з однією або двома парами берегових створних знаків на одному/двох кінцях "коліна".

Для правильного визначення місцеположення ділянки робіт відносно причалів, знаків, поворотів осі на окремих аркушах плану великого масштабу на осях каналів слід через певні відстані зазначати координати точок осі, а каталог координат цих точок в УСК-2000 та WGS84 розміщувати в галузевому кадастрі таких об’єктів.

**Висновок.** Наведені матеріали та дані переконливо засвідчують, що:

- нинішнє просторове розміщення земельних ділянок у натурі на територіях портів не збігається з даними інформаційної системи про їх геопросторове положення, якісне оцінювання і правовий статус. Необхідно побудувати геодезичні мережі спеціального призначення для формування інженерної і транспортної інфраструктури згідно з нормативами [3];
- фахівці-землевпорядники повинні приступати до роботи лише тоді, коли геодезист створить мережу згущення в УСК-2000 та складе в цій системі електронні інженерно-топографічні плани і виконає кадастрові роботи з визначення меж і площ земельних ділянок, попередньо отримавши в законодавчому порядку від кадастрових служб координати меж з кадастру суміжних земельних ділянок, а також узгодить межі земельних ділянок і складе каталог координат зовнішніх меж земельних ділянок у системі координат УСК-2000;
- кадастрові служби законодавчо повинні накопичувати та надавати дані тільки після отримання ними координат осей внутрішніх мореплавних шляхів, берегових створних знаків та затверджених або проектних меж адміністративних одиниць;
- для потреб морських портів відповідно до Закону України "Про морські порти України" необхідно розробити повнішу інформаційно-реєстраційну систему геопросторового положення кадастрових об’єктів, ніж та, яку можна почерпнути з експлікації земель архаїчної форми 6-зем, що не відповідає вимогам чинного законодавства.

Відомо, що земельна реформа передбачає отримання даних про реальні межі земельних ділянок, які складалися десятиліттями, а не повернення до конфігурації первинного відведення. В результаті цього виникло черезсмужжя, суміжних меж не визначено, а акти узгодження меж складаються так, ніби всі межі співпадають. На нічийні смуги ніхто не претендує, а в містах великі площі земель не враховуються та не обкладаються земельним податком.

**Література**


1. *Закон* "Про морські порти України" (із змінами, внесеними згідно із Законом № 406-VII від 04.07.2013; ВВР, 2014, № 20-21, ст. 712).
2. *Кодекс* торговельного мореплавства України // ВВР, 1995, № 47-52, ст. 349.
3. *Порядок* побудови Державної геодезичної мережі України [Затв. пост. Кабінету Міністрів України від 07.08.2013 р. № 646].


Надійшла 06.05.14

* * *

УДК 528.06+528.1

*В. А. Рябчій, В. В. Рябчій*

# ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНІХ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ


*Исследованы известные средние и свойства их отклонений, которые определяются по результатам неравноточных измерений одной величины. Проведена классификация этих средних на четыре группы, установлены зависимости и неравенства между ними.*

*The known averages and their deviation properties which are determined according to results of unequal observations of the one quantity are studied. Classification of these averages into four groups was made, dependencies and inequalities among them were found.*


**Постановка проблеми.** Значне зростання точності геодезичних вимірювань за останні 20 років і постійні зміни умов, при яких вони виконуються, дають підстави стверджувати, що сьогодні в геодезії фактично рівноточних вимірювань не буває. Проте нерідко, нехтуючи несуттєвими змінами умов виконання геодезичних робіт, на практиці приймають, що якісь геодезичні вимірювання все-таки є рівноточними. Але при детальнішому вивченні цих умов можна встановити, що це насправді не так.

Для визначення середніх при нерівноточних вимірюваннях однієї величини найчастіше використовують загальну арифметичну середину, переваги якої добре описані в багатьох наукових виданнях, у підручниках і навчальних посібниках відомих вчених. Крім цієї середньої, існують ще й інші, наприклад: гармонічна, геометрична, квадратична, степенева, а також імовірна арифметична середина. Але детального їх опису та особливостей відхилень від результатів вимірювань певної величини ніхто не наводить. Однією з причин цього, як можна припустити, є складні обчислення. Сьогодні, враховуючи стрімкий розвиток обчислювальної техніки та програмного забезпечення, складність формул при обчисленні не є стримуючим чинником, як це було за часів Ґаусса. Тому з теоретичної точки зору важливо дослідити й інші середні та порівняти їх із загальною арифметичною серединою, одержаною за результатами вимірювань однієї величини.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій, дотичних до цієї проблеми.** Обчислення загальної арифметичної середини та особливостей цього методу описані в джерелах [2-7, 10, 14 та ін.]. Скажімо, Е. Беккенбах та Р. Беллман у праці [1] наводять формулу, яка є загальною для гармонічної, арифметичної та квадратичної середніх:

$$M_{i(x,a)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}},$$

де $a_i$ – ваги, сума яких повинна дорівнювати одиниці, тобто це приведені ваги. Така формула дає змогу обчислювати вказані середні при нерівноточних вимірюваннях.

