Висновки. Хотиславське піщано-крейдяне родовище є потенційною загрозою для екологічного та водного балансу та деформацій земної кори Західного Полісся, зокрема і для Шацького національного природного парку.

Навесні 2015 р. було проведено обстеження нівелірної мережі II і III класу та мережі тріангуляції 2-4 класів на території природного парку. Створено геодезичний полігон, довжина якого становить 26,8 км і складається він з 14-ти пунктів.

Улітку 2015 р. розпочато виконання нівелювання III класу методом "із середини". Визначено місце розташування свердловин та водомірних постів, які в подальшому (у 2016 р.) буде прив'язано до реперів створеного полігона.

Література

1. *Ващенко, В.І.* Спосіб геометричного нівелювання з врахуванням вертикальної рефракції та негоризонтальності візирного променя / В.І. Ващенко, С.С. Перій, В.О. Літинський // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Л.: Вид-во Нац.ун-ту "Львівська політехніка", 2009. – Вип. І. – С. 116-121.
2. *Инструкция* по нивелированию I, II, III, IV классов. – М.: Недра, 1990. – 175 с.
3. *Мороз, О.І.* Про геодинамічні дослідження на природно-заповідних територіях/ О.І. Мороз, А.Т. Дульцев, І.С. Сідоров [та ін.] // Вісн. геодез. та картогр. – 2013. – № 2. – С. 15-18.
4. *Мороз, О.І.* Вплив Хотиславського родовища на екологічний стан Шацького національного парку / О.І. Мороз // Зб. Матер. 2-го Міжнародного конгресу "Захист навколишнього середовища. Енергоощадність. Збалансоване природокористування". – Л., 2012. – С. 45.
5. *Природа* Західного Полісся, прилеглого до Хотиславського кар'єру Білорусі: монографія; за ред. Ф.В. Зузука. – Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2014. – 246 с.
6. *Сводный* каталог высот пунктов нивелирования на лист карты масштаба 1:200 000 М-34-IV. – К.: Гл. упр. геодез. и картогр. при Совете Министров СССР, Предпр. № 13,1983. – 255 с.

Надійшла 17.09.15

* * *

УДК 528.06:528.1

В. А. Рябчій, В. В. Рябчій, В. І. Павліщев

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ ДЛЯ ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Проанализированы особенности функции правдоподобия Фишера, которая используется для вероятностного обоснования метода наименьших квадратов, в зависимости от количества всех и только избыточных измерений и значений дисперсии единицы веса. Определено влияние каждой отдельной составляющей (параметра) этой функции на ее величину. Установлено, что значение логарифма функции правдоподобия при значении дисперсии более чем 0,398942… с положительного превращается в отрицательное, а затем и стремительно уменьшается. Увеличение количества всех или только избыточных измерений уменьшает значение логарифма этой функции. Рекомендуется не использовать эту функцию для вероятностного обоснования метода наименьших квадратов.

The features of the likelihood function by Fischer used to study the likely method of least squares, depending on the number of all and only excess measures and values of weight unit dispersion are analyzed. The effect of each single component (parameter) of this function on its size is defined. It is established that the value of logarithm of the likelihood function at the size of dispersion more than 0.398942… from positive turns into negative and then rapidly decreases. Increase of the number of all or only excess measures reduces the value of the logarithm of this function. It is recommended not to use this function to study the likely method of least squares.

Постановка проблеми. У своїх книгах [11, с. 11-12] і [12, с. 8] Ю. І. Маркузе для обґрунтування методу найменших квадратів використав вираз, який назвав ***функцією правдоподібності L:***

$$L = f(y_1, y_2, \dots, y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_0^{2n})^{-\frac{1}{2}} [\det Q]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp(-\frac{1}{2\sigma_0^2}[y - M_y]^T Q^{-1} [y - M_y]). \quad (1)$$

У цьому виразі y_1, y_2, ..., y_n – результати вимірювань; σ_0^2 – дисперсія одиниці ваги; $Q = P^{-1}$ – матриця зворотних ваг; M_y – математичне сподівання величин y.

В одній із цих книг він пише: "Для знаходження найкращих оцінок для M_y та σ_0^2 застосовують метод максимальної правдоподібності, запропонований Р. Фішером, який завжди приводить до ймовірних, асимптотично нормальних і асимптотично ефективних оцінювань. Для вирішення задач з умовою $\ln L$=max складають і разом вирішують два матричних рівняння: $\partial \ln L / \partial M_y = 0$; $\partial \ln L / \partial \sigma_0^2 = 0$".

Тобто функція (1) логарифмується, потім беруться частинні похідні, вони прирівнюються до нуля і одержуємо найкращі оцінки середньої квадратичної похибки (СКП) одиниці ваги та математичного сподівання виміряних величин.

Здається, послідовність наведених дій не викликає сумніву. Але тут слід задуматись над питанням: який саме максимум чи мінімум може мати дана функція?

Зв'язок теми дослідження з важливими науковими і практичними завданнями. Застосування методу найменших квадратів і методу максимальної правдоподібності має велике значення при математичному опрацюванні геодезичних вимірів. Тому поглиблене обґрунтування методу найменших квадратів лишається важливим і актуальним завданням не тільки теоретичного, а й практичного змісту.

Аналіз останніх публікацій, які стосуються теми нашого дослідження. Починаючи з XIX ст. і до сьогодення методу найменших квадратів та методу максимальної правдоподібності приділяється багато уваги (див. праці [1-13, 15, 17-20]). Їх автори – відомі вчені: В. Д. Большаков, М. Г. Відуєв, С. П. Войтенко, К. Ф. Ґаусс, П. М. Зазуляк, М. І. Ідельсон, Ю. В. Лінник, Г. С. Кондра, Ю. І. Маркузе, А. І. Мазмішвілі, М. В. Смірнов та багато інших [21-35], які також знайомі читачеві.

У книзі В. Д. Большакова та його співавторів [3, с. 58] вказується, що для виміряних величин спочатку встановлюється функція правдоподібності L_i, яка подібна за виглядом до щільності розподілу $\varphi(x_i)$, а потім ця функція визначається для всієї вибірки:

$$L = L_1, L_2, ..., L_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

В. Д. Большаков та І. Ю. Маркузе в іншій своїй книзі [1, с. 47] пишуть, що наведений ними вираз при змінній η набуває максимального значення, якщо

$$\Phi = (y-\eta)Q^{-1}(y-\eta) = \min.$$

Ю. В. Лінник у фундаментальній праці [9, с. 138] вказує, що формула

$$\ln L(l_1, l_2, ..., l_N) = -\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln(p_1 p_2 ... p_N) - -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{r=1}^{N} p_r (l_r - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{rj})^2$$

має досягати максимальних значень. У формулі: N – кількість усіх вимірів; p_r – ваги, які вважаються відомими.

У цій же праці (с. 138) він стверджує, що "при будь-якому значенні σ^2 максимум функції правдоподібності досягається при виборі a_1, a_2, ..., a_n, незалежно від σ^2, так що $\sum_{r=1}^{N} p_r (l_r - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{rj})^2 = \min$".

М. В. Смірнов і Д. О. Бєлугін у джерелі [20, с. 159] зазначають: "сутність методу найбільшої правдоподібності полягає у тому, що за оцінку параметра θ береться значення аргументу θ, яке перетворює функцію L у максимум". Це твердження у різних інтерпретаціях зустрічаємо і в інших авторів. Зокрема, у М. Г. Відуєва та Г. С. Кондри: "оцінкою найбільшої або максимальної правдоподібності є таке значення θ, при якому функція правдоподібності набуває максимуму" [4, с. 141].

Таким чином, найважливішим у методі максимальної правдоподібності є функція правдоподібності.

