванням останньої нерівність виглядатиме так:

$$\bar{x}_h \le \bar{x}_g \le \bar{x}_a \le \bar{x}_s \le \bar{x}_{c_4}. \qquad (23)$$

Відмітимо, що в результаті великої кількості додаткових розрахунків значень гармонічної, геометричної, простої арифметичної, квадратичної та степеневої середніх при інших вихідних даних спостерігається відхилення в показниках цих середніх залежно від різниці між максимальними і мінімальними значеннями вихідних даних, їх кількості та величини.

Якщо брати абсолютне значення Σv, то сума відхилень результатів вимірів від простої арифметичної середньої є найкращою, оскільки дорівнює нулю (табл. 6, графа 4). Значення Σv відповідних середніх з урахуванням знаків утворюють нерівність, протилежну нерівності (23):

$$\Sigma v_{c_4} \le \Sigma v_s \le \Sigma v_a \le \Sigma v_g \le \Sigma v_h.$$

Значення СКП вимірів відповідних середніх (табл. 6, графа 6) утворюють таку нерівність:

$$m_{x_a} \le m_{x_g} \le m_{x_s} \le m_{x_h} \le m_{x_{c_4}}.$$

Значення СКП самих середніх (табл. 6, графа 7) утворюють аналогічну нерівність:

$$m_{\bar{x}_a} \le m_{\bar{x}_g} \le m_{\bar{x}_s} \le m_{\bar{x}_h} \le m_{\bar{x}_{c_4}}.$$

Порівнюючи отримані нерівності, можна виявити, що найкращою є проста арифметична середня, але різниці між середніми та іншими показниками невеликі, навіть, можна сказати, незначні.

Якщо не враховувати простоту обчислень, то інші значення теж годяться для подальшого використання, хоча отримані результати досліджувались насамперед у теоретичному аспекті, але й практичне значення не виключалося.

Проаналізувавши всі наведені формули обчислення середніх при рівноточних вимірюваннях, ми виділили три групи формул. До першої відносимо формули, в яких при обчисленні середніх значення результатів вимірювань приймаються у додатному степені. Найкраща тут формула простої арифметичної середньої. У цю групу входять також квадратична середня і всі степеневі.

Загальна формула для цієї групи відповідає виразу (4). Якщо k=1, то це буде формула простої арифметичної середньої, якщо k=2, – степеневої квадратичної, якщо k=3, – степеневої кубічної, якщо k=4, – степеневої біквадратичної середньої і т. д.

До другої групи можна віднести формули, в яких при обчисленні середніх результати вимірювань подаються у від'ємному степені. Перевагу серед них варто віддати формулі (2). Їй можна присвоїти назву проста гармонічна середня (k=1), а подальші – це гармонічно-квадратична (k=2), гармонічно-кубічна (k=3), гармонічно-біквадратична (k=4) середні тощо.

До третьої групи слід віднести формули, в яких значення результатів вимірювань перемножуються. Найкращою тут вважаємо формулу (1) під назвою проста геометрична середня (k=1), а наступні – геометрична квадратична (k=2), геометрична кубічна (k=3), геометрична біквадратична (k=4) і т. д.

Проведений аналіз формул усіх трьох груп показав, що середні кожної групи поширюються однаково, і якщо показник степеня більший за одиницю, і якщо він менший одиниці. Загалом формули для обчислення середніх будуть такі:

- група простої арифметичної середньої:

$$\bar{x}_{ack} = \left(\frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}; \qquad (24)$$

- група простої гармонічної середньої:

$$\bar{x}_{hck} = \left(\frac{n}{x_1^{-k} + x_2^{-k} + \ldots + x_n^{-k}} \right)^{\frac{1}{k}};$$

- група простої геометричної середньої:

$$\bar{x}_{gck} = \left(x_1^k \cdot x_2^k \cdot \ldots \cdot x_n^k \right)^{\frac{1}{nk}}. \qquad (25)$$

Після деяких перетворень виразу (25) одержимо формулу (1).

У табл. 7 занесено результати обчислень степеневих середніх усіх трьох груп для випадків, коли показник степеня менший і більший за одиницю. При цьому показник степеня k для простих арифметичної і геометричної середніх береться зі знаком плюс, а для простої гармонічної – зі знаком мінус.