М. Г. Відуєв і Г. С. Кондра у книзі [4] виділили для розгляду середніх цілий параграф. Підкреслено різницю між середніми, якими оперують у статистиці й геодезії. Наведено формули квадратичної $\overline{x}_s$ і степеневої $\overline{x}_c$ середніх. Але детальної інформації про середні (крім загальної арифметичної середини $\overline{x}_з$) при нерівноточних вимірюваннях однієї величини та які їм притаманні властивості автори не наводять.

У публікації [8], крім загальної арифметичної середини, описуються ще такі різновиди середніх: середня геометрична $\overline{x}_g$ і середня гармонічна $\overline{x}_h$. Але, як обчислюються ці середні при нерівноточних вимірюваннях не вказується.

В енциклопедії [9] подається формула нерівностей серед рівноточних середніх:

$$\overline{x}_h \le \overline{x}_g \le \overline{x}_a \le \overline{x}_s,$$

де $\overline{x}_a$ – проста арифметична середина. Проте і в цій праці ніяких відомостей про нерівноточні вимірювання однієї величини теж немає.

Г. М. Фіхтенґольц у [15] наводить таку нерівність:

$$a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \times \ldots \times a_n^{q_n} \le q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots + q_n a_n. \qquad (1)$$

При цьому $\sum q_i$=1, де $q_i = \frac{p_i}{\Sigma p}$. Далі, змінюючи $q$ на $p$, нерівність (1) автор записав так:

$$\left(a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \times \ldots \times a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p}} \le \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \qquad (2)$$

Тобто геометричне середнє нерівноточних вимірювань однієї величини менше від загальної арифметичної середини.

Автори джерела [16] наводять формули степеневої та геометричної середніх при таких вимірюваннях і називають їх "зважені середні". Вони також подають кілька доведень теореми про середнє арифметичне і середнє геометричне, а ще наводять нерівності, подібні до (2) та (1) відповідно:

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \times \ldots \times a_n^{p_n} < \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n};$$

$$a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \times \ldots \times a_n^{q_n} < \Sigma qa.$$

Але, яким чином обчислюються середні квадратичні похибки (СКП) наведених середніх, не зазначається.

У статті [11] характеризується імовірна арифметична середина для нерівноточних вимірювань однієї величини та її властивості:

$$\dot{x} = \frac{x_1\sqrt{p_1} + x_2\sqrt{p_2} + \ldots + x_n\sqrt{p_n}}{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \ldots \sqrt{p_n}} = \frac{\Sigma x\sqrt{p}}{\Sigma\sqrt{p}}. \qquad (3)$$

Проте, яке місце ця величина посідає в таких нерівностях, і в даній праці не встановлено.

**Невирішені частини загальної проблеми.** Можна погодитись, що різниці між значеннями наведених вище середніх незначні. Але дослідження результатів вимірювань однієї величини, особливо при невеликій їх кількості, виявлення закономірностей має важливе значення. Мотивом для написання даної статті стали міркування М. Г. Відуєва і Г. С. Кондри про важливість середніх, "особливо при вивченні умов вимірювань" [4].

У нашій статті досліджуються тільки деякі середні, їх властивості та відповідні відхилення від результатів нерівноточних вимірювань однієї величини.

**Постановка задачі (мета статті):** використовуючи аналітичний метод досліджень, визначити, які властивості мають перелічені вище середні та їх відхилення під час опрацювання результатів нерівноточних вимірювань однієї величини у порівнянні з загальною арифметичною серединою, а також перевірити одержані дані практичними (експериментальними) розрахунками.

**Виклад основного матеріалу.** Обчислення СКП будь-якої середньої $m_{\overline{x}}$ при нерівноточних вимірюваннях однієї величини можна виконати за такими формулами:

$$m_{\overline{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2};$$

$$m_{\overline{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\overline{x}}}}, \qquad (4)$$

де $m_i$ – СКП кожного виміру, що обчислюється з виразу $m_i = \mu/\sqrt{p_i}$; $p_{\overline{x}}$ – вага відповідної середньої; $\mu$ –

СКП одиниці ваги, яка обчислюється для кожної середньої за формулою $\mu = \sqrt{\Sigma pv^2 / (n-1)}$.

При цьому до відповідних літер показників додають ще літери та індекси, які позначають відповідні середні та СКП.

Для порівняння та аналізу одержаних результатів за СКП вимірювань обчислюють нормовані відхилення від відповідних середніх та їхні квадрати за наведеними нижче рівняннями:

$$t_i = \frac{v_i}{m_i} = \frac{v_i\sqrt{p_i}}{\mu} = \frac{v_i\sqrt{p_i}}{\sqrt{\Sigma p_i v_i^2}}\sqrt{n-1};$$

$$t_i^2 = \frac{v_i^2}{m_i^2} = \frac{v_i^2 p_i}{\mu^2} = \frac{v_i^2 p_i}{\Sigma p_i v_i^2}(n-1).$$

Контроль обчислення виконується за такими формулами:

$$\Sigma t = \frac{\Sigma v\sqrt{p}}{\mu}; \tag{5}$$

$$\Sigma t^2 = n-1. \tag{6}$$

Для контролю обчислення значень середніх та їх СКП використовуються формули з приведеними вагами $q_i$ і вагами $p_i$ вимірів.