У наведеній вище праці [20, с. 159] та в деяких інших вказується, що у випадках двох параметрів (θ_1 і θ_2) їхні оцінки визначаються з двох рівнянь, що вирішуються разом: $\partial \ln L/\partial\Theta_1=0$ і $\partial \ln L/\partial\Theta_2=0$. Але в подальшому кожне рівняння розглядається окремо.

Більшість авторів для оцінювання математичного сподівання M_x і дисперсії σ^2 при рівноточних вимірах використовують функцію, відому як

$$L(x_i, a, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2)$$

У статтях [17, 18] зазначається, що показник степеня числа e у виразі (2) може набувати двох значень: $-n/2$ або $-r/2$ (де r – кількість надлишкових вимірів). Тому цей вираз можна записати у дещо простішому вигляді:

$$L(x_i, a, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{r}{2}}. \quad (3)$$

Автори статті [18] стверджують, що при обґрунтуванні простої та загальної арифметичних середин на значення $\ln L$ впливають загальна кількість вимірювань, кількість надлишкових вимірів, значення СКП, а ще вони пишуть, що значення функції правдоподібності "стрімко" змінюється.

А. І. Мазмішвілі у книзі [10, с. 167-168] вказує: "якщо випадковий розкид x_1, ... x_n відносно параметра x підпорядковується нормальному розподілу, то рішення, основане на методі найменших квадратів, збігається з рішенням, отриманим за методом максимальної правдоподібності..., разом з тим для певного класу задач метод найменших квадратів дає в середньому оцінку, незалежну від будь-якого розподілу". Цим самим підкреслюється, що метод максимальної правдоподібності може діяти тільки за нормального закону розподілу.

Автори навчального посібника [15, с. 169] вказують, що метод найбільшої правдоподібності на практиці часто викликає необхідність розв'язання доволі складних систем рівнянь і він не завжди дає найкращі оцінки. Але, які значення може набувати функція правдоподібності, вони не наводять.

У праці [23] йдеться про те, що в багатьох задачах модель імовірності може бути виражена як функція розподілу у вигляді щільності ймовірності. Однією з переваг такої моделі є простота вияву багатовимірних і багатофакторних розподілів. Прикладом сфер використання графічних моделей є кліматологія та епідеміологія, де вони поширюються з багатофакторним розподілом і мають просторову кореляцію, тож залежності між змінними моделі повинні бути враховані. Наведено також приклади використання цього алгоритму для виявлення кількості реальних опадів і даних про смертність серед хворих, уражених вірусами H1N1.

Автор праці [25] запевняє: "на відміну від оцінювання точності методом найменших квадратів, який передусім є описовим інструментом, метод максимальної правдоподібності є кращим при оцінюванні параметрів у сфері статистики та незамінним інструментом багатьох статистичних методів моделювання, зокрема нелінійного у випадку нестандартних даних".

Тема застосування функції максимальної правдоподібності піднімається і в багатьох сучасних монографіях, підручниках та лекційних курсах з математичної статистики. Сьогодні цей математичний засіб використовується при аналізі відомостей з фінансових ринків (зміна процентних ставок, валютних курсів, ціни акцій; обчислення капіталу для уникнення ризиків; розподіл втрат; управління ризиками тощо) [24, 27, 28], при математичному й статистичному моделюванні епідеміологічних явищ, при медичних та клінічних випробуваннях [22, 23], у кліматології [23], стохастичному моделюванні фізичних явищ і в теорії неповних даних [26] тощо.

У статті [29] представлено огляд моделі логістичної регресії для залежних змінних, що мають два або більше дискретних категорійних рівнів. У ній рівняння максимальної правдоподібності отримано з розподілу імовірностей залежних змінних методом Ньютона – Рафсона для нелінійних систем, а також описується загальна реалізація алгоритму.

Автори праці [30] наводять алгоритми визначення функції максимальної правдоподібності ґауссових графічних моделей з умовними обмеженнями незалежності. Відомо, що цей процес може бути ілюстрований як необмежена задача оптимізації, і що він має цілісне рішення, якщо основне рішення знаходиться в середині. У центрі уваги авторів даної статті – числові алгоритми для великих задач з графів. У цій статті також є кілька порівнянь алгоритмів розсіяних матриць і теорії нормальних графічних моделей з графів, а ще описано числові методи відбору топології в ґауссових графічних моделях.

У публікації [31] вказується, що метод максимальної правдоподібності забезпечує оцінювання, яке має інтуїтивну основу і багато бажаних статистичних властивостей. Метод дуже простий для застосування. Після того, як оцінено максимальну правдоподібність, згідно із загальною теорією оцінювання максимальної правдоподібності використовуються стандартні похибки та інші величини, придатні для статистичного висновку. Недолік методу – він сильно залежить від великих допусків до структури даних.

Автор [32] зазначає, що метод максимальної імовірності використовується для оцінювання невідомого істинного значення параметра точки $\hat{\theta}_x$, яка максимізує імовірність функції L_x. Це називається оцінюванням максимальної правдоподібності. Автор уживає форму "так званий метод", оскільки він достатньо невизначений і тому вважається нечітким. Він стверджує, що функція правдоподібності L_x не має максимуму, а якщо і має, то цей максимум не є чимось особливим, оскільки залишається невідомим, який це максимум: глобальний чи локальний. Теорія стверджує, що локальний максимум може мати кращі властивості, ніж загальновизнаний глобальний. Тим паче, що глобальний максимум – більш жорстке поняття і його важче визначити. Як правило, для надійної локальної оптимізації необхідно визначити початкову точку. Щоб ця точка була "надійною" технічно, необхідно, аби вона підпорядковувалась нормальному закону розподілу, а її похибка наближалася до нуля.

У публікації [33] також розглядається питання теорії максимальної правдоподібності, зокрема вона порівнюється з доведенням теореми Бейєса. Наголошується, що мета статистичного висновку про використання одержаних даних – встановити параметри, які визначають саму модель.

У статті [34] стверджується, що оцінювання максимальної імовірності – найпоширеніший метод у загальному підході до отримання оцінки розподілу за обмеженою вибіркою. Його запропонував Фішер близько ста років тому, і відтоді він широко використовується. Наведено три приклади вирішення задач за методом максимальної правдоподібності.

Стаття [35] містить короткий опис практичного застосування теорії оцінювання методом максимальної правдоподібності. У ній говориться, що не так важливо виявляти деталі, проте варто засвоювати деякі основні принципи.

Дуже суперечливі позиції висловлює математична енциклопедія [14; т. 3, с. 483], яка стверджує, що в основу методу максимальної правдоподібності не закладено ніяких чітко виражених міркувань оптимальності. Дуже поширена думка про його високі якості, що ґрунтується частково на великому успіхові методу при застосовуванні до конкретних задач, а частково на строго встановлених асимптотично оптимальних властивостях.

Невирішені частини загальної проблеми. Сама суть принципу найменших квадратів і методу максимальної правдоподібності не викликає сумнівів. Їх можна прийняти, виходячи з деяких простих міркувань. Якщо похибка одна, то ймовірність її повторної появи буде тим більша, чим менша буде величина самої похибки. Але вважати, що при мінімальному значенні степеня числа e у формулі (1) логарифм функції правдоподібності для сукупності випадкових вимірів набуває максимального значення, не зовсім правильно. Тому напрошуються два запитання: "Чому ж все-таки дорівнює показник степеня числа e у виразі (1)?" і "Чи може функція правдоподібності набувати мінімального або максимального значень для сукупності випадкових вимірів?".

Постановка завдання (мета статті). З наведених вище міркувань і виникла мета статті – дослідити формулу (1) і встановити, яких значень максимуму чи мінімуму ця функція може набувати.

