УДК 531/534

ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ

А.В. Беловол, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. *Рассмотрена возможность использования законов диалектики на примере закона сохранения материи как генераторов общих законов физики на примере законов механики. Приведены аргументы в пользу такого подхода к изложению теоретической механики в высших учебных заведениях.*

Ключевые слова: *универсальные законы, материя, физика, сохранение, генератор, механика.*

ЗАКОНИ МЕХАНІКИ ТА УНІВЕРСАЛЬНІ ЗАКОНИ ПРИРОДИ

О.В. Біловол, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. *Розглянуто можливість використання законів діалектики на прикладі закону збереження матерії як генераторів загальних законів фізики на прикладі законів механіки. Наведено аргументи на користь такого підходу до викладення теоретичної механіки у вищих навчальних закладах.*

Ключові слова: *універсальні закони, матерія, фізика, збереження, генератор, механіка.*

LAWS OF MECHANICS AND UNIVERSAL NATURE LAWS

O. Belovol, Associate Professor, Candidate of Technical Science, KhNAHU

Abstract. *The possibility of dialectics law application on example of the law of matter conservation as generators of general laws of physics on example of laws of mechanics is considered. Arguments in favor of such an approach as for teaching of theoretical mechanics in higher shools are presented.*

Key words: *universal laws, matter, physics, conservation, generator, mechanics.*

Введение

Трудно найти представителя высшей школы, которого удовлетворяло бы состояние преподавания в ней естественнонаучных дисциплин. Очевидным также является несоответствие физико-математической подготовки выпускаемых высшей школой специалистов современным требованиям. Отвлекаясь от социально-экономических проблем образования, от состояния преподавания физики и математики в средней школе, нетрудно понять, что на современном этапе определяющим является кризис внутреннего характера. Одна из главных причин кризиса состоит в несоответствии между методом преподавания и сложностью тех задач, с которыми сталкивается молодой специалист.

Сегодня совершенно необоснованными являются существенные различия в преподавании общеобразовательных дисциплин в классических и технических университетах, так как выпускники тех и других сталкиваются с научными и инженерными задачами одного порядка сложности. Тем более, что грань между научной и инженерной задачей достаточно условна. Двигаясь в ходе обучения от простого к сложному в продолжение традиций среднего и высшего образования, технический университет не способен преодолеть пропасть, возникшую между простыми теоретическими построениями, носящими на современном уровне развития технологий скорее абстрактный характер, и высокотехнологичными современными устрой ствами. Попытка преодолеть эту пропасть приводит к тому, что студент не усваивает основные (простые) законы и методы и тем более не получает достаточного представления о сложных явлениях, устройствах и механизмах.

Кроме того, современные устройства и механизмы, по сути, являясь результатом синтеза механических, электрических, термодинамических и других систем, изучаются на основе анализа отдельных частей на разных кафедрах и в рамках разных дисциплин с использованием разных обозначений и разного математического аппарата. Более естественным является использование единого описания рассматриваемой системы на свойственном ей языке. Напротив, мы навязываем системе, следуя историческим традициям, близкие нам и удобные при рассмотрении простых задач языки.

Анализ публикаций

В работе [1] проведен анализ недостатков преподавания физико-математических дисциплин, и, в частности, классической механики, в высшей школе, намечены пути преодоления этих недостатков. Показано, что разнообразие формулировок механики является проявлением единого универсального принципа. Предложена программа естественного способа описания динамики механической системы в фазовом пространстве.

В работе [2] предложен новый подход к преподаванию классической механики, который соответствует современному состоянию развития дисциплины и требованиям ее интеграции в образовательное пространство.

Цель и постановка задачи

В основе современного подхода к динамике механической системы лежит представление о законе движения и уравнении движения системы. Под законом движения понимают зависимость от времени некоторых параметров (обобщенных координат), однозначно определяющих положение системы в пространстве. То есть движение системы рассматривается в пространстве конфигураций. Следует заметить, что обобщенные координаты не определяют состояние механической системы в данный момент времени, а показывают лишь проекцию состояния на пространство конфигураций.

Уравнения движения системы представляют собой следствия из принципов механики и позволяют определить закон движения исходя из некоторого начального состояния системы. Под состоянием системы понимают набор независимых параметров, на основе которых полностью определяется дальнейшая эволюция системы. Существует множество эквивалентных принципов механики (интегральных и дифференциальных), отсюда возникают сомнения в их необходимости и напрашивается вопрос, не являются ли уравнения движения естественным способом описания динамики системы в пространстве состояний (фазовом пространстве) с учетом его свойств.