***Гармонічна середня.*** Формулу середньої гармонічної при нерівноточних вимірюваннях однієї величини можна записати в такому вигляді:

$$\bar{x}_h = (q_1 x_1^{-1} + q_2 x_2^{-1} + ... + q_n x_n^{-1})^{-1} \tag{7}$$

або

$$\bar{x}_h = \left(\frac{p_1 x_1^{-1} + p_2 x_2^{-1} + ... + p_n x_n^{-1}}{\Sigma p}\right)^{-1}, \tag{8}$$

де $q$ і $p$ – приведені ваги і ваги вимірів відповідно.

Частинні похідні формули (7) виглядатимуть так:

$$\frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_i} = (q_1 x_1^{-1} + q_2 x_2^{-1} + ... + q_n x_n^{-1})^{-2} q_i x_i^{-2} = \bar{x}_h^2 \frac{q_i}{x_i^2}. \tag{9}$$

Тоді формула СКП гармонічної середньої матиме такий вигляд:

$$m_{\bar{x}_h} = \bar{x}_h^2 \sqrt{\frac{q_1^2 m_1^2}{x_1^4} + \frac{q_2^2 m_2^2}{x_2^4} + ... + \frac{q_n^2 m_n^2}{x_n^4}}. \tag{10}$$

Для контролю доведення формули (10) і подальших обчислень визначимо обернену вагу гармонічної середньої:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_h}} = \bar{x}_h^4 \left(\frac{q_1^2}{x_1^4}\frac{1}{p_1} + \frac{q_2^2}{x_2^4}\frac{1}{p_2} + ... + \frac{q_n^2}{x_n^4}\frac{1}{p_n}\right). \tag{11}$$

Враховуючи, що $q_i = p_i/\Sigma p$, а $p_i = q_i \Sigma p$, формулу (11) можна записати як:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_h}} = \frac{\bar{x}_h^4}{\Sigma p}\left(\frac{q_1}{x_1^4} + \frac{q_2}{x_2^4} + ... + \frac{q_n}{x_n^4}\right). \tag{12}$$

За вихідними даними табл. 1 і за формулами (4) і (10) знайдемо значення СКП гармонічної середньої. Вони такі самі (табл. 2).

*Таблиця 1.* **Вихідні дані для розрахунків**

| Номер вимірів | $x_i$, м | $p_i$ | $q_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,215 | 2,0 | 0,10 |
| 2 | 1,225 | 4,0 | 0,20 |
| 3 | 1,235 | 6,0 | 0,30 |
| 4 | 1,245 | 5,0 | 0,25 |
| 5 | 1,255 | 3,0 | 0,15 |
| $\Sigma$ | 6,175 | 20,0 | 1,00 |

Тепер розглянемо формулу (8). Частинні похідні від неї дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_i} = \frac{\bar{x}_h^2}{\Sigma p}\frac{p_i}{x_i^2}. \tag{13}$$

Тоді формула СКП гармонічної середньої матиме такий вигляд:

$$m_{\bar{x}_h} = \frac{\bar{x}_h^2}{\Sigma p}\sqrt{\frac{p_1^2 m_{x_1}^2}{x_1^4} + \frac{p_2^2 m_{x_2}^2}{x_2^4} + ... + \frac{p_n^2 m_{x_n}^2}{x_n^4}}. \tag{14}$$

Для контролю доведення формули (14) та обчислень визначимо обернену вагу гармонічної середньої. Формула для обчислення така:

*Таблиця 2.* **Зведені результати обчислень середніх та їх показників**

| Номер показника | Показники | Середня | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ймовірна арифметична | гармонічна | геометрична | загальна арифметична | квадратична | степенева |
| 1 | $\bar{x}$, м | 1,235887 | 1,236384 | 1,236442 | 1,236500 | 1,236558 | 1,236673 |
| 2 | $\sum pv$, мм | 12,267 | 2,312 | 1,155 | 0,000 | –1,154 | –3,460 |
| 3 | $\sum pv^2$, мм$^2$ | 2862,524 | 2855,267 | 2855,067 | 2855,000 | 2855,067 | 2855,599 |
| 4 | $\sum\sqrt{p}v$, мм | 0,000 | –4,894 | –5,462 | –6,030 | –6,598 | –7,731 |
| 5 | $\sum\sqrt{p}v^2$, мм$^2$ | 1674,383 | 1676,819 | 1677,418 | 1678,082 | 1678,811 | 1680,463 |
| 6 | $\mu$, мм | 26,7513 | 26,7174 | 26,7164118 | 26,7161 | 26,7164123 | 26,7189 |
| 7 | $p_{\bar{x}}$ | 19,3329 | 19,98876 | 19,9963 | 20,0000 | 20,0000 | 19,98884 |
| 8 | $m_{\bar{x}}$, мм | 6,0841 | 5,9759 | 5,9745 | 5,973902 | 5,973971 | 5,9762 |
| 9 | $\sum t$ | 0,000 | –0,183 | –0,204 | –0,226 | –0,247 | –0,289 |
| 10 | $\sum t^2$ | 4,0 | 4,0 | 4,0 | 4,0 | 4,0 | 4,0 |

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_h}} = \frac{\bar{x}_h^4}{\Sigma p^2}\left(\frac{p_1}{x_1^4} + \frac{p_2}{x_2^4} + \ldots + \frac{p_n}{x_n^4}\right). \tag{15}$$

Тоді СКП гармонічної середньої можна визначити за формулою (4). За нею одержимо те саме значення, що і за виразами (10) і (14). Значення гармонічної середньої та її СКП, обчислені з використанням приведених ваг і ваг вимірів, співпадають.