Виклад основного матеріалу. Детально розглянемо і проаналізуємо функцію правдоподібності (1). Для цього прологарифмуємо її:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma_0^2) - \frac{1}{2}\ln[\det Q] - -\frac{1}{2\sigma_0^2}[y-M_y]^T Q^{-1}[y-M_y]. \quad (4)$$

Для скорочення записів у ході аналізу уведемо такі позначення:

$$a = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}; \quad b = (\sigma_0^{2n})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma_0^n}; \quad c = [\det Q]^{-\frac{1}{2}};$$

$$d = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}[y-M_y]^T Q^{-1}[y-M_y]\right). \quad (5)$$

Розглянемо вирази (5), а саме зробимо припущення щодо набуття ними можливих значень та їх взаємодію між собою.

Значення параметра a залежить тільки від кількості вимірів і він завжди менший за одиницю. Його максимум при n=2 дорівнюватиме: a_{max}=0,1592. При зростанні кількості вимірювань цей параметр буде зменшуватись і він є величиною безрозмірною.

Параметр b залежить від значення дисперсії одиниці ваги σ_0^2 і кількості вимірювань n. Він може набувати таких величин: якщо $\sigma_0>1$, то $b<1$; якщо $\sigma_0=1$, то $b=1$; якщо $\sigma_0<1$, то $b>1$.

Відомо, що СКП одиниці ваги теоретично може набувати значень менше одиниці. Але на практиці при звичайних вимірюваннях цього досягти нереально. Це може стати реальністю тільки при спеціальних високоточних вимірюваннях, коли відхилення між їх результатами становитиме менше 1 мм або 1″, а якщо це нерівноточні виміри, то ще повинні бути і відповідні ваги.

Звісно, значення дисперсії одиниці ваги σ_0^2 загалом впливатиме на значення функції правдоподібності. Але ця величина знаходиться у знаменнику, і якщо вона більше одиниці, то параметр b зменшуватиме значення функції правдоподібності й $\ln L$. Якщо σ_0=1, то параметр b ніякого впливу на логарифм функції правдоподібності не чинитиме, оскільки ln1=0. Цей параметр не безрозмірний і залежатиме від розмірності вимірів та показника степеня.

Параметр c може набувати значень менше, більше або дорівнювати одиниці. Це залежатиме від значень зворотних ваг вимірів.

Розглянемо детальніше показник степеня числа e. Його беруть зі знаком мінус. У чисельнику цього показника знаходиться квадратична форма [11, с. 12] – добуток трьох матриць: транспонованої матриці вектора поправок до виміряних величин, матриці ваг вимірів і матриці / вектора-стовпця поправок. Тобто це є сума Σpvv. У знаменнику цього показника степеня знаходиться подвоєне значення дисперсії одиниці ваги σ_0^2, яка обчислюється за такою формулою:

$$\mu^2 = \sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} pvv}{r} \quad (6)$$

або

$$\mu^2 = \sigma_0^2 = \frac{[y-M_y]^T Q^{-1}[y-M_y]}{r}. \quad (7)$$

Тоді параметр d можна записати так:

$$d = e^{-\frac{\Sigma pvv}{2\sigma_0^2}} = e^{-\frac{r}{2}}. \quad (8)$$

Цим виразом підтверджується суть формули (3). Враховуючи вирази (3) та (6-8), можна прийняти, що параметр d хоча і записаний у матричній формі, але його логарифм дорівнюватиме $-r/2$, тобто половині надлишкових вимірів зі знаком мінус.

Цей параметр не залежить від величини дисперсії одиниці ваги σ_0^2 і значення, взятого за оцінку результатів вимірювань, тобто простої чи загальної арифметичної середин, або за вирівняні значення виміряних величин, які мають між собою якісь незалежні функціональні зв'язки.

Значення параметра d залежить тільки від кількості надлишкових вимірів, і він завжди буде меншим за одиницю. Його максимальне значення при r=1 дорівнюватиме: d_{max}=0,6065. При збільшенні кількості надлишкових вимірів значення цього параметра буде зменшуватись. Крім того, важливим є те, що показник степеня не залежить від значення квадратичної форми $\sum_{i=1}^{n} pvv$.

Для детальнішого аналізу формули (1) наведемо вирази, що передають взаємодію між деякими параметрами рівнянь (5):

$$(\sigma_0^{2n})^{-\frac{1}{2}}[\det Q]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m_{y_1} \cdot m_{y_2} \cdot \ldots \cdot m_{y_n}}; \quad (9)$$

$$\det Q^{-\frac{1}{2}} = (p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \ldots \cdot p_{y_n})^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді, з урахуванням залежностей (8) і (9), формулу (1) можна записати так:

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{m_{y_1} \cdot m_{y_2} \cdot \ldots \cdot m_{y_n}} e^{-\frac{r}{2}} \quad (10)$$

або

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{(p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \ldots \cdot p_{y_n})^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0^n} e^{-\frac{r}{2}}. \quad (11)$$

У формулах (10 та 11) значення функції правдоподібності L залежатиме від параметрів a і d та величин $1/m_{y_1}\cdot m_{y_2}\cdot\ldots m_{y_n}$ і $(p_{y_1}\cdot p_{y_2}\cdot\ldots p_{y_n})^{1/2}$. При цьому, якщо виміри рівноточні й СКП дорівнює одиниці, тоді тільки два параметри (a і d) впливатимуть на значення функції. У випадку рівноточних вимірів формулу (10) можна записати в такому вигляді:

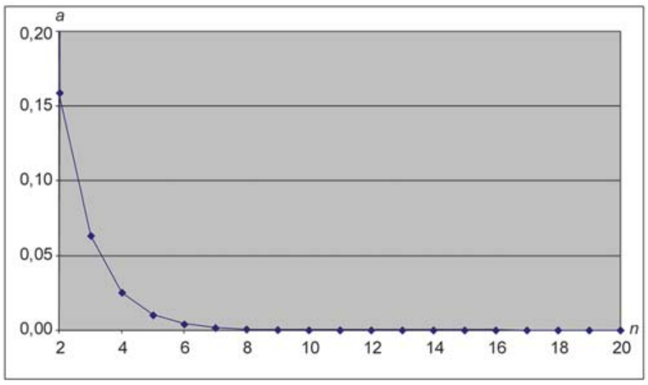
$$L=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{m^n}e^{-\frac{r}{2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{r}{2}}\cdot m^n}. \qquad (12)$$

Позначимо, що g=$1/m^n$ і виконаємо обчислення параметрів a (5), d (8) і g при різних значеннях кількості всіх n і надлишкових r рівноточних вимірів та СКП m. Результати розрахунків зведемо у табл. 1 і 2.

Таблиця 1. **Значення параметра *a* та його логарифма**

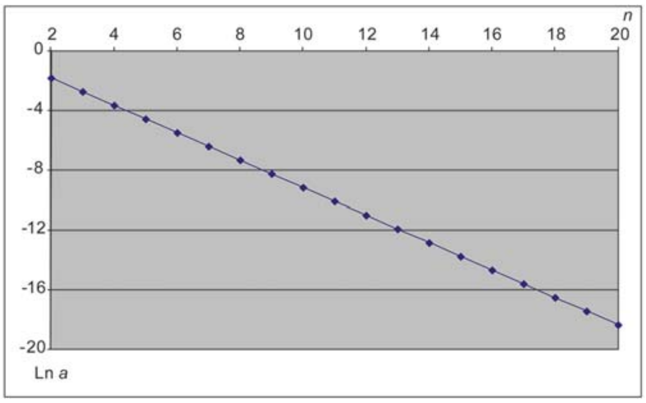
n	a	ln*a*
2	0,159154943092	-1,837877066409
3	0,063493635934	-2,756815599614
4	0,025330295911	-3,675754132819
5	0,010105326014	-4,594692666023
6	0,004031441804	-5,513631199228
7	0,001608312587	-6,432569732433
8	0,000641623891	-7,351508265637
9	0,000255970898	-8,270446798842
10	0,000102117614	-9,189385332047
11	0,000040739034	-10,108323865251
12	0,000016252523	-11,027262398456
13	0,000006483819	-11,946200931661
14	0,000002586669	-12,865139464865
15	0,000001031932	-13,784077998070
16	0,000000411681	-14,703016531275
17	0,000000164237	-15,621955064479
18	0,000000065521	-16,540893597684
19	0,000000026139	-17,459832130889
20	0,000000010428	-18,378770664094

За даними табл. 1 побудуємо графіки залежності значень параметра a та його логарифма від кількості вимірів (мал. 1 та 2). Але при цьому відмітимо таке. Фактично графіки є точковими, оскільки параметр a існує тільки при цілих значеннях n (він є функцією дискретного аргументу n), починаючи з двох, але для наочності всі точки з'єднані прямими відрізками.



