



## АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ЧАСТОТИ РОЗТАШУВАННЯ ГРАВІМЕТРИЧНИХ ПУНКТІВ УЗДОВЖ ЛІНІЙ ВИСОКОТОЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ

*На основі аналізу публікацій різних авторів, інструктивних матеріалів, а також предыдущих авторських досліджень гравіметричного забезпечення проведення високоточного нивелювання в сучасних умовах поставлен вопрс об оптимальній частоті розміщення гравіметричних пунктів вздовж ліній високоточного нивелювання.*

*Based on the analysis of publications by different authors, guidelines and author's previous researches in gravimetric support of high-precision leveling under current conditions the question regarding density of gravimetric points along the line of high-precision leveling is discussed.*

**Вступ.** Як відомо, вихідними даними для встановлення висотного положення точок фізичної поверхні Землі є результати геометричного, гідростатичного й океанографічного нивелювання та вимірювання прискорення вільного падіння. За цими даними визначають висоти пунктів у певній системі висот та їх зміни з плином часу. Таке висотне положення точок у полі прискорення вільного падіння однозначно виражається геопотенціальним числом  $W_0 - W_P = \int g dh$  або роботою, необхідною для того, щоб перемістити одиничну масу з відлікової рівневої поверхні  $W = W_0$  на рівневу поверхню  $W = W_P$  точки  $P$ . Знаючи геопотенціальне число, можна перейти до будь-якої системи висот. До речі, геопотенціальне число безпосередньо не визначають, а виводять його з вимірюваних перевищень  $dh$  і значень прискорення вільного падіння  $g$  [11].

Отримані при геометричному нивелюванні перевищення залежать від траси нивелювання. Врівноваження нивелірних мереж виконують з використанням різниць нормальних висот або геопотенціальних чисел. Наведемо деякі дані про врівноваження Об'єднаної Європейської нивелірної мережі UELN (United European Levelling Network). Її основу складає мережа UELN-73, врівноважена у 1981 році. Вона об'єднує нивелірні мережі 14-ти європейських держав і включає 768 пунктів та 76 рівнево-мірних станцій. Загальна протяжність ліній нивелювання – 90 552 км. Вихідним пунктом мережі є Амстердамський футшток [8].

Урівноваженням 1981 р. не було охоплено нивелірні мережі скандинавських країн (Норвегія, Швеція, Фінляндія), оскільки земна кора тут помітно підіймається. Нивелірні мережі решти 11-ти країн врівноважено параметричним способом. У результаті отримано геопотенціальні числа 471-го репера зі стандартними похибками від 0,004 до 0,047 кГал·м.

Після цього мережа UELN неодноразово врівноважувалась з включенням нивелірних мереж країн Скандинавського півострова і Східної Європи. Унаслідок створено Європейську вертикальну референцну систему – EVRS (European Vertical Reference System) в реалізації EVRF-2000 віднос-

но Амстердамського футштока. Для переходу від Амстердамської до Балтійської системи висот 1977 р. рекомендують використовувати таке співвідношення:

$$h_{\text{Ам.}} - h_{\text{Кр.}} = 0,15 \text{ м.}$$

В Україні використовується саме Балтійська система висот 1977 р. (вихідний пункт – Кронштадт). Вся високоточна нивелірна мережа країни, а це 11 975 км ліній нивелювання I класу та 11 800 км II класу, спирається на один вихідний пункт, не має зовнішнього контролю та врівноважена як вільна система [5]. При інтегруванні країни в світову та європейську економічні системи необхідно враховувати рекомендації Європейської підкомісії Міжнародної асоціації геодезії (EUREF), а саме:

- розвинути головну висотну основу з урахуванням проєктів EUVN (European United Vertical Network – Європейська об'єднана вертикальна мережа) та EVRS (Європейська вертикальна референцна система);

- ув'язати Державну нивелірну мережу країни з нивелірними мережами сусідніх європейських країн у рамках виконання проєкту UELN (Європейська нивелірна мережа).

**Аналіз досліджень і публікацій, що стосуються даної проблеми.** Питання про необхідну частоту гравіметричних пунктів уздовж ліній нивелювання добре висвітлене в геодезичній літературі. Спільним для авторів усіх праць є розуміння необхідності поділу районів проведення нивелірних робіт на рівнинні, горбисті та гірські в залежності від середнього ухилу земної поверхні, оскільки вимоги до частоти розташування гравіметричних пунктів будуть значно вищими в районах зі складними рельєфом та геологічною будовою. Про це писали Л. П. Пеллінен, Г. Д. Сафонов, J. Vokun, С. Bernatzki, М. І. Юркіна, Е. І. Кроткова [9,10,12,14,15]. Узагальнили проведені раніше дослідження В.Ф. Єремєєв та М. І. Юркіна у монографії [4].