Якщо у формулах (13-15) $p_i/\sum p$ замінити на $q_i$, то одержимо формули (9-12). Аналогічні дії можна виконати і для всіх інших середніх.

Результати обчислень теж зведено в табл. 2.

***Геометрична середня.*** Наведемо формули геометричної середньої при нерівноточних вимірюваннях однієї величини:

$$\bar{x}_g = x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \times \ldots \times x_n^{q_n} \tag{16}$$

або

$$\bar{x}_g = (x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \times \ldots \times x_n^{p_n})^{\frac{1}{\Sigma p}}. \tag{17}$$

Частинні похідні від формули (16) дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_i} = q_i x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \times \ldots \times x_i^{q_i - 1} \times \ldots \times x_n^{q_n} = \bar{x}_g \frac{q_i}{x_i}.$$

Формула СКП геометричної середньої буде такою:

$$m_{\bar{x}_g} = \bar{x}_g \sqrt{\left(\frac{q_1 m_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{q_2 m_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q_n m_n}{x_n}\right)^2}. \tag{18}$$

Обернена вага геометричної середньої становитиме:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_g}} = \bar{x}_g^2 \left(\frac{1}{p_1}\left(\frac{q_1}{x_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{q_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{q_n}{x_n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\bar{x}_g^2}{\Sigma p}\left(\frac{q_1}{x_1^2} + \frac{q_2}{x_2^2} + \ldots + \frac{q_n}{x_n^2}\right).$$

Тоді СКП геометричної середньої також можна визначити за формулою (4). За нею одержуємо те саме значення, що і за (18).

Розглянемо детальніше формулу (17). Частинні похідні від неї дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_g}{\partial x_i} = \frac{p_i}{\Sigma p}(x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \times \ldots \times x_n^{p_n})^{\frac{1}{\Sigma p} - 1} \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \times \ldots \times$$

$$\times x_i^{p_i - 1} \times \ldots \times x_n^{p_n} = \frac{\bar{x}_g}{\Sigma p}\frac{p_i}{x_i}.$$

Формула СКП геометричної середньої матиме такий вигляд:

$$m_{\bar{x}_g} = \frac{\bar{x}_g}{\Sigma p}\sqrt{\left(\frac{p_1 m_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2 m_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p_n m_{x_n}}{x_n}\right)^2}. \tag{19}$$

Обернена вага геометричної середньої становитиме:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_g}} = \left(\frac{\bar{x}_g}{\Sigma p}\right)^2 \left(\frac{p_1}{x_1^2} + \frac{p_2}{x_2^2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n^2}\right).$$

СКП геометричної середньої обчислимо за формулою (4). Одержуємо те саме значення, що і за виразом (19).

Значення геометричної середньої та її СКП наведено теж у табл. 2.

***Квадратична середня.*** Формулу квадратичної середньої нерівноточних вимірювань однієї величини можна записати у такому вигляді:

$$\bar{x}_s = (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \ldots + q_n x_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

або

$$\bar{x}_s = \left(\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2}{\Sigma p}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Частинні похідні від формули (20) при цьому виглядатимуть так:

$$\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i} = (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \ldots + q_n x_n^2)^{-\frac{1}{2}} q_i x_i = \frac{q_i x_i}{\bar{x}_s}.$$

Враховуючи приведені ваги, СКП квадратичної середньої буде мати такий вигляд:

$$m_{\bar{x}_s} = \frac{1}{\bar{x}_s}\sqrt{q_1^2 x_1^2 m_1^2 + q_2^2 x_2^2 m_2^2 + \ldots + q_n^2 x_n^2 m_n^2}. \tag{22}$$

Для контролю доведення формули (22) і обчислень визначимо обернену вагу квадратичної середньої:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_s}} = \frac{1}{\bar{x}_s^2}\left(q_1^2 x_1^2 \frac{1}{p_1} + q_2^2 x_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + q_n^2 x_n^2 \frac{1}{p_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\bar{x}_s^2 \, \Sigma p}(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \ldots + q_n x_n^2).$$

СКП квадратичної середньої також можна визначити за формулою (4). Одержимо те саме значення, що і за виразом (22).

Тепер повернемось до формули (21). Частинні похідні від неї будуть такими:

$$\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i} = \left(\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2}{\Sigma p}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{p_i x_i}{\Sigma p} = \frac{p_i x_i}{\bar{x}_s \, \Sigma p}.$$

З урахуванням ваги вимірів формула СКП квадратичної середньої набуде такого вигляду:

$$m_{\bar{x}_s} = \frac{1}{\bar{x}_s \, \Sigma p}\sqrt{p_1^2 x_1^2 m_1^2 + p_2^2 x_2^2 m_2^2 + \ldots + p_n^2 x_n^2 m_n^2}. \tag{23}$$

Для контролю доведення формули (23) та обчислень визначимо обернену вагу квадратичної середньої:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_s}} = \frac{1}{(\bar{x}_s \Sigma p)^2}\left(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2\right).$$

Тоді СКП цієї середньої можна визначити з виразу (4). За ним одержимо те саме значення, що і за рівнянням (23).