Мал. 1. Графік залежності значення параметра *a* від кількості вимірів *n*

Проаналізувавши табл. 1 та мал. 1, було встановлено, що при кількості вимірів понад 8 значення параметра a асимптотично наближається до нуля.



Мал. 2. Графік залежності значення ln*a* від кількості вимірів *n*

Згідно з даними, наведеними у табл. 1, значення логарифма параметра a завжди від'ємне і зменшується пропорційно величині $\ln(\sqrt{2\pi})^{-1}$, що наочно демонструє графік на мал. 2, де всі точки лежать на прямій.

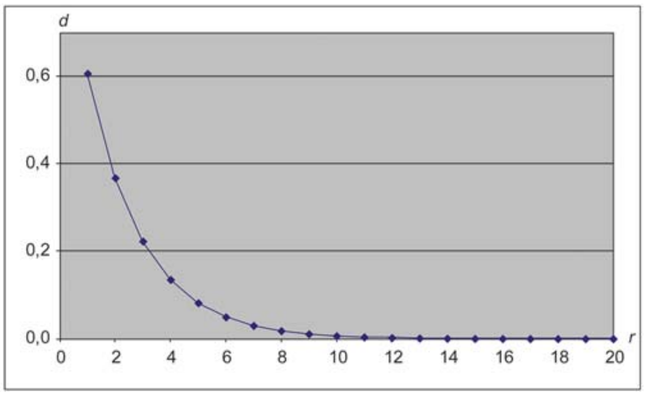
Тепер обчислимо значення параметра d та його логарифма залежно від кількості надлишкових вимірів (табл. 2).

Таблиця 2. **Значення параметра *d* та його логарифма**

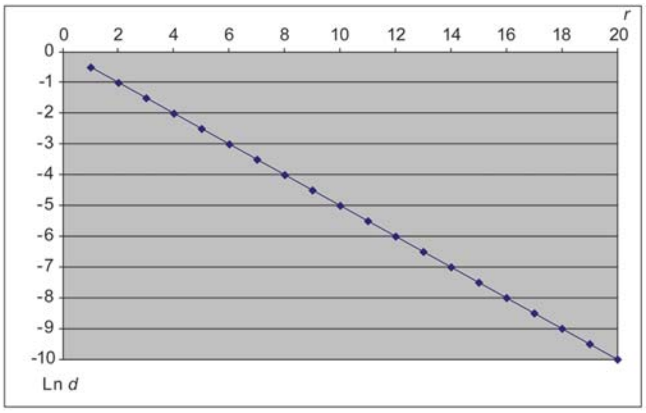
r	d	ln*d*
1	0,606530659713	-0,5
2	0,367879441171	-1,0
3	0,223130160148	-1,5
4	0,135335283237	-2,0
5	0,082084998624	-2,5
6	0,049787068368	-3,0
7	0,030197383422	-3,5
8	0,018315638889	-4,0
9	0,011108996538	-4,5
10	0,006737946999	-5,0
11	0,004086771438	-5,5
12	0,002478752177	-6,0
13	0,001503439193	-6,5
14	0,000911881966	-7,0
15	0,000553084370	-7,5
16	0,000335462628	-8,0
17	0,000203468369	-8,5
18	0,000123409804	-9,0
19	0,000074851830	-9,5
20	0,000045399930	-10,0

За табл. 2 побудовано графіки залежності значень параметра d та його логарифма від кількості надлишкових вимірів (мал. 3 і 4). Ці графіки також точкові, а параметр d є функцією дискретного аргументу r.

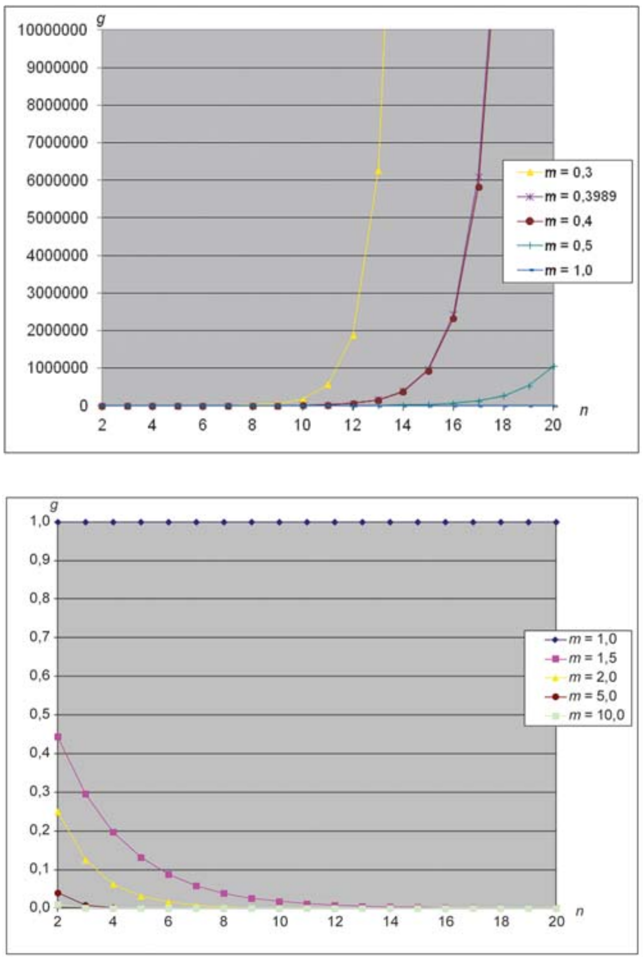
Проаналізувавши дані, наведені у табл. 2 та на мал. 3, було встановлено, що значення параметра d завжди менші за одиницю і зменшуються при збільшенні кількості надлишкових вимірів. Якщо їх понад 12, значення параметра d асимптотично наближається до нуля.



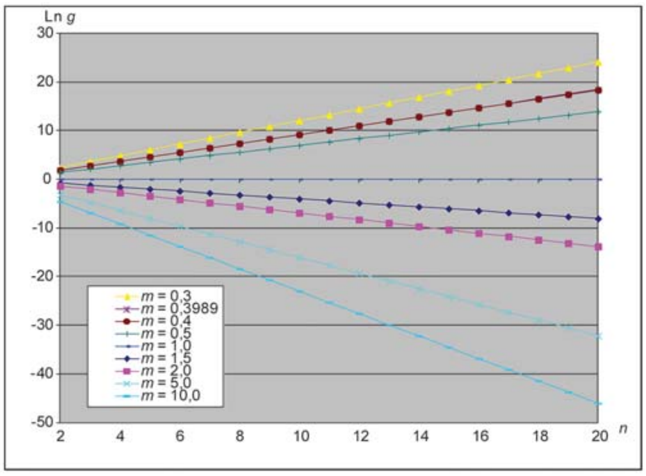
Мал. 3. Графік залежності значення параметра *d* від кількості надлишкових вимірів *r*



Мал. 4. Графік залежності значення ln*d* від кількості надлишкових вимірів *r*



Мал. 5 і 6. Графіки залежності значення параметра *g* від кількості вимірів *n*



Мал. 7. Графіки залежності значення ln*g* від кількості вимірів *n*

Згідно з даними, наведеними у табл. 2, значення логарифма параметра *d* завжди від'ємне і зменшується пропорційно коефіцієнту 0,5, починаючи зі значення 0,5, що наочно демонструє графік на мал. 4, і всі точки лежать на прямій лінії.

