УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА УМОВИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

В.К. Шиндер, доцент, к.ф.-м.н., В.В. Волоцюга, магістрант,
Національний університет «Львівська Політехніка»

Анотація. *Запропоновано математичну модель дослідження впливу електромагнітного випромінювання на напружено-деформований стан будівельних конструкцій з криволінійними вирізами. Розроблена методика дозволяє привести дану задачу до визначення трьох аналітичних функцій, які задовольняють відповідним граничним умовам.*

Ключові слова: *напружено-деформований стан, аналітичні функції, потенціал.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УСЛОВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.К. Шиндер, доцент, к.ф.-м.н., В.В. Волоцюга, магистрант,
Национальный университет «Львовская Политехника»

Аннотация. *Предложена математическая модель исследования влияния электромагнитного излучения на напряженно-деформированное состояние строительных конструкций с криволинейными вырезами. Разработанная методика позволяет свести данную задачу к определению трёх аналитических функций, которые отвечают граничным условиям.*

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние, аналитические функции, потенциал.*

MATHEMATICAL MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF BUILDING STRUCTURES IN TERMS OF ELECTROMAGNETIC RADIATION

V. Shynder, Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
V. Volotsiuga, Master, National University «Lviv Polytechnic»

Abstract. *The mathematical model of electromagnetic field effects research on the stress-strain state of building structures with curved notches is offered. The developed technique allows to apply this problem to determine the three analytic functions that satisfy appropriate boundary conditions.*

Key words: *stress-strain state, analytical features, potential.*

Вступ

Актуальним питанням теорії та практики будівництва, на сьогодні є проблема впливу електромагнітного випромінювання на міцність споруд і будівельних конструкцій.

Аналіз публікацій

На сьогодні для визначення напружено-деформованого стану плоских багатозв’язних тіл під дією механічних зусиль розроблено достатньо ефективні методи, коли не враховується дія електромагнітного поля [1, 4, 5, 10]. Методи визначення напружено-деформованого стану нескінченного анізотропного багатозв’язного тіла у випадку дії теплового випромінювання знайшли відображення в роботах [2, 11].

Аналіз факторів, які призводять до передчасного руйнування споруд і будівельних конструкцій, показав, що магнітне поле впливає на розподіл механічних напружень і ним не можна нехтувати при проектуванні будівельних конструкцій.

Мета і постановка задачі

Метою роботи є розробка математичної моделі загальної двомірної задачі визначення напружено-деформованого стану для багатозв'язного середовища під дією не тільки механічних сил, а й електромагнітного випромінювання.

Врахування впливу електромагнітного випромінювання

Розглянемо пластинчасту тонку плиту, ослаблену криволінійним технологічним отвором, яка знаходиться під дією механічного навантаження й електромагнітного випромінювання. За фізико-механічну модель такої конструкції може бути прийнята ізотропна пластинка. Для електропровідного пружного тіла, яке не намагнічується і не поляризується, дослідження напруженого стану поблизу отвору, при нехтуванні незначним впливом градієнтів температури на електричний струм, можливе на основі лінійних рівнянь магнітопружності. При розв'язку задач лінійної магнітопружності ізотропного тіла, яке знаходиться у зовнішньому магнітному полі і перебуває під дією механічного навантаження, використовуються рівняння Максвелла і рівняння руху пружного середовища, доповнені пондемоторними силами [3, 7]. Разом із рівняннями стану рухомого ізотропного середовища [8] і рівняннями узагальненого закону Ома [7] вони складають замкнену систему нелінійних рівнянь магнітопружності для однорідного ізотропного середовища, яку потрібно розв'язати за заданих початкових умов із урахуванням граничних умов на поверхні тіла. В загальному випадку поверхня S, яка обмежує пружне тіло, є границею розподілу двох середовищ з різними електромагнітними властивостями, і за відсутності на S поверхневих електричних струмів і зарядів граничні умови для електромагнітного поля мають вид [3, 9]. Для виконання умови непротікання електричного струму через поверхню S необхідно, щоб провідність середовища, яке оточує тіло, була рівною нулю.

Враховуючи зроблені зауваження і допущення, одержимо із системи рівнянь магнітопружності наступні рівняння [6], які в декартовій системі координат мають вигляд

$$U = \nabla^2 \overrightarrow{H} = N[\overrightarrow{H} - \nabla \cdot (\dot{U} \cdot \overrightarrow{H})],\ N = (c\eta_m)^{-1}; \quad (1)$$

$$\begin{gathered} \rho \ddot{U} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \\ + \mu_0 (\nabla^2 \cdot \overrightarrow{H}) \cdot \overrightarrow{H}. \end{gathered} \quad (2)$$

Рівняння (1), (2) є фундаментальними рівняннями лінійної теорії магнітопружності ізотропних провідників.