Однак сьогодні у зв'язку з появою приладів з досить високими точнісними характеристиками постало питання про оцінювання гравіметричного забезпечення високоточного нивелювання в ході геодезичних та гравіметричних робіт.



**Виклад основного матеріалу.** Для обчислення нормальних висот точок фізичної поверхні Землі використовують формули В. В. Броваря [1,2]:

$$\begin{aligned} H^\gamma &= \frac{(W_0 - W_A)}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^A g dh; \\ \gamma_m &= \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \cdot \frac{H^\gamma}{2}; \\ \gamma_0 &= \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B + \dots); \\ \beta &= \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}; \quad \beta_1 = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $W_0 - W_A$  – геопотенціальне число;  $\gamma_m$  – інтегральне середнє значення нормального прискорення вільного падіння;  $\gamma_0$  – нормальне значення прискорення вільного падіння на рівневому еліпсоїді;  $\partial \gamma / \partial H$  – нормальне значення вертикального градієнта прискорення вільного падіння;  $\beta$ ,  $\beta_1$  – параметри нормальної формули прискорення вільного падіння;  $\alpha$  – полярне стиснення;  $\gamma_p$ ,  $\gamma_e$  – значення прискорення вільного падіння на поверхні нормальної Землі відповідно на полюсі та екваторі.

На практиці, як правило, обчислюють різниці нормальних висот між реперами нівелірного ходу, методику визначення яких розробив В. Ф. Єремєєв [3]. Елементарну різницю  $\partial H^\gamma$  нормальних висот можна знайти на основі диференціювання виразу (1):

$$dH^\gamma = \frac{1}{\gamma_m} g dh - \frac{d\gamma_m}{\gamma_m} H^\gamma. \quad (2)$$

Виконаємо перетворення першого члена правої частини виразу (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m} g dh &= \frac{dh}{\gamma_m} (\gamma_m + g - \gamma + \gamma - \gamma_m) = \\ &= dh + \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dh + \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma_m} dh, \end{aligned}$$

а для нормального значення прискорення вільного падіння  $\gamma$  запишемо:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dH} H^\gamma.$$

Тоді

$$\gamma - \gamma_m = \frac{H^\gamma}{2} \cdot \frac{d\gamma}{dH}; \quad d\gamma_m = d\gamma_0 + \frac{d\gamma}{dH} \cdot \frac{dH^\gamma}{2}.$$

Елементарну різницю нормальних висот запишуть у вигляді:

$$dH^\gamma = dh - \frac{H^\gamma}{\gamma_m} d\gamma_0 + \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dh + \frac{d\gamma}{dH} \cdot \frac{H^\gamma}{2\gamma_m} (dh - dH^\gamma). \quad (3)$$

Останній член виразу (3) не перевищує 0,004 мм навіть при  $H=10$  км і  $(g-\gamma)=500$  мГал. Тому

$$dH^\gamma = dh - \frac{H^\gamma}{\gamma_m} d\gamma_0 + \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dh. \quad (4)$$

Отже, різницю нормальних висот між віддалени-

ми точками (реперами високоточного нівелювання) можна отримати після інтегрування формули (4):

$$H_B^\gamma - H_A^\gamma = \int_A^B dh - \int_A^B \frac{H^\gamma}{\gamma_m} d\gamma_0 + \int_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dh. \quad (5)$$

Другий член правої частини виразу (5) враховує нахил рівневих поверхонь нормального поля до поверхні еліпсоїда, а третій – незбігання рівневих поверхонь реального і нормального полів. Суму перших двох членів називають наближеною висотою, для якої достатньо виконати геометричне нівелювання і врахувати непаралельність нормальних рівневих поверхонь. Для того щоб перейти від вимірних перевищень до різниць нормальних висот, необхідно знати гравіметричні аномалії у вільному повітрі в кожній точці нівелірного ходу. Високоточне нівелювання виконують на трасах з малими ухилами, для яких перевищення  $dh$  є невеликими і гравіметричні аномалії можна приймати як середні на деякому інтервалі лінії нівелювання. Частота розміщення гравіметричних пунктів уздовж лінії нівелювання залежатиме від величини гравітаційного поля, величини перевищення і, очевидно, від точності нівелювання.