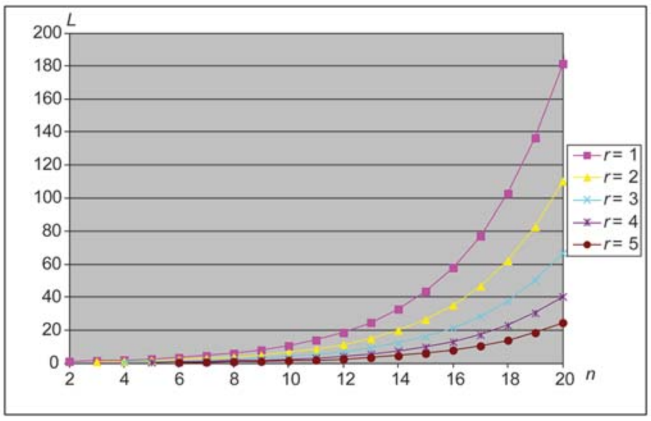
Результати обчислення значень параметра *g* та його логарифма залежно від значень СКП й кількості вимірів для зменшення обсягу статті не наводимо. Але пропонуються графіки залежності значень параметра *g* та його логарифма від кількості вимірів (мал. 5-7) при різних значеннях СКП – 0,3; 0,3989...; 0,4; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0 і 10,0.

Параметр *g* на цих малюнках не такий однозначний, як два попередніх. Його логарифм може набувати як додатних значень при величинах СКП менше одиниці ($m<1$), так і від'ємних, при СКП понад одиницю ($m>1$). У разі, якщо СКП дорівнює одиниці, то логарифм цього параметра дорівнює нулю. Тобто він залежить від значень СКП.

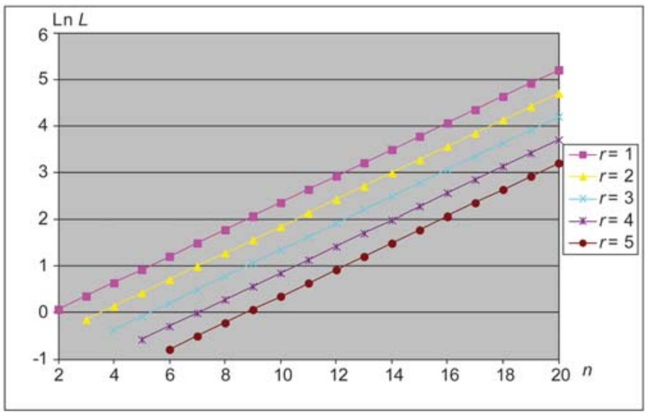
Одержані результати розрахунків параметрів функції правдоподібності *a, d* і *g* (їхні числові значення і значення логарифмів) дають можливість обчислювати величини самої функції правдоподібності та її логарифма залежно від кількості всіх і окремо надлишкових вимірів та СКП, а також визначати сумарний вплив цих параметрів.

Наведемо приклад. При значенні СКП $\sigma<0{,}398942...$ добуток параметрів *a* і *d* більший за одиницю, а логарифм цього добутку додатний. При СКП $\sigma=0{,}398942...$ добуток параметрів *a* і *d* дорівнює одиниці, а логарифм добутку – нулю. У цьому випадку значення функції залежить тільки від кількості надлишкових вимірів, а її логарифм дорівнює половині кількості надлишкових вимірів зі знаком мінус. При збільшенні СКП понад 0,398942..., наприклад, вже при σ=0,4, добуток параметрів a і d набуває значень менше одиниці й відповідно логарифм цього добутку стає від'ємним.

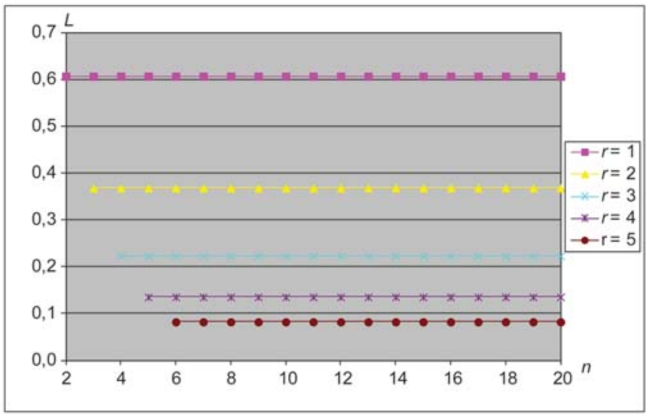
Наведемо основні результати розрахунків значення функції правдоподібності та її логарифма залежно від кількості усіх і надлишкових вимірів при деяких значеннях СКП (мал. 8-17).



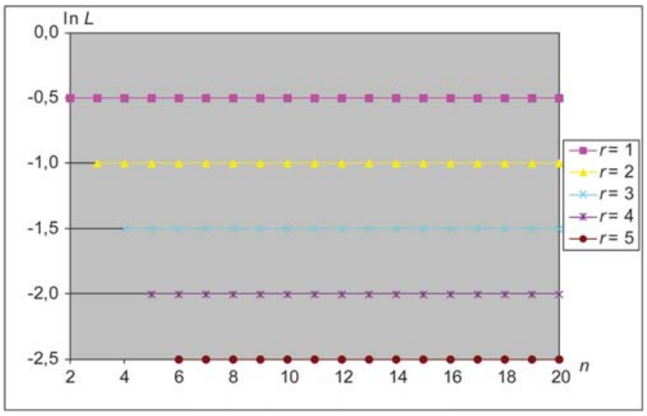
Мал. 8. Графіки залежності значення L від кількості вимірів n (при m=0,3)



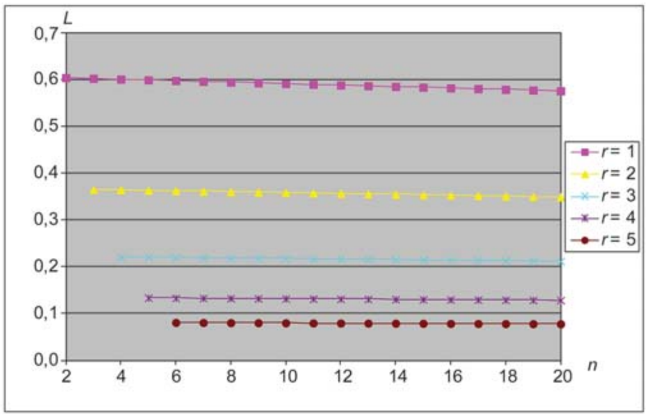
Мал. 9. Графіки залежності значення ln$L$ від кількості вимірів n (при m=0,3)



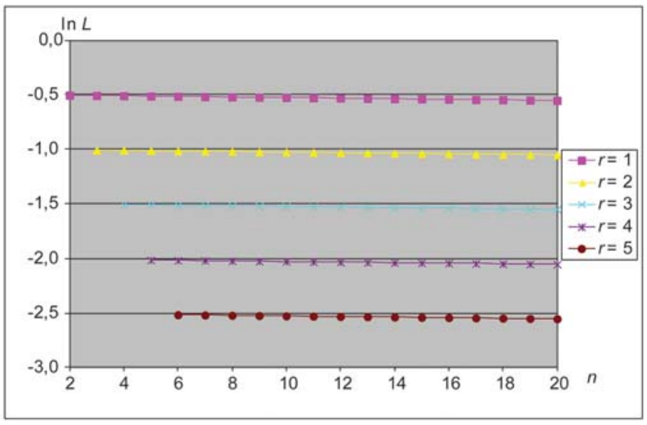
Мал. 10. Графіки залежності значення L від кількості вимірів n (при m=0,398942...)