Значення квадратичної середньої та її СКП теж наводяться у табл. 2.

***Степенева середня.*** Формули степеневої середньої при нерівноточних вимірюваннях однієї величини можна записати у такому вигляді:

$$\bar{x}_c = (q_1 x_1^k + q_2 x_2^k + \ldots + q_n x_n^k)^{\frac{1}{k}} \qquad (24)$$

або

$$\bar{x}_c = \left( \frac{p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \ldots + p_n x_n^k}{\Sigma p} \right)^{\frac{1}{k}}. \qquad (25)$$

Частинні похідні від неї за формулою (24) дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_c}{\partial x_i} = (q_1 x_1^k + q_2 x_2^k + \ldots + q_n x_n^k)^{\frac{1}{k}-1} q_i x_i^{k-1} = q_i \left( \frac{x_i}{\bar{x}_c} \right)^{k-1}.$$

З урахуванням приведених ваг формула СКП степеневої середньої матиме такий вигляд:

$$m_{\bar{x}_c} = \frac{1}{\bar{x}_c^{k-1}} \sqrt{q_1^2 x_1^{2(k-1)} m_1^2 + q_2^2 x_2^{2(k-1)} m_2^2 + \ldots + q_n^2 x_n^{2(k-1)} m_n^2}. \quad (26)$$

У наведеному прикладі прийнято, що показник степеня дорівнює чотирьом ($k$=4). Для контролю доведення формули (26) та обчислень визначимо обернену вагу степеневої середньої:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_c}} = \frac{1}{\bar{x}_c^{2(k-1)}} \left( q_1^2 x_1^{2(k-1)} \frac{1}{p_1} + q_2^2 x_2^{2(k-1)} \frac{1}{p_2} + \ldots + q_n^2 x_n^{2(k-1)} \frac{1}{p_n} \right) = \frac{1}{\bar{x}_c^{2(k-1)} \Sigma p} (q_1 x_1^{2(k-1)} + q_2 x_2^{2(k-1)} + \ldots + q_n x_n^{2(k-1)}).$$

СКП степеневої середньої також можна визначити за формулою (4). Одержуємо те саме значення, що і за (26).

Розглянемо ґрунтовніше формулу (25). Частинні похідні дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \bar{x}_c}{\partial x_i} = \left( \frac{p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \ldots + p_n x_n^k}{\Sigma p} \right)^{\frac{1}{k}-1} \frac{p_i x_i^{k-1}}{\Sigma p} = \frac{p_i}{\Sigma p} \left( \frac{x_i}{\bar{x}_c} \right)^{k-1}.$$

З урахуванням ваг формула СКП степеневої середньої виглядатиме так:

$$m_{\bar{x}_c} = \frac{1}{\bar{x}_c^{k-1} \Sigma p} \sqrt{p_1^2 x_1^{2(k-1)} m_1^2 + p_2^2 x_2^{2(k-1)} m_2^2 + \ldots + p_n^2 x_n^{2(k-1)} m_n^2}. \quad (27)$$

Для контролю доведення формули (27) і обчислень визначимо обернену вагу степеневої середньої:

$$\frac{1}{p_{\bar{x}_c}} = \frac{1}{(\bar{x}_c^{k-1} \Sigma p)^2} \left( p_1 x_1^{2(k-1)} + p_2 x_2^{2(k-1)} + \ldots + p_n x_n^{2(k-1)} \right).$$

Тоді СКП степеневої середньої можна обчислити за формулою (4). Одержуємо те саме значення, що і за (27).

Значення степеневої середньої та її СКП, обчислені з використанням ваг і приведених ваг вимірів, співпадають. Результати обчислень див. у табл. 2.

***Ймовірна арифметична середина.*** Частинні похідні від формули (3) дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{\Sigma \sqrt{p}}. \qquad (28)$$

З урахуванням ваги вимірів СКП імовірної арифметичної середини обчислюємо за формулою

$$m_{\dot{x}} = \frac{1}{\Sigma \sqrt{p}} \sqrt{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + \ldots + p_n m_n^2}. \qquad (29)$$

Оскільки $p_i m_i^2 = \mu^2$, то формулу (29) можна записати у такому вигляді:

$$m_{\dot{x}} = \frac{\mu}{\Sigma \sqrt{p}} \sqrt{n}. \qquad (30)$$

Обернену вагу імовірної арифметичної середини можна обчислити за формулою

$$\frac{1}{p_{\dot{x}}} = \frac{n}{(\Sigma \sqrt{p})^2}. \qquad (31)$$

Тоді СКП цієї величини можна знайти за формулою (4). Одержуємо те саме значення, що і за (30).

Формулу обчислення імовірної середньої за приведеними вагами при нерівноточних вимірюваннях можна записати у такому вигляді:

$$\dot{x} = x_1 \dot{q}_1 + x_2 \dot{q}_2 + \ldots + x_n \dot{q}_n, \qquad (32)$$

де $\dot{q}_i = \dfrac{\sqrt{p_i}}{\Sigma \sqrt{p}}$ – приведені ваги вимірів.