Точність обчислення третього члена правої частини виразу (5) залежатиме від точності обчислення аномалій прискорення вільного падіння. Похибку обчислення можна отримати з виразу для обчислення різниці нормальних висот за результатами геометричного нівелювання:

$$H_B^\gamma - H_A^\gamma = \sum_A^B \Delta h_w - \sum_A^B \frac{(\gamma_0^{n+1} - \gamma_0^n)}{\gamma_m} H_m + \sum_A^B \frac{(g - \gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w. \quad (6)$$

Результати гравіметричного знімання при виконанні високоточного геометричного нівелювання використовуються для визначення поправок у виміряні перевищення за формулою

$$\sigma = \sum_{i=1}^n s_i \operatorname{tg} \beta_i \frac{(g - \gamma)_m^i}{\gamma_m}. \quad (7)$$

Одну з перших спроб оцінювання частоти розміщення гравіметричних пунктів при нівелюванні здійснив Л. П. Пеллінен. Він запропонував розбивати лінію нівелювання на  $n$  однакових частин так, щоб посередині кожного її відрізка розташовувався гравіметричний пункт з точно визначеною аномалією у вільному повітрі  $(g-\gamma)$ , а величину перевищення  $dh$  замінювати добутком  $\operatorname{stg} \beta$ . Тоді гравіметричну поправку можна виразити так:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n s_i \operatorname{tg} \beta_i \frac{(g - \gamma)_m^i}{\gamma_m},$$

де  $s_i$  – довжина  $i$ -го відрізка;  $\operatorname{tg} \beta_i$  – ухил ділянки лінії нівелювання;  $(g-\gamma)_m^i$  – середнє значення аномалії прискорення вільного падіння на ділянці  $s_i$ .

Значення аномалій прискорення вільного падіння при цьому можна отримати лінійним інтерполюванням. Приймаючи похибку за аномальність та кут нахилу однаковими на всіх відрізках, похибку нормальної висоти, зумовлену імовірною неточністю гравіметричного знімання, можна зобразити так:



$$\delta H_Q = \frac{\delta(g-\gamma)}{\gamma_m} \text{tg}\beta \sqrt{L \cdot s},$$

де  $\delta(g-\gamma)$  – похибка аномалії прискорення вільного падіння, під якою слід розуміти середню квадратичну похибку інтерполяції аномалій прискорення вільного падіння;  $\text{tg}\beta$  – середній ухил відрізків лінії нівелювання;  $s$  – середня довжина цих відрізків;  $L=ns$  – довжина нівелірного ходу.

Введемо додаткові позначення:

$$\mu = \frac{\delta(g-\gamma)}{\gamma_m} \text{tg}\beta \sqrt{s}.$$

Представивши похибку  $\delta(g-\gamma)$  як

$$\delta(g-\gamma) = k\sqrt{s},$$

де  $k$  – коефіцієнт, що залежить від рельєфу і геологічної будови місця робіт, Пеллінен запропонував, аби випадкова середня квадратична похибка нормальної висоти через недостатню гравіметричну вивченість лінії нівелювання  $\mu$  була вдвічі меншою за вплив решти випадкових похибок геометричного нівелювання, який можна передати формулою

$$m = \pm \eta \sqrt{L}.$$

Зіставивши наведені вирази, отримаємо:

$$\frac{k\sqrt{s}}{\gamma_m} \text{tg}\beta \sqrt{s} \leq \frac{\eta}{2}; \quad s < \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\gamma_m}{k} \text{ctg}\beta. \quad (8)$$

За Пеллінемом, при нівелюванні вздовж залізниць  $\text{tg}\beta < 0,014$ , уздовж гірських шляхів ця величина може сягати 0,03. Приймаючи для рівнинної території  $k=1$  і  $\text{tg}\beta=0,005$ , він прийшов до думки, що навіть при нівелюванні I класу відстань між гравіметричними пунктами може становити 50 км. Отримані ним результати для різних класів нівелювання (з врахуванням поділу гірських районів на високогірні та середньовисотні) зведено в табл. 1.