Розглянемо однорідне ізотропне тіло, яке знаходиться у стані плоскої деформації, або в узагальненому плоскому напруженому стані відносно деякої площини тіла, прийнятої за координатну площину. Ізотропне тіло у площині xOz займає область S з вирізом, обмеженим простим гладким замкнутим контуром L. При аналітичному розв'язкові задачі область S вважається нескінченною. Збурення механічного та магнітного полів, обумовлене наявністю отвору, не досягає її зовнішньої границі. Тіло знаходиться під дією однорідного магнітного поля з вектором напруженості $\overrightarrow{H}_0$

$$\overrightarrow{H}_0 = \{H_0 \cdot \cos\beta; H_0 \cdot \sin\beta; 0\}. \quad (3)$$

У випадку тонкої пластинки вектор механічних переміщень має ненульові компоненти

$$\vec{u} = \{u(x,y); \upsilon(x,y); 0\}. \quad (4)$$

А магнітне поле, яке виникає під дією зовнішнього навантаження, описується вектором

$$\overrightarrow{H_1} = \{H_1(x,y); H_2(x,y); 0\}. \quad (5)$$

Рівняння (1), (2) у статичному випадку для ненульових компонентів векторів (4), (5) задаються співвідношеннями [8, 6]

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \mu_0 [\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(H_1^2 - H_2^2) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}(H_2 H_1)] = 0; \end{gathered} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}-\mu_0[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(H_1^2-H_2^2)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}(H_2H_1)]=0;$$
$$\nabla^2 H_1=0;\nabla^2 H_2=0;\nabla^2=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Введемо функцію механічних напружень або потенціал $U(x,y)$ за формулою

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}-\mu_0 H_2 H_1 \quad (8)$$

і покладемо

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\mu_0(H_1^2-H_2^2), \quad (9)$$
$$\sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\mu_0(H_1^2-H_2^2).$$

При цьому рівняння (6) тотожно задовольняються.

Підставивши вирази (8), (9) в рівняння сумісності для плоских деформацій [8] і врахувавши закон Гука для ізотропного середовища [8], одержимо рівняння [12]

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=G(\overrightarrow{H}), \quad (10)$$

де

$$G(\overrightarrow{H})=-\frac{1}{2}\frac{\mu_0}{(1-\nu)}[(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2})\times$$
$$\times(H_1^2-H_2^2)+\frac{\partial^2(H_1H_2)}{\partial x \partial y}]. \quad (11)$$

Щоб отримати лінеаризовану форму рівнянь (7), (10) відносно магнітного поля, представимо викликані зовнішнім механічним навантаженням відхилення магнітного поля наступними виразами

$$H_1=H_0\cdot\cos\beta+h_1;$$
$$H_2=H_0\cdot\sin\beta+h_2, \quad (12)$$

де $h=\{h_1;h_2;0\}$ – (13)

вектор збурення магнітного поля.

Після підстановки співвідношень (12) у рівняння (7), (10), одержимо їх лінеаризовану форму [6]

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}+$$
$$+k_1^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}+k_2^2\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}=0; \quad (14)$$

$$k_1^2=\frac{\mu_0 H_0}{(1-\nu)}\cos\beta;\ k_2^2=\frac{\mu_0 H_0}{(1-\nu)}\sin\beta; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}=0;\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}=0. \quad (16)$$

Аналогічно підстановкою отримаємо лінеаризовану форму рівнянь (8), (9)

$$\tau_{yx}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}-(1-\nu)k^2[h_1\cdot\sin\beta+$$
$$+h_2\cdot\cos\beta+H_0\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta];$$
$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{1}{2}(1-\nu)k^2[(H_0\cdot\cos\beta+$$
$$+2h_1)\cdot\cos\beta-(H_0\cdot\sin\beta+2h_2)\sin\beta]; \quad (17)$$
$$\sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(1-\nu)k^2[(H_0\cdot\cos\beta+$$
$$+2h_1)\cdot\cos\beta-(H_0\cdot\sin\beta+2h_2)\sin\beta];$$

$$k=\mu_0 H_0/(1-\nu). \quad (18)$$

Ввівши нові незалежні змінні

$$z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy, \quad (19)$$

рівняння (14), (16) можна представити у вигляді

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial z \partial \bar{z}}=0;\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial z \partial \bar{z}}=0;$$

$$16\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}+k_1^2\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 h_1-$$
$$-k_2^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 h_2=0, \quad (20)$$

а рівняння (17) можна скомбінувати у вигляді

$$\sigma_x+\sigma_y=4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}};$$

$$\begin{aligned}&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{yx}=4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+(1-\nu)k^2\times\\&\times[(H_0\cdot\cos\beta+2h_1)\cdot\cos\beta-(H_0\times\\&\times\sin\beta+2h_2)\cdot\sin\beta]-2i[h_1\cdot\sin\beta+\\&+h_2\cdot\cos\beta+H_0\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta].\end{aligned} \quad (21)$$