Частинні похідні від формули (32) дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} = \dot{q}_i. \qquad (33)$$

Враховуючи приведені ваги вимірів, СКП імовірної арифметичної середини обчислюємо за такою формулою:

$$m_{\dot{x}} = \sqrt{\dot{q}_1^2 m_1^2 + \dot{q}_2^2 m_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2 m_n^2}. \qquad (34)$$

З урахуванням приведених ваг обернену вагу імовірної арифметичної середини можна обчислити за формулою

$$\frac{1}{p_{\dot{x}}} = \frac{\dot{q}_1^2}{p_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\dot{q}_n^2}{p_n}. \qquad (35)$$

Тоді СКП імовірної арифметичної середини знайдемо з виразу (4). Одержимо те саме значення, що і за (34).

Якщо у формулах (33-35) $\dot{q}_i$ замінити на $\sqrt{p_i} / \Sigma \sqrt{p}$, то одержимо формули (28-31).

Значення імовірної арифметичної середини та її СКП наводяться у табл. 2.

***Загальна арифметична середина*** визначається за добре відомою формулою. Наведемо її тут для зручності подальшого порівняння:

$$\overline{x}_з = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}.$$

СКП загальної арифметичної середини обчислимо за такою формулою:

$$m_{\overline{x}_з} = \frac{1}{\Sigma p}\sqrt{p_1^2 m_1^2 + p_2^2 m_2^2 + \ldots + p_n^2 m_n^2}.$$

Вага загальної арифметичної середини дорівнює сумі ваг усіх аргументів, тобто $p_{\overline{x}_з}=\Sigma p$. СКП загальної арифметичної середини можна обчислити з виразу

$$m_{\overline{x}_з} = \frac{\mu}{\sqrt{\Sigma p}}.$$

З урахуванням приведених ваг формула СКП загальної арифметичної середини буде мати такий вигляд:

$$m_{\overline{x}_з} = \sqrt{q_1^2 m_1^2 + q_2^2 m_2^2 + ... + q_n^2 m_n^2}.$$

Результати обчислення див. у табл. 2.

Проаналізувавши всі наведені формули обчислення середніх при нерівноточних вимірюванях однієї величини, аналогічно, як це було виконано для рівноточних вимірів [12], можемо виділити чотири групи середніх.

До *першої групи* віднесемо формули, в яких при обчисленні середніх додаються добутки ваг (приведених ваг) на значення результатів вимірювань у додатному степені. При цьому показник степеня може дорівнювати, бути більшим або меншим за одиницю. Найкращою у цій групі є загальна арифметична середина, коли показник степеня дорівнює одиниці. До цієї групи входять квадратична і степенева середні. Загальний вигляд формул цієї групи такий, як вирази (24) або (25).

До *другої групи* середніх можна віднести формули, в яких при обчисленні додаються добутки ваг (приведених ваг) на значення результатів вимірювань у від'ємному степені. При цьому показник степеня може дорівнювати, бути більшим або меншим за одиницю зі знаком мінус. Найкращою в цій групі є гармонічна середня, показник степеня якої дорівнює мінус одиниці. Її можна назвати загальною гармонічною середньою. Загалом вигляд формул цієї групи аналогічний формулам (7) або (8):

$$\overline{x}_h = (q_1 x_1^{-k} + q_2 x_2^{-k} + ... + q_n x_n^{-k})^{-k};$$

$$\overline{x}_h = \left(\frac{p_1 x_1^{-k} + p_2 x_2^{-k} + ... + p_n x_n^{-k}}{\Sigma p}\right)^{-k}.$$

До *третьої групи* середніх слід віднести ті формули, в яких значення результатів вимірювань у степені ваг (приведених ваг) перемножуються. Віддати перевагу якійсь середній у цій групі важко, оскільки при довільному значенні показника степеня $k$ значення геометричної середньої залишається однаковим. Загальний вигляд формул цієї групи аналогічний формулам (16) і (17):

$$\overline{x}_g = \left(x_1^{kq_1} \cdot x_2^{kq_2} \times \ldots \times x_n^{kq_n}\right)^{\frac{1}{k}} = x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \times \ldots \times x_n^{q_n};$$

$$\overline{x}_g = \left(x_1^{kp_1} \cdot x_2^{kp_2} \times \ldots \times x_n^{kp_n}\right)^{\frac{1}{k\Sigma p}} = \left(x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \times \ldots \times x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p}}.$$

Загальним для цих трьох груп є те, що в їхніх формулах для обчислення середніх використовуються ваги та приведені ваги вимірів і що показник степеня може дорівнювати, бути більшим або меншим за одиницю.

До *четвертої групи* можна віднести імовірну арифметичну середину, у формулі якої використовуються корінь квадратний з ваг. При цьому результати вимірювань можуть бути у степені, показник якого дорівнює, більший або менший за одиницю. Загальний вигляд формул цієї групи аналогічний формулам (32) і (33):

$$\dot{x} = (x_1^k \dot{q}_1 + x_2^k \dot{q}_2 + ... + x_n^k \dot{q}_n)^{\frac{1}{k}};$$

$$\dot{x} = \left(\frac{x_1^k\sqrt{p_1} + x_1^k\sqrt{p_2} + ... + x_n^k\sqrt{p_n}}{\Sigma\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Одержані дані розрахунків середніх за результатами вимірювань однієї величини та інших показників для зручності порівняння зведено в табл. 2. При цьому середні розміщені за зростанням їх значень.