Таблиця 1. Вимоги щодо частоти розташування гравіметричних пунктів за Пеллінемом

Місцевість	$k$	$\text{tg}\beta$	Відстань між гравіметричними пунктами		
			$\eta = \pm 0,5$ (I кл.)	$\eta = \pm 1,0$ (II кл.)	$\eta = \pm 3,0$ (III кл.)
Високогірна	3	0,03	3	6	17
Середньовисотна	2	0,01	12	25	75
Рівнинна	1	0,005	50	100	300

Бешлін [13] запропонував, щоб квадрат похибки нормальної висоти через вплив аномалій прискорення вільного падіння не перевищував десятої частки похибки власне нівелювання. Тоді у першій формулі (8) значення  $\eta/2$  замінюється на  $\eta/\sqrt{10}$ , а значення відстаней між гравіметричними пунктами зменшується в 1,5 раза. Багато геодезистів приймають точність обчислення поправки за вплив прискорення вільного падіння  $\pm 0,1$  мм. Тоді, за Пеллінемом, при нівелюванні I класу відстань між гравіметричними пунктами у високих горах повинна бути близько 1 км, а нижче 1000 м – приблизно 5 км.

Бокун [15] на підставі результатів нівелювання в Польщі рекомендував прийняти  $\mu$  в межах  $\pm 0,05-0,10$  мм. Використавши метод лінійної інтерполяції гравіметричних аномалій у вільному повітрі, він дійшов висновку, що відстань між гравіметричними пунктами у горах має бути не більше 1,5-2 км, у передгір'ях – 2-3 км, а на рівнині – 4-6 км.

Ю. М. Нейман [7] вивів свою формулу для обчислення помилки інтерполювання гравіметричної аномалії:

$$\delta(g-\gamma) = 0,3 \frac{s^2 \sqrt{D}}{d^2},$$

яку можна використати як умову для обчислення віддалей між гравіметричними пунктами. У цій формулі  $D$  – дисперсія аномалії прискорення вільного падіння;  $d$  – віддаль кореляції в кілометрах;  $s$  – віддаль між пунктами (теж у кілометрах).

У табл. 2 наводяться оптимальні відстані між гравіметричними пунктами для різних місцевостей, обчислені за формулами Неймана.

Таблиця 2. Відстані між гравіметричними пунктами за формулами Неймана

Рельєф	$\text{tg}\beta$	$\sqrt{D}$	$d$ , км	$S$ , км			
				$\eta=0,5$ мм	$\eta=1$ мм	$\eta=3$ мм	$\eta=5$ мм
Гірський	0,030	40	1	1,1	1,4	2,2	2,7
Горбистий	0,010	20	5	8	11	16	20
Рівнинний	0,005	10	10	24	32	50	61

Виходячи зі сказаного, можна зробити висновок, що уздовж ліній геометричного нівелювання I класу в горах і на височинах гравіметричні пункти бажано розташовувати через 1 км, II класу – через 2 км. На основі цього Центральний науково-дослідний інститут геодезії, аерознімання і картографії (ЦНДІГАіК) рекомендував таку шкалу відстаней між гравіметричними пунктами (табл. 3). Рекомендації були закріплені в "Інструкції по нівелюванню I, II, III і IV класов" колишнього Радянського Союзу та у чинній інструкції Російської Федерації [6].

Таблиця 3. Частота розміщення гравіметричних пунктів, рекомендована ЦНДІГАіК

Клас нівелювання	Відстань (у км) між гравіметричними пунктами в залежності від ухилу місцевості				
	понад 0,2	0,2-0,1	0,1-0,08	0,08-0,06	0,06-0,04
I	-	-	1	2	2
II	1	2-3	4	4	6
III	3-6				

Зауважимо, що прискорення вільного падіння вимірюють на всіх реперах; у точках перегину рельєфу, де кут нахилу лінії нівелювання змінюється більше ніж на  $2^\circ$ ; в точках повороту лінії на  $30^\circ$  і більше; у додаткових точках при ухилах лінії нівелювання понад 0,2 для нівелювання I класу та понад 0,4 для II класу. Середня квадратична похибка вимірювання прискорення вільного падіння на цих пунктах не повинна перевищувати 0,5 мГал відносно найближчих пунктів Державної гравіметричної мережі. Поправку за прискорення вільного падіння необхідно враховувати і



для ліній нівелювання III класу, що прокладені в горах з ухилами понад 0,050. Для цієї мети використовуються пункти гравіметричного знімання з відстанями до 10 км.