С другой стороны, классическая наука противопоставляет внутренний мир человека и мир природы, основанный на законах физики, которые, как считается, являются более объективными, чем наши априорные представления об окружающем мире, якобы носящие субъективный характер. Законы физики представляются как озарение, дарованное свыше, или как случайная флуктуация в сознании гения. Недоверие к этим законам, вызванное такими представлениями, снимается физическим экспериментом. При этом забывается, что наши представления об окружающем мире выдержали проверку эволюцией с момента зарождения жизни, в том числе и эволюцией нашего сознания. Главный вопрос состоит в том, как генетический опыт представить в общедоступном универсальном и удобном для практического применения виде. Иными словами, законы физики неявно присутствуют в нашем сознании, их следует оттуда извлечь и представить в явном виде.

Целью исследования является получение общих законов механики исходя из законов диалектической логики, т.е. законов отражения в мышлении развития объективного мира и познания, и представление их в наиболее естественной и лаконичной форме. Для достижения поставленной цели реализуем программу, предложенную в работах [1, 2].

Динамика механической системы в фазовом пространстве

Простейшей механической системой, как известно, является материальная точка. В физическом трехмерном пространстве положение точки определяется тремя координатами, то есть точка имеет три степени свободы. Однако, как показывает опыт, координат недостаточно для описания состояния точки. Необходимо задание также импульса точки посредством его проекций на оси координат. Таким образом, движение точки естественно рассматривать в шестимерном фазовом пространстве. Соответственно движение механической системы из n материальных точек естественно рассматривать в $6n$-мерном пространстве.

Метрику трехмерного эвклидова пространства конфигураций, отвечающего одной материальной точке, принято записывать в виде

$$dl^2 = d\mathbf{r}\mathbf{I}d\mathbf{r},$$

где $d\mathbf{r}$ – столбец из дифференциалов координат точки, – если стоит справа в произведении, или строка, – если стоит слева, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, играющая роль метрического тензора. Тем самым предполагается, что пространство обладает некоторыми геометрическими свойствами. Однако более последовательным, с точки зрения механики, является утверждение, что пространство само по себе не обладает какими-либо метрическими свойствами, а dl^2 является интервалом между ближайшими положениями материальной точки в пространстве.

Интервал между ближайшими положениями системы n различных материальных точек в пространстве конфигураций можно ввести, используя квадратичную форму

$$dl^2 = d\mathbf{r}\mathbf{M}d\mathbf{r},$$

где $d\mathbf{r}$ – столбец или строка из $3n$ координат точек системы, а $\mathbf{M}$ – диагональная матрица размером $3n \times 3n$, состоящая из блоков $m_k\mathbf{I}$, где m_k – весовой коэффициент k-той материальной точки (признак ее материальности).

Интервал между ближайшими состояниями системы n различных материальных точек в фазовом пространстве можно получить, если взять производную по времени от метрики пространства конфигураций, отбросив постоянный множитель

$$ds^2 = d\mathbf{r}\mathbf{M}d\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}d\mathbf{p},$$

где $d\mathbf{p} = \mathbf{M}d\dot{\mathbf{r}}$ – столбец дифференциалов импульсов точек, составленный в том же порядке, что и $d\mathbf{r}$.

Учитывая, что радиус-вектор точки в фазовом пространстве $d\mathbf{r}$ можно представить в виде столбца (строки), составленного из расположенных последовательно координат и импульсов точек, получаем

$$ds^2 = d\mathbf{r}\mathbf{G}d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ – соответственно нулевая и единичная матрицы размером $3n$ на $3n$.

При изучении движения механической системы в зависимости от условий задачи можно выбрать вместо декартовых координат другие. Любые s величин $q_1, q_2, \ldots, q_s$, которые полностью определяют положение системы, будем называть обобщенными координатами, а производные по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – её обобщенными скоростями. Если рассматривать обобщенные координаты как эвклидовы, то каждой конфигурации будет отвечать некоторая точка s-мерного пространства конфигураций. Со временем состояние системы изменяется и точка, изображающая систему, описывает в пространстве конфигураций некоторую кривую, которую называют траекторией движения системы.

Чтобы ввести обобщенный импульс, выразим скорость системы $\mathbf{v}$ в $3n$-мерном пространстве конфигураций через обобщенную скорость $\dot{\mathbf{q}}$ в s-мерном пространстве конфигураций. Переход к обобщенным координатам в случае, когда на систему наложены геометрические связи, осуществляется при помощи соотношения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t),$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в $3n$-мерном пространстве конфигураций, а $\mathbf{q}$ – радиус-вектор в s-мерном пространстве конфигураций. Тогда скорости будут связаны следующим образом

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

где $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ – матрица преобразования координат размером s на $3n$.