Таблиця 7. **Значення степеневих середніх для груп простої арифметичної, простої гармонічної і простої геометричної середніх**

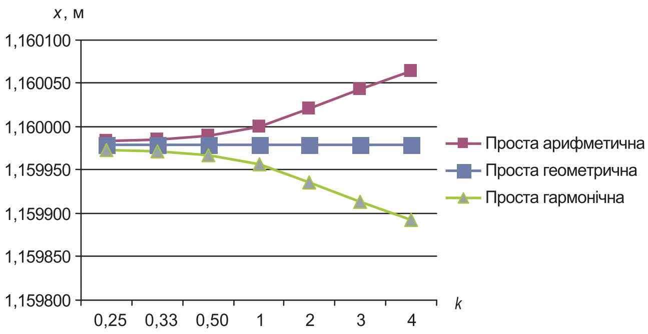
n	Група	Значення середніх при						
		k=1/4	*k*=1/3	*k*=1/2	*k*=1	*k*=2	*k*=3	*k*=4
1	Проста арифметична середя	1,159984	1,159986	1,159989	1,160000	1,160022	1,160043	1,160065
2	Проста гармонічна середня	1,159973	1,159971	1,159968	1,159957	1,159935	1,159914	1,159892
3	Проста геометрична середня	1,159978	1,159978	1,159978	1,159978	1,159978	1,159978	1,159978

Для наочності даних, наведених у табл. 7, побудуємо графіки залежностей середніх усіх трьох груп від показника степеня (див. малюнок).

Значення середніх групи простої арифметичної середньої при k>1 зростають по відношенню до значень простої арифметичної середньої, і навпаки, зменшуються, коли k<1. Це виражається нерівністю:

$$\bar{x}_{ac_{\frac{1}{4}}} \le \bar{x}_{ac_{\frac{1}{3}}} \le \bar{x}_{ac_{\frac{1}{2}}} \le \bar{x}_a \le \bar{x}_{ac_2} \le \bar{x}_{ac_3} \le \bar{x}_{ac_4}. \qquad (26)$$

У середніх групи простої гармонічної середньої



Графіки залежностей середніх усіх трьох груп
від значення степеня

залежність значень від k відносно значення простої гармонічної середньої протилежне залежності (26) значень групи простої арифметичної середньої:

$$\bar{x}_{hc\frac{1}{4}} \ge \bar{x}_{hc\frac{1}{3}} \ge \bar{x}_{hc\frac{1}{2}} \ge \bar{x}_h \ge \bar{x}_{hc_2} \ge \bar{x}_{hc_3} \ge \bar{x}_{hc_4}. \qquad (27)$$

У групи простої геометричної середньої згідно з формулами (1 або 25) незалежно від k значення середніх зберігаються однаковими:

$$\bar{x}_{gc\frac{1}{4}} = \bar{x}_{gc\frac{1}{3}} = \bar{x}_{gc\frac{1}{2}} = \bar{x}_g = \bar{x}_{gc_2} = \bar{x}_{gc_3} = \bar{x}_{gc_4}. \qquad (28)$$

І при цьому при збільшенні значення k нерівності (26 і 27) та рівність (28) будуть витримуватись. Але якщо показник степеня буде наближатись до нуля, то розбіжності між значеннями цих середніх будуть зменшуватись, а якщо наближатиметься до нескінченності, то вони збільшуватимуться.

Між простою арифметичною, простою геометричною і простою гармонічною середніми при k=1 виявлено цікавий взаємозв'язок:

$$\bar{x}_a \cong \frac{\bar{x}_g^2}{\bar{x}_h}. \qquad (29)$$

Розбіжності між лівою і правою частинами рівняння (29) тим менші, чим менша різниця між максимальним і мінімальним значеннями результатів вимірювань. Для нашого прикладу (табл. 6) значення простої арифметичної середньої, обчислене за виразом (29), становить: $\bar{x}_a$=1,160000001. Таким чином, за цією формулою можна обчислювати і контролювати визначення простих арифметичної, геометричної та гармонічної середніх. Але взаємозв'язок (29) не розповсюджується на відповідні степеневі середні усіх трьох груп при значенні k, відмінному від одиниці.

Виявлено і таку цікаву залежність: якщо різниці між значеннями вимірів незначні, то значення простої геометричної середньої знаходиться приблизно посередині між значеннями простих арифметичної та гармонічної середніх, тобто

$$\bar{x}_g \cong \frac{\bar{x}_h + \bar{x}_a}{2}. \qquad (30)$$

Враховуючи вирази (29) і (30), можна записати таку приблизну рівність:

$$\frac{\bar{x}_h + \bar{x}_a}{2} \cong \sqrt{\bar{x}_h \bar{x}_a}. \qquad (31)$$

Ліва частина даної формули завжди буде більша за праву, за винятком, коли $\bar{x}_h$=$\bar{x}_a$. Це підтверджується існуючою нерівністю між арифметичною і геометричною середніми [1]:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}. \qquad (32)$$

де x_1, x_2, ..., x_n – будь-які додатні числа.