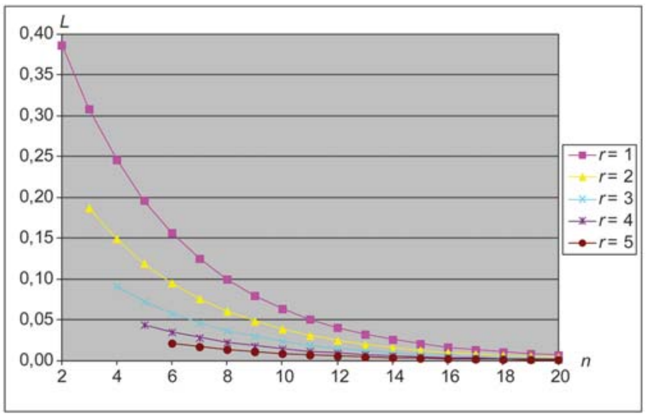
Мал. 11. Графіки залежності значення ln$L$ від кількості вимірів n (при m=0,398942...)



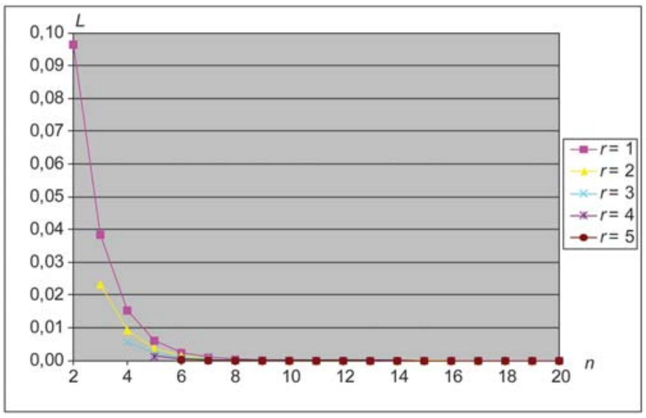
Мал. 12. Графіки залежності значення L від кількості вимірів n (при m=0,4)



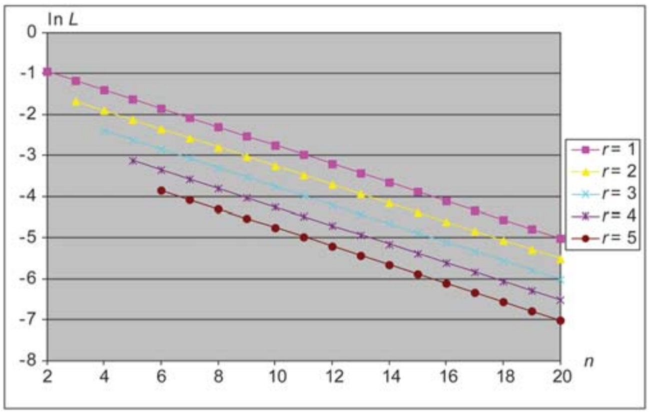
Мал. 13. Графіки залежності значення ln$L$ від кількості вимірів n (при m=0,4)



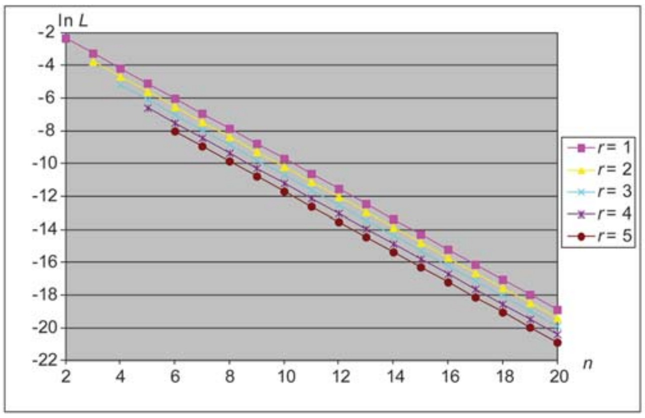
Мал. 14. Графіки залежності значення L від кількості вимірів n (при m=0,5)



Мал. 16. Графіки залежності значення L від кількості вимірів n (при m=1,0)



Мал. 15. Графіки залежності значення ln$L$ від кількості вимірів n (при m=0,5)



Мал. 17. Графіки залежності значення ln$L$ від кількості вимірів n (при m=1,0)

Розрахунки було виконано з умовою, що виміри рівноточні. Прийнявши, що $m^n = m_{y_1} \cdot m_{y_2} \cdot ... \cdot m_{y_n}$, можна дійти такого висновку: результати обчислень при нерівноточних вимірах будуть такими самими, як і при рівноточних. Тому їх тут і не наводимо.

Аналізуючи наведені результати розрахунків параметрів функції правдоподібності та їх залежність один від одного, можна сказати, що сама функція та її логарифм набувають максимальних (додатних) значень тільки при значенні СКП менше за 0,398942... Після цього значення функції та її логарифма стрімко зменшуються при збільшенні кількості всіх, у т. ч. і надлишкових вимірів. Тобто говорити про якийсь максимум чи мінімум цієї функції не зовсім коректно.

Функцію правдоподібності можна було б використовувати при експериментальних розрахунках і дослідженнях результатів вимірювань, але при цьому дістаємо дещо суперечливі дані. Наприклад, задаючись довільним значенням L та змінюючи значення n і r, можна визначати співвідношення між усіма і надлишковими вимірами, обчислюючи при цьому значення СКП.

З формули (12) одержимо, що

$$m^n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{r}{2}} \cdot L}.$$

Звідки

$$m = \frac{1}{\left((2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{r}{2}} \cdot L\right)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{або} \quad m = \frac{0{,}398942\ldots}{\left(e^{\frac{r}{2}} \cdot L\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Приклад такого розрахунку подаємо у табл. 3.

Аналізуючи дані цієї таблиці, можна побачити, що, наприклад, при n=4 і r=1 значення СКП m=0,3521 таке саме, як і при n=8 і r=2 або при n=12 та r=3, або при n=16 і r=4, або при n=20 і r=5 (для наочності ці комірки затушовано). У цій таблиці також спостерігається повторення і деяких інших значень СКП, що можна помітити на мал. 8-17. Дані табл. 3 можна екстраполювати і на випадок простої або загальної арифметичних середин, але тільки при L=1.

Тепер візьмемо частинні похідні M_y і σ_0^2 (див. вираз (4)) і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial M_y} = \frac{1}{\sigma_0^2}[y - M_y]^T Q^{-1}[-1]_{(n,\,1)} = 0; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^4}[y - M_y]^T Q^{-1}[y - M_y] = 0. \quad (14)$$

У результаті перемноження матриць чисельника правої частини виразу (13) отримуємо суму Σpv. Тоді формулу (13) можна записати так:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial M_y} = \frac{p_1(y_2 - M_{y_1}) + p_2(y_2 - M_{y_2}) + ... + p_n(y_n - M_{y_n})}{\sigma_0^2} = 0. \quad (15)$$

Прирівняти до нуля вираз (15) можна, але визначити величини M_y неможливо, оскільки це математичне очікування не однієї, а різних величин. Крім того, практично при зрівнюванні величин, які мають між собою функціональні зв'язки, Σpv не дорівнює нулю. Це може бути хіба-що випадковий збіг.

З виразу (14) випливає, що $-n/\sigma_0^2 + \Sigma p\upsilon\upsilon/\sigma_0^4 = 0$. Звідки $\sigma_0^2 = \Sigma p\upsilon\upsilon/n$.

Так одержуємо приблизну формулу обчислення дисперсії одиниці ваги, яка не застосовується при зрівнюванні.