Загальний розв'язок першого рівняння (16) можна представити у такому вигляді

$$h_1=\frac{1}{2}[\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}], \quad (22)$$

де $\varphi_1(z_1)$ – довільна функція комплексної змінної $z = x+iy$, що є аналітичною в області, яку займає пластинка. Функцію $h_2(z,\bar{z})$ представимо аналогічним виразом

$$h_2=\frac{i}{2}[\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}]. \quad (23)$$

Розв'язок рівняння (20) представимо у вигляді суми розв'язків відповідного однорідного рівняння $U_1(z,\bar{z})$

$$\begin{aligned}U_1(z,\bar{z})=\frac{1}{2}[&\bar{z}\varphi_2(z)+z\overline{\varphi_2(z)}+\\&+\varphi_3(z)+\overline{\varphi_3(z)}]\end{aligned} \quad (24)$$

і часткового розв'язку $U_2(z,\bar{z})$, який можна отримати послідовним інтегруванням рівняння (20)

$$\begin{aligned}U_2(z,\bar{z})=-\frac{1}{64}[&(k_1^2-ik_2^2)\bar{z}^2\cdot\varphi_1(z)+\\&+(k_1^2+ik_2^2)z^2\overline{\varphi_1(z)}].\end{aligned} \quad (25)$$

Підставивши вирази (24), (25) в рівняння (21), знайдемо комплексні зображення напружень

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\mathrm{Re}[2\varphi_3^{/}(z)-\bar{z}\varphi_3^{//}(z)-\varphi_2^{//}(z)]-\\&-(1-\nu)k^2\cdot\cos\beta\cdot\mathrm{Re}[\varphi_1(z)]-\\&-\frac{1}{2}(1-\nu)k^2\cdot H_0\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y&=\mathrm{Re}[2\varphi_3^{/}(z)+\bar{z}\varphi_3^{//}(z)-\varphi_2^{//}(z)]+\\&+(1-\nu)k^2\cdot\cos\beta\cdot\mathrm{Re}[\varphi_1(z)]+\\&+\frac{1}{2}(1-\nu)k^2\cdot H_0\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}&=\mathrm{Im}\{[\varphi_2^{//}(z)+\bar{z}\varphi_3^{//}(z)]-\\&-\frac{1}{32}[\bar{z}^2\varphi_1^{//}(z)\cdot(k_1^2+k_2^2)+2\overline{\varphi_1(z)}\cdot(k_1^2-k_2^2)+\\&+\frac{1}{2}(1-\nu)\cdot k^2\cdot(\cos\beta-i\sin\beta)\times\\&\times[H_0\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)+2\varphi_1(z)]\},\end{aligned} \quad (26)$$

де коефіцієнти k, k_1, k_2 обчислюються за формулами (15), (18).

Висновок

Побудовано ефективну методику визначення напружено-деформованого стану будівельних конструкцій з криволінійними вирізами, за умов електромагнітного випромінювання. Задачу приведено до визначення трьох аналітичних функцій $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ комплексної змінної, які задовольняють відповідним граничним умовам на границі двовимірної області. Отримані результати можуть бути застосовані при виробленні рекомендацій щодо підвищення міцності та надійності будівельних конструкцій, які піддаються впливу електромагнітного випромінювання.

Література

1. Иванов Г.М. Напряженно-деформированное состояния вязкоупругих многосвязных плит / Г.М. Иванов, А.С. Космодамианский, Л.Н. Шкодина // Теория оболочек и пластин: труды X Всесоюз. конф. – Тбилиси: Мецниереба. – 1975. – Т.1. – С. 435–440.
2. Кибальникова С.И. Двомерные задачи статической термоупругости для прямолинейно-анизотропного тела с упругим включениям / С.И. Кибальникова, М.И. Задворняк, Б.Т. Мартинович // Актуальные проблемы неоднородной механики: материалы Всесоюзного научного семинара. – Ереван, 1991. – С. 147–152.
3. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость / М.Р. Короткина. – М.: МГУ. 1988. – 304 с.

4. Космодамианский А.С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк: Дон.ГУ, 1973. – 264 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
7. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
8. Парселл Э. Електричество и магистизм / Э. Парселл. – М.: Наука. 1983. – 416 с.
9. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоелектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
10. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка , 1968. – 888 с.
11. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела / А.И. Уздалев. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1967. – 168 с.
12. Paria G. Magneto-elastic stresses in an infinite medium with a long cylindrical hole / G. Paria. – J. Sci. Engug. – 1961. – 5. – P. 41–48.

Рецензент: В.П. Кожушко, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 22 серпня 2012 р.