Треба відзначити, що при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ нерівність (32) набуває рівності.

Для перевірки формул (29-31) було виконано додаткові обчислення значень середніх при інших вихідних даних. У результаті встановлено, що коли розбіжність між максимальними і мінімальними вимірами до 0,1, то нерівності у наведених формулах не перевищують 0,001, а коли ця різниця наближається до 1, то вони не перевищують 0,01. Але збіжність результатів обчислень за формулою (31) гірша, ніж за формулами (29) і (30). Збільшення кількості вимірювань та величин їх значень покращують цю збіжність.

І, наостанок, про застосування середніх усіх трьох груп. Найчастіше використовується проста арифметична середня. Вираз у дужках формули (24) застосовується для обчислень за емпіричними формулами, які в свою чергу необхідні для обчислення ексцесу і показника асиметрії. Фактично добре відома формула Ґаусса для обчислення СКП вимірів за істинними похибками є квадратична середня, а дисперсія – це квадратична середня в квадраті. Також можна провести аналогію з нерівноточними вимірами, наприклад, формула обчислення СКП одиниці ваги за істинними похибками.

Інші дві групи середніх на сьогодні в геодезичних дослідженнях практично не застосовуються. Але, згідно з [1], у математиці функцію арифметико-геометричної середньої дослідив ще Ґаусс, і ця функція грає важливу роль у теорії еліптичних функцій.

Висновки та пропозиції. 1. Одержані результати по досліджених середніх дають можливість класифікувати їх на три групи: проста арифметична, проста гармонічна і проста геометрична. Перше місце відводимо простій арифметичній середній.

2. Встановлено нерівність між значеннями середніх у групах простих арифметичної (26) та гармонічної (27) середніх і рівність у групі простої геометричної середньої (28).

3. Для всіх середніх сума квадратів нормованих відхилень дорівнює кількості надлишкових вимірів, коли використовуються середні квадратичні похибки одного виміру (19). Якщо використовується СКП самих середніх, то сума квадратів таких нормованих відхилень при використанні простої арифметичної середньої дорівнює добутку кількості вимірювань на кількість надлишкових вимірів (20). При використанні інших середніх суму квадратів нормованих відхилень можна визначати і контролювати за формулами (21) або (22).

4. Встановлено взаємозв'язок між простими арифметичною, гармонічною та геометричною середніми (29-31).

5. Наразі всі середні мають однакове застосування. Деякі мають тільки теоретичне значення. Але будемо пам'ятати, що теорія завжди передує практиці. Враховуючи безмежність результатів вимірювань та взаємодію чисел між собою, припускаємо, що не всі середні розглянуто в цій статті і не всі середні ще визначені, тому й переконані: подальші дослідження у даному напрямі реальні. Автори будуть раді, якщо у розвиток цієї статті інші науковці опублікують матеріали про нові середні, визначені за результатами рівноточних вимірювань однієї величини.

Перспектива подальших досліджень полягає у визначенні та аналізі середніх за результатами нерівноточних вимірювань однієї величини, а також їхніх властивостей.

Література

1. *Беккенбах, Э.* Неравенства; пер. с англ. Г.И. Басса, В.И. Левина, Г.А. Шадрина; под ред. В.И. Левина / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М.: Изд-во "Мир", 1965. – 276 с.
2. *Большаков, В.Д.* Теория ошибок наблюдений: учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
3. *Большаков, В.Д.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: учеб. пос. для вузов / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
4. *Видуев, Н.Г.* Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
5. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с.
6. Г*айдаев, П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
7. *Зазуляк, П.М.* Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Л.: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.
8. *Мазмишвили, А.И.* Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
9. *Математическая* энциклопедия; гл. ред. И.М. Виноградов. – Т. 3. – М.: Сов. энцикл., 1982. – 1184 с., ил.
10. *Папазов, М.Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.
11. *Рябчій, В.А.* Обгрунтування принципу найменших квадратів / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – Вип. I. – С. 104-107.
12. *Рябчій, В.А.* Теорія похибок вимірювань: навчальний посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Дн-ськ: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.
13. *Харди, Г.Г.* Неравенства; пер. с англ. В.И. Левина; с доп. В.И. Левина, С.Б. Стечкина / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – 456 с.

Надійшла 14.02.14