Таблиця 3. **Значення СКП залежно від кількості всіх і надлишкових вимірів (при *L*=1)**

n	*m*				
	r = 1	*r* = 2	*r* = 3	*r* = 4	*r* = 5
2	0,3107	-	-	-	-
3	0,3377	0,2859	-	-	-
4	0,3521	0,3107	0,2742	-	-
5	0,3610	0,3266	0,2955	0,2674	-
6	0,3670	0,3377	0,3107	0,2859	0,2630
7	0,3714	0,3458	0,3220	0,2998	0,2791
8	0,3748	0,3521	0,3307	0,3107	0,2919
9	0,3774	0,3570	0,3377	0,3194	0,3022
10	0,3795	0,3610	0,3434	0,3266	0,3107
11	0,3812	0,3643	0,3481	0,3326	0,3178
12	0,3827	0,3670	0,3521	0,3377	0,3239
13	0,3839	0,3694	0,3555	0,3421	0,3291
14	0,3849	0,3714	0,3584	0,3458	0,3337
15	0,3859	0,3732	0,3610	0,3491	0,3377
16	0,3867	0,3748	0,3632	0,3521	0,3412
17	0,3874	0,3762	0,3652	0,3547	0,3444
18	0,3880	0,3774	0,3670	0,3570	0,3472
19	0,3886	0,3785	0,3687	0,3591	0,3498
20	0,3891	0,3795	0,3701	0,3610	0,3521

Оцінки, одержані з використанням методу максимальної правдоподібності, іноді бувають "зміщеними", але це легко можна усунути [3, с. 58 та ін.]. Дійсно, якщо мова йде про загальну або просту арифметичні середини, то їх значення при знаменнику n або $n-1$, особливо при значній кількості n, суттєво не зміниться [16]. Але при вирівнюванні величин, між якими існують незалежні функціональні зв'язки, кількість надлишкових та й загалом усіх вимірів може значно відрізнятись, і різниця між ними буде вже значною. Тож не звертати увагу на те, що оцінка "зміщена", недоцільно й нераціонально.

Ю. І. Маркузе у книзі [13, с. 22] при обґрунтуванні методу найменших квадратів зазначає: "важливою умовою, на якій базується обґрунтування методу найменших квадратів, є умова незміщенності оцінок x_j, $\tilde{y}_j$, що завжди виконується при вихідних рівняннях лінійного виду. Не так у випадку, якщо ці рівняння нелінійні".

Тепер розглянемо приклад практичного застосування методу найменших квадратів до результатів вимірювань сумарних перевищень у нівелірній мережі, які поєднані функціональними зв'язками. У цьому разі вихідний векторфункція матиме такий вигляд:

$$\varphi(h) = \begin{pmatrix} \varphi_1(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) \\ \varphi_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) \\ \varphi_3(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) \end{pmatrix}.$$

Вихідні матриці для зрівнювання нівелірної мережі корелатним способом* будуть такі:

матриця коефіцієнтів умовних рівнянь:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix};$$

матриця зворотних ваг вимірів:

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix};$$

матриця / вектор-стовпець вільних членів:

$$W = \begin{bmatrix} +15 \\ -30 \\ +20 \end{bmatrix}.$$

Наведемо тільки основні результати розрахунків: $[\det Q]^{-\frac{1}{2}}$=2,3053; *сума* Σpvv=399,1935 мм^2; *дисперсія одиниці ваги:* $\sigma_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}$=133,065 мм^2; *транспонована матриця-вектор поправок:* V^{T}=[3,0914 7,5806 –4,3280 5,1613 –7,9032 5,1613 –12,0968]; *СКП одиниці ваги:* μ=11,535 мм; *СКП семи сумарних перевищень* m_h (мм): 8,16; 8,94; 9,65; 10,32; 13,65; 10,32; 11,54.

Показник степеня числа e у формулі (1) для даного наведеного прикладу дорівнює половині надлишкових вимірів зі знаком мінус, тобто $e^{-1,5}$.

Значення параметрів функції правдоподібності (1), значення самої функції та їх логарифмів будуть такими:

$$a=0,0016083126; \quad b=0,0000000368; \quad c=2,30530;$$
$$d=0,2231301601; \quad L=0,00000000003;$$
$$\ln a=-6,432570; \quad \ln b=-17,117919; \quad \ln c=0,835211;$$
$$\ln d=-1,50; \quad \ln L=-24,215278.$$

Контроль обчислень виконувався за такою формулою:

$$V^{\mathrm{T}}PV = -KW = 399,1935.$$

Формула (1) функції правдоподібності з вико-

* Приклад корелатного способу зрівнювання наводимо тому, що Ю. І. Маркузе в [11, с. 11-12; 12, с. 8] при аналізі формули функції правдоподібності (1) наводить формули умовних рівнянь, векторів поправок і корелат у матричній формі – саме для цього способу зрівнювання.

ристанням матриць дає такий самий результат, що й інші вирази, зокрема (10).

Беручи до уваги зміни значень функції та її логарифма при збільшенні кількості усіх, у т. ч. і надлишкових вимірів, говорити про максимуми або мінімуми функції взагалі недоцільно. Тому, враховуючи значення, які може набувати показник степеня числа e, використовувати функцію правдоподібності для обґрунтування методу найменших квадратів також недоцільно.

Тут необхідно вказати, що збільшення кількості надлишкових вимірів підвищує оцінку точності. Це підтверджується формулами (6 і 7). Але збільшення кількості надлишкових вимірів у формулі (1) спричинює зменшення значення наведеної функції правдоподібності (1) та її логарифма (4).

Тепер детальніше розпишемо показник степеня числа e у формулі (1), використовуючи наведений приклад зрівнювання нівелірної мережі. Замінимо математичне очікування M_y на зрівняні значення сумарних перевищень:

$$\ln d = -\frac{[\tilde{h}_i - h_i]^T Q^{-1} [\tilde{h}_i - h_i]}{2\sigma_0^2} = = -\frac{[(\tilde{h}_1 - h_1), (\tilde{h}_2 - h_2), ..., (\tilde{h}_7 - h_7)]^T Q^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 - h_1 \\ \tilde{h}_2 - h_2 \\ .... \\ \tilde{h}_7 - h_7 \end{bmatrix}}{2\sigma_0^2}, \quad (16)$$

де $\tilde{h}_i$ і h_i – зрівняне і виміряне значення сумарних перевищень.

Вектор поправок при корелатному способі зрівнювання знаходимо за формулою $V=QB^TK$, а зрівняні величини – $\tilde{y}_i = y_i + v_i$.

Для порівняння розкриємо показник степеня числа e у формулі (1) для випадку загальної арифметичної середини:

$$\ln d = -\frac{[(x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), ..., (x_n - \bar{x})]^T P \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ .... \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix}}{2\mu^2}. \quad (17)$$

Аналізуючи формули (16) і (17), відмітимо, що в результаті взяття частинної похідної по $\bar{x}$ у виразі (17) і прирівнювання її до нуля можна одержати формулу для обчислення загальної арифметичної середини. Але при взятті частинних похідних за виміряними значеннями сумарних перевищень у виразі (16) і прирівнянні їх до нуля обрати якусь одну найкращу оцінку для кожного значення сумарного перевищення (у даному прикладі їх сім), як у випадку загальної арифметичної середини, неможливо. Умову $\sum_{i=1}^{n} pvv = \min$ можна одержати тільки у сукупності, застосовуючи математичні дії (прийоми, формули тощо), які використовуються при строгому зрівнюванні незалежно від способу.

Метод найменших квадратів – це метод мінімізації параметрів (показників) оцінювання точності результатів зрівнювання та їх функцій. Він діє незалежно від того, якому закону підпорядковуються виміряні випадкові величини та їхні похибки.

У свій час К. Ф. Ґаусс дав кілька тлумачень методу найменших квадратів, зокрема: "значення невідомих, які одержані з найкращої комбінації спостережень, ми можемо з повним правом назвати ймовірними значеннями; вони будуть тотожні з тими значеннями, для яких функція Ω набуває найменшого значення. У даному випадку різниця $(V–L)$ виражає, коротко кажучи, різницю між обчисленим і спостереженим значеннями. Таким чином, імовірними значеннями невідомих будуть такі, які перетворюють на мінімум суму квадратів різниць між спостереженими й обчисленими значеннями V, V', V'', ..., помножених на ваги спостережень. Цю залежність ми встановили іншим шляхом у праці "Theoria Motus Corporum Coelestium..." [7]. Її можна прийняти для обґрунтування методу найменших квадратів, хоча термін "імовірне значення" вважаємо дискусійним. Але це вже інша тема.