Як відомо, реалізація Європейської вертикальної референційної системи (EVRS) у вигляді нівелірної мережі UELN 95/98 (EVRF2000) базувалася на врівноваженні геопотенціальних чисел. Відзначимо, що за вимогами EVRF значення прискорення вільного падіння повинні бути відомі з частотою не менше ніж один вимір на 1 км ходу.

**Рекомендації.** На основі аналізу методів розрахунку частоти розташування гравіметричних пунктів уздовж ліній високоточного нівелювання та власних досліджень автори пропонують:

1. У горах і на височинах уздовж ліній високоточного нівелювання I класу гравіметричні пункти розташовувати через 1 км, II класу – через 2 км, а для ліній III класу (прокладених у горах з ухилом понад 0,050) – до 10 км.

2. У середньовисотних і рівнинних районах уздовж ліній високоточного нівелювання I класу гравіметричні пункти розташовувати через 2 км, а для II класу – через 4-6 км.

3. Середня квадратична похибка вимірювання прискорення вільного падіння не повинна перевищувати 0,5 мГал відносно найближчого пункту державної опорної гравіметричної мережі.

4. Для успішного інтегрування висотної основи України у світові та європейські проекти рекомендувати використовувати для цього Амстердамський футшток як вихідний пункт, а також геопотенціальні числа, добути на основі вимірянних перевищень і значень прискорення вільного падіння.

### Література

1. Бровар, В.В. Роль гравітаційного поля в геодезії / В.В. Бровар // Изв. вузов. Геодез. и аэрофотосъем. – 1970. – Вып. 2. – С. 66-72.

2. Бровар, В.В. О возможности повышения точности

гравіметрических выводов в геодезии / В.В. Бровар // Астроном. журн. – 1971. – Т. 48. – № 6. – С. 1327-1332.

3. Еремеев, В.Ф. Теория ортометрических, динамических и нормальных высот / В.Ф. Еремеев // Тр. ЦНИИГАиК. – М.: Геодезиздат, 1951. – № 86. – С. 11-51.

4. Еремеев, В.Ф. Теория высот в гравитационном поле Земли / В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина. – М.: Недра, 1971. – 144 с.

5. Заець, І.М. Державна геодезична мережа / І.М. Заець, О.В. Кучер // Державна картографо-геодезична служба України (1991–2006); за ред. Р.І. Сосси. – К.: НДІГК, 2006. – 376 с.; іл. [С. 47-66].

6. Інструкція по нивелюванню I, II, III и IV класов. ГКИНП (ГНТА)-03-010-02. – М.: ЦНИИГАиК, 2003.

7. Нейман, Ю.М. Вариационный метод физической геодезии / Ю.М. Нейман. – М.: Недра, 1979. – 200 с.

8. Огородова, Л.В. Высшая геодезия. – В 3 ч. – Ч. III. Теоретическая геодезия. – М.: Геодезкартиздат, 2006. – 384 с.

9. Пеллинен, Л.П. Требования к гравиметрической съемке, связанные с обработкой астрономо-геодезических и нивелирных сетей / Л.П. Пеллинен. – Тр. ЦНИИГАиК. – 1960. – № 139. – С. 3-44.

10. Сафонов, Г.Д. О необходимой частоте гравиметрических пунктов по линиям нивелирования I-II классов в горных районах / Г.Д. Сафонов // Геодез. и картогр. – 1967. – № 6. – С.15-17.

11. Торге, В. Гравиметрия / В. Торге; пер. с англ. Г.А. Шанурова; под. Ред. А.П. Юзефовича. – М.: Мир, 1999. – 429 с.

12. Юркина, М.И. О поправках за силу тяжести при нивелировании в высокогорном районе / М.И. Юркина, Э.И. Кроткова // Геодез. и картогр. – 1965. – № 10. – С. 3-7.

13. Baeschlin, C.F. Rapport spécial sur le nivellement et la pesanteur. Bulletin géodésique / C.F. Baeschlin. – 1960. – № 57. – P. 245-298.

14. Bernatzki, C. Zur Frage der gravimetrischen Punktabstände auf Nivellementslinien zur Erforschung vertikaler Erdkrustenbewegungen / C. Bernatzki // Vermessungstechnik. – 1963. – Т. 11. – № 8. – P. 295-300.

15. Bokun, J. Ptzygotowanie i opracowanie materialów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy / J. Bokun // Prace instytutu geodezji i kartografii. – 1958. – Т. VI. – № 1. – S. 3-86.

Надійшла 11.03.14