Проаналізувавши одержані результати обчислень відповідних середніх за результатами вимірювань однієї величини та їх показників (табл. 2), було виявлено деякі подібності між загальною та ймовірною арифметичними серединами, які наведені нижче.

Порівнявши зведені результати обчислення середніх (табл. 2, рядок 1), встановлено, що нерівність між значеннями проаналізованих середніх можна передати таким виразом:

$$\dot{x} \le \overline{x}_h \le \overline{x}_g \le \overline{x}_з \le \overline{x}_s \le \overline{x}_c. \qquad (36)$$

З нього випливає, що $\dot{x} \le \overline{x}_з$. Але у безмежному масиві значень вимірів та їх ваг є і таке, коли ймовірна арифметична середина за величиною стає більшою від значення загальної арифметичної середини, тобто $\overline{x}_з \le \dot{x}$. Це зафіксовано у статтях [11, 13] і нові дослідження підтверджують такий висновок.

Суми добутків ваг або кореня квадратного з ваг на відхилення результатів вимірювань від відповідних середніх (табл. 2, рядки 2 і 4) становитимуть:

$$\Sigma pv = -(\overline{x} - \overline{x}_з)\Sigma p; \qquad (37)$$

$$\Sigma\sqrt{p}v = -(\overline{x} - \dot{x})\Sigma\sqrt{p}. \qquad (38)$$

Тільки у загальній арифметичній середині (табл. 2, рядок 2), і тільки у ймовірній арифметичній середині $\sum\sqrt{p}v=0$ (табл. 2, рядок 4). Це зумовлено тим, що їх доведення було виконано саме за цих умов. В інших середніх наведені вирази набувають довільних значень, які можна контролювати за формулами (37) і (38).

Різниці сум добутків ваг або кореня квадратного з ваг на квадрати відхилень результатів вимірювань від відповідних середніх і сум добутків ваг або кореня квадратного з ваг на квадрати відхилень результатів вимірювань від загальної або ймовірної арифметичних середин (табл. 2, рядки 3 і 5) дорівнюватимуть:

$$\Sigma pv^2 - \Sigma pv_з^2 = -(\bar{x} - \bar{x}_з)^2 \Sigma p;$$

$$\Sigma\sqrt{p}v^2 - \Sigma\sqrt{p}\dot{v}^2 = -(\bar{x} - \dot{x})^2 \Sigma\sqrt{p}.$$

Звісно, що у загальній арифметичній середині сума $\sum pv_з^2$ (табл. 2, рядок 3) мінімальна у порівнянні з іншими середніми, а сума $\sum\sqrt{p}\dot{v}^2$ мінімальна у ймовірній арифметичній середині (табл. 2, рядок 5).

СКП одиниці ваги, ваги середніх та СКП самих середніх (табл. 2, рядки 6-8) утворюють такі нерівності:

$$\mu_{\bar{x}_з} \le \mu_{\bar{x}_g} \le \mu_{\bar{x}_s} \le \mu_{\bar{x}_h} \le \mu_{\bar{x}_c} \le \mu_{\dot{x}}; \tag{39}$$

$$p_{\bar{x}_з} \ge p_{\bar{x}_s} \ge p_{\bar{x}_g} \ge p_{\bar{x}_c} \ge p_{\bar{x}_h} \ge p_{\dot{x}}; \tag{40}$$

$$m_{\bar{x}_з} \le m_{\bar{x}_s} \le m_{\bar{x}_g} \le m_{\bar{x}_h} \le m_{\bar{x}_c} \le m_{\dot{x}}. \tag{41}$$

Ці три нерівності, знов-таки, підкреслюють переваги загальної арифметичної середини над іншими середніми.

Порівнювати середні (36) та їх характеристики (39-41) рекомендуємо тільки при однаковому значенні показника степеня $k$, тобто квадратичну і степеневу середні у нерівностях (36) і (39-41) не враховувати. Ці середні та їх характеристики можна порівнювати тільки при однаковому значенні $k$.

Якщо використовуються СКП відповідних вимірів, то сума нормованих відхилень (табл. 2, рядок 9) тільки від імовірної арифметичної середини дорівнює нулю, тобто $\sum t = 0$. Сума нормованих відхилень від інших середніх контролюється за формулою (5).

Сума квадратів нормованих відхилень (табл. 2, рядок 10) для всіх середніх дорівнює кількості надлишкових вимірів (6), тобто $\sum t^2 = n-1$.

Між загальними арифметичною, геометричною та гармонічною середніми (при $k$=1) виявлено цікаві взаємозалежності:

$$\bar{x}_з \cong \frac{\bar{x}_g^2}{\bar{x}_h}; \tag{42}$$

$$\bar{x}_g \cong \frac{\bar{x}_h + \bar{x}_з}{2}. \tag{43}$$

Враховуючи вирази (42) і (43), можна записати таку приблизну рівність:

$$\frac{\bar{x}_h + \bar{x}_з}{2} \cong \sqrt{\bar{x}_h\,\bar{x}_з}\,. \tag{44}$$

При цьому ліва частина виразу (44) завжди буде більша за праву, за винятком, коли $\bar{x}_h = \bar{x}_з$.