Якщо суть поняття "випадкові похибки" підпадає під дію нормального закону розподілу, де малі за абсолютною величиною похибки зустрічаються частіше, ніж великі, то знаходження поправок за умовою $\sum_{i=1}^{n} pvv = \min$ є логічним і тому раціональним. А якщо і ні, то все одно при зрівнюванні використовують переважно метод найменших квадратів.

Висновки. 1. Проаналізувавши наукову літературу, встановлено, що метод максимальної правдоподібності має широке застосування у різних статистичних дослідженнях, у математичному й статистичному моделюванні та інших сферах.

2. При застосуванні цього методу для обґрунтування методу найменших квадратів виявлено, що на значення функції правдоподібності (1) та значення її логарифма впливають три речі: кількість усіх вимірювань, кількість надлишкових вимірів і значення СКП одиниці ваги при нерівноточних вимірюваннях або значення СКП рівноточних вимірів. Значення функції правдоподібності та значення її логарифма швидко змінюються залежно саме від цих трьох величин.

3. Показник степеня числа e функції правдоподібності (1) незалежно від виду його запису і використання самої функції завжди дорівнює половині надлишкових вимірів зі знаком мінус. Збільшення кількості надлишкових вимірів не зумовлює збільшення значення функції правдоподібності, а навпаки – зменшує її величину.

4. Спираючись на попередні висновки, пропонується для обґрунтування методу найменших квадратів функцію правдоподібності (1) не застосовувати.

І наостанок. Треба бути вдячними К. Ф. Ґауссу, Р. А. Фішеру та іншим вченим, які далі розвинули цю тему, бо вочевидь таке: не все ще "розкладено по полицях" і є потреба в подальших дослідженнях.

Перспектива подальших досліджень полягає в обґрунтуванні використання функції правдоподібності для встановлення оптимального співвідношення між кількістю усіх і надлишкових вимірів, а також дисперсії одиниці ваги.

Література

1. *Большаков, В.Д.* Городская полигонометрия. Уравнивание и основы уравнивания / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1979. – 303 с.

2. *Большаков, В.Д.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: учеб. пос. для вузов / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.

3. *Большаков, В.Д.* Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

4. *Видуев, Н.Г.* Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.

5. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003. – 216 с.

6. *Войтенко, С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.

7. *Гаусс, К.Ф.* Избранные геодезические сочинения; под общ. ред. С.Г. Судакова. – Т. 1. Способ наименьших квадратов; под ред., с введен. Г.В. Багратуни / К.Ф. Гаусс. – М.: Изд-во геодез. лит-ры, 1957. – 152 с.

8. *Идельсон, Н.И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений / Н.И. Идельсон. – М.: Геодезиздат, 1947. – 359 с.

9. *Линник, Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 352 с.

10. *Мазмишвили, А.И.* Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.

11. *Маркузе, Ю.И.* Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.

12. *Маркузе, Ю.И.* Основы уравнительных вычислений / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.

13. *Маркузе, Ю.И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

14. *Математическая* энциклопедия. – В 5 т.; гл. ред. И.М. Виноградов. – Т. 3. – М.: Сов. энцикл., 1982. – 592 с.; ил.

15. *Основи* математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсеєва, М.Д. Йосипчук. – Л.: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.

16. *Рябчій, В.А.* Визначення ймовірнішого значення за результатами нерівноточних вимірів однієї величини / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Геодез., картогр. та аерофотознім. – 2013. – Вип. 78. – С. 183-191.

17. *Рябчій, В.А.* Обґрунтування принципу найменших квадратів / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львів. політехніки, 2012. – Вип. І. – С. 104-107.

18. *Рябчій, В.А.* Про застосування методу максимальної правдоподібності для обґрунтування простої і загальної арифметичних середин / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Вісн. геодез. та картогр. – 2013. – № 5. – С. 26-33.

19. *Рябчій, В.А.* Теорія похибок вимірювань: навчальний посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Д.: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.

20. *Смирнов, Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белугин. – М.: Недра, 1969. – 379 с.

21. *Einicke, G.A.* Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future / G.A. Einicke. – Rijeka, Croatia: Intech. – 2012. – 286 p. – ISBN 978-953-307-752-9.

22. *Fleiss, Joseph L.* Statistical Methods for Rates and Proportions (Third Edition) / J.L. Fleiss, B. Levin, M.C. Paik. – John Wiley & Sons, Inc. – 2003. – 800 p. – ISBN 978-0-471-44542-5.

23. *Huang, Jim C.* Maximum-likelihood learning of cumulative distribution functions on graphs / J. C. Huang, J. Nebojsa // Proceedings of the 13 International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS) 2010, Chia Laguna Resort, Sardinia, Italy. V. 9 of JMLR: W&CP 9. – 2010. – P. 342-349.

24. *Le Cam, Lucien.* Asymptotics in statistics: some basic concepts (Second ed.) / L. Le Cam, Lo Y. Grace. – Springer. – 2000. – 285 p. – ISBN 0-387-95036-2.

25. *Myung, In Jae.* Tutorial on maximum likelihood estimation / I. J. Myung // Journal of Mathematical Psychology. – 47. – 2003. – P. 90-100.

26. *Ruppert, David.* Statistics and Data Analysis for Financial Engineering / D. Ruppert. – Springer. – 2010. – 98 p. – ISBN 978-1-4419-7786-1.

Інтернет-джерела

27. *Avdis, Efstathios.* Maximum Likelihood Estimation of the Equity Premium / E. Avdis, Je. A. Wachter. – 2013. – 68 p. – Загол. з екрану: http://www.nber.org/papers/w19684.pdf

28. *Bee, Marco.* On Maximum Likelihood Estimation of Operational Loss Distributions / M. Bee. – 2005. – 29 p. – Загол. з екрану: http://web.unitn.it/files/3_05_bee.pdf

29. *Czepiel, Scott A.* Maximum Likelihood Estimation of Logistic Regression Models: Theory and Implementation / S. A. Czepiel. – 23 p. – Загол. з екрану: http://czep.net/stat/mlelr.pdf

30. *Dahl, Joachim.* Maximum Likelihood Estimation of Gaussian Graphical Models: Numerical Implementation and Topology Selection / Jo. Dahl, V. Roychowdhury, L. Vandenberghe. – 29 p. – Загол. з екрану: http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/publications/covsel1.pdf

31. *Fox, John.* Maximum-Likelihood Estimation: Basic Ideas / J. Fox // Notes. – 2010. – 16 p. – Загол. з екрану: http://socserv.socsci.mcmaster.ca/jfox/Courses/SPIDA/mle-mini-lecture-notes.pdf

32. *Geyer, Charles J.* Maximum Likelihood in R. / Ch. J. Geyer. – 2003. – 9 p. – Загол. з екрану: http://www.stat.umn.edu/geyer/5931/mle/mle.pdf

33. *Kashin, K.* Statistical Inference: Maximum Likelihood Estimation / K. Kashin. – 2014. – 34 p. – Загол. з екрану: http://www.konstantinkashin.com/notes/stat/Maximum_Likelihood_Estimation.pdf

34. *Lebanon, Guy.* Maximum Likelihood Estimation / G. Lebanon. – 2011. – 6 p. – Загол. з екрану: http://www.cc.gatech.edu/~lebanon/notes/mle.pdf

35. *Purcell, S.* Maximum Likelihood Estimation / S. Purcell. – 2007. – Загол. з екрану: http://statgen.iop.kcl.ac.uk/bgim/mle/sslike_2.html

Надійшла 02.10.15