Розбіжності між лівою і правою частинами рівнянь (42) і (43) тим менші, чим менша різниця між максимальним та мінімальним значеннями результатів вимірювань однієї величини та їх вагами. За даними табл. 1 значення загальної арифметичної середини, обчислене за формулою (42), становить: $\bar{x}_з$=1,23650005 м. Також у цьому прикладі значення геометричної середньої $x_g$ становить 1,23644223 м, а обчислене за виразом (43) – 1,23644221 м.

Таким чином, за цими формулами можна обчислювати і контролювати визначення загальної арифметичної, геометричної та гармонічної середніх за результатами вимірювань однієї величини. Ця взаємозалежність подібна до тієї, яка існує між простою арифметичною, простою геометричною і простою гармонічною серединами (при $k$=1) [12].

Враховуючи властивості ймовірної арифметичної середини, наведені в статтях [11, 13], можна записати таку приблизну рівність:

$$\dot{x} \approx \frac{\bar{x}_a + \bar{x}_з}{2}. \tag{45}$$

За даними табл. 1 значення простої арифметичної середини становить: $\bar{x}_a$ = 1,235 м, значення імовірної арифметичної середини $\dot{x}$ за формулою (3) – 1,235887 (табл. 2), а обчислене за формулою (45) – 1,235750 м. Таким чином, за цією формулою можна обчислювати і контролювати визначення загальної та ймовірної арифметичних середин.

**Висновки, пропозиції та перспективи досліджень.** 1. Одержані результати стосовно наведених середніх за результатами нерівноточних вимірювань однієї величини дають можливість класифікувати їх на чотири групи: загальна арифметична, загальна гармонічна, загальна геометрична та ймовірна арифметична середини. Найважливішою серед них є загальна арифметична середина. Ймовірна арифметична середина та деякі її властивості також виявились досить цікавими.

2. Для кожної середньої виведено формули обчислення обернених ваг та їх середніх квадратичних похибок через ваги і приведені ваги вимірів.

3. Встановлено нерівності між значеннями досліджених середніх (36), значеннями їх СКП одиниці ваги (39), вагами середніх (40) і також значеннями їх СКП (41).

4. Для всіх середніх сума квадратів нормованих відхилень дорівнює кількості надлишкових вимірів, коли для їх обчислення використовуються СКП одного вимірювання (6).

5. Встановлено взаємозв'язок між загальними арифметичною, гармонічною та геометричною серединами – вирази (42-44), а також підтверджено взаємозв'язок між загальною, простою та ймовірною арифметичними серединами (45).

Наразі не всі досліджувані середні мають однакове практичне застосування. Деякі мають тільки теоретичне значення. Але ж теорія завжди передує практиці. Дослідженнями середніх займалося багато відомих вчених-математиків. Так, Е. Беккенбах та Р. Беллман у праці [1] зібрали 12 доведень вченими фундаментальної нерівності між арифметичною та геометричною середніми.

Враховуючи безкінечність вимірювань та взаємодію чисел між собою, допускаємо, що не всі середні за результатами вимірювань однієї величини розглянуто в нашій статті й не всі середні ще визначені, тому подальші дослідження у даному напрямі реальні. Буде добре, якщо у розвиток цього дослідження інші науковці опублікують матеріали про нові середні, визначені за результатами нерівноточних вимірювань.

Перспектива подальших досліджень полягає в обґрунтуванні практичного застосування всіх груп середніх за результатами рівноточних і нерівноточних вимірювань однієї величини, а також у ґрунтовному дослідженні властивостей імовірної арифметичної середини.

**Література**

1. *Беккенбах, Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман; пер. с англ. Г.И. Басса, В.И. Левина, Г.А. Шадрина; под ред. В.И. Левина. – М.: Изд-во "Мир", 1965. – 276 с.

2. *Большаков, В.Д.* Теория ошибок наблюдений / В.Д. Большаков: учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

3. *Большаков, В.Д.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе: учеб. пос. для вузов. – М.: Недра, 1984. – 352 с.

4. *Видуев, Н.Г.* Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.

5. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів / С.П. Войтенко: навчальний посібник. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с.

6. *Гайдаев, П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

7. *Зазуляк, П.М.* Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Л.: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.

8. *Мазмишвили, А.И.* Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.

9. *Математическая* энциклопедия. – В 5 т.; гл. ред. И.М. Виноградов. – Т. 3. – М.: Сов. энцикл., 1982. – 592 с., ил.

10. *Папазов, М.Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.

11. *Рябчій, В.А.* Визначення ймовірнішого значення за результатами нерівноточних вимірів однієї величини / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Геодез., картогр. та аерофотознім. – 2013. – Вип. 78. – С. 183-191.

12. *Рябчій, В.А.* Визначення середніх за результатами рівноточних вимірювань однієї величини / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Вісн. геодез. та картогр. – 2014. – № 3. – С. 7-13.

13. *Рябчій, В.А.* Ймовірно-математичний аналіз обмеженої кількості результатів нерівноточних вимірів однієї величини / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2013. – Вип. II. – С. 25-30.

14. *Рябчій, В.А.* Теорія похибок вимірювань: навчальний посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Дн-ськ: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.

15. *Фихтенгольц, Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во "Наука", 1969. – Т. 1. – 608 с.

16. *Харди, Г.Г.* Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа; пер. с англ. В.И. Левина; с доп. В.И. Левина, С.Б. Стечкина. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – 456 с.

Надійшла 04.12.14