Интервал в s-мерном пространстве конфигураций будет иметь вид

$$dl^2 = d\mathbf{r}\mathbf{M}d\mathbf{r} = d\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{q} = d\mathbf{q}\mathbf{I}d\mathbf{q},$$

где $\mathbf{I}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица размером s на s

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Соответственно интервал в $2s$-мерном фазовом пространстве

$$ds^2 = d\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{p} = d\mathbf{q}d\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{p} = d\mathbf{q}d\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{v}\right).$$

В дальнейшем под обобщенным импульсом будем понимать вектор в пространстве конфигураций

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{M}$ – диагональная матрица масс размером $3n$ на $3n$, а $\mathbf{M}\mathbf{v}$ – импульс в $3n$-мерном пространстве конфигураций. Матрицу преобразования, которая расположена слева, следует считать, в соответствии с правилами произведения, транспонированной по отношению к матрице, которая расположена справа. Соответственно интервал в $2s$-мерном фазовом пространстве примет вид

$$ds^2 = d\mathbf{q}d\mathbf{p}.$$

Связь между обобщенным импульсом и обобщенной скоростью выражается формулой

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

или

$$\mathbf{p} = \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a},$$

где вектор $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ – часть импульса, связанная с нестационарностью связей, наложенных на систему.

Учитывая, что радиус-вектор точки в фазовом пространстве $d\mathbf{r}$ можно представить в виде столбца (строки), составленного из расположенных последовательно обобщенных координат и обобщенных импульсов, получаем

$$ds^2 = d\mathbf{r}\mathbf{G}d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица размером $2s$ на $2s$ вида

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать обобщенные координаты и обобщенные импульсы в качестве эвклидовых, то каждому состоянию системы будет отвечать точка в фазовом пространстве. Уравнение движения системы можно рассматривать как уравнение движения фазовой жидкости, которая состоит из точек, представляющих ансамбль систем в разных состояниях. Понятно, что число этих точек в любом объеме, их заключающем, будет постоянным. Обозначим плотность фазовой жидкости буквой ρ, а объем – буквой V, тогда $\rho V = \mathrm{const}$. Применим к этому уравнению логарифм и возьмем производную по времени, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}.$$

Как известно, относительное изменение объема частицы фазовой жидкости в единицу времени равно дивергенции скорости, то есть

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}.$$

На фундаментальном уровне знание состояния системы в некоторый момент времени позволяет с помощью уравнений движения определить состояние системы в любой момент времени в прошлом и будущем; соответственно информация о системе, которая заложена в фазовую плотность, не изменяется со временем. Системы разной природы, удовлетворяющие этому условию, называют консервативными. Фазовая жидкость таких систем не сжимается, то есть фазовая плотность остается неизменной, а дивергенция скорости фазовой жидкости равна нулю.

Очевидно, что производная по времени от любой субстанции, которая содержится в частице фазовой жидкости консервативной системы, есть результатом притока этой субстанции через поверхность частицы или результатом наличия в ней соответствующего источника (следствие закона о неуничтожимости и несотворимости материи). Представление механической системы определяется положением бесконечно малой частицы фазовой среды в фазовом пространстве и количеством точек в частице, которое пропорционально ее объему. Таким образом, выбирая в качестве субстанции произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы фазовой жидкости на ее объем, получаем общее уравнение движения системы в фазовом пространстве в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}dV\right) = \dot{\mathbf{r}}dV + \mathbf{r}d\dot{V} = \int \mathbf{H}d\mathbf{S} + \mathbf{B}.$$

Разделив обе части уравнения на объем частицы dV, получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{H} + \mathbf{b},$$

где $\dot{\mathbf{r}}$ – вектор скорости в фазовом пространстве, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ – градиент в фазовом пространстве, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{H}$ – дивергенция матрицы $\mathbf{H}$ размером $2s$ на $2s$, $\mathbf{b}$ – вектор источника.

Конкретный вид матрицы $\mathbf{H}$ и вектора $\mathbf{b}$ можно получить исходя из однородности и изотропии фазового пространства по отношению к выбору обобщенных координат, а также имея в виду консервативный характер механической системы. Так, однородность фазового пространства означает отсутствие источника $\mathbf{b}$ в уравнении движения. Из консервативности системы

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{H} = 0$$

делаем вывод об антисимметричности матрицы $\mathbf{H}$.

Для образования скаляря

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{G}d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{H}\mathbf{G}d\mathbf{r}$$

необходимо, чтобы матрица $\mathbf{HG}$ была диагональной, а матрица $\mathbf{H}$ имела клеточную структуру

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{D}$ – соответственно нулевая и диагональная матрицы размером s на s.

Так как уравнения движения не должны зависеть от выбора порядка обобщенных координат, то все элементы матрицы $\mathbf{D}$ должны быть одинаковыми.

Подставляем матрицу $\mathbf{H}$ в уравнение движения и получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},$$

где $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$ – градиент функции H в фазовом пространстве, а матрица $\mathbf{A}$ – антисимметричная матрица размером $2s$ на $2s$, которая имеет клеточную структуру

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ – соответственно нулевая и единичная матрица размером s на s. Таким образом, движение фазовой жидкости является потенциальным в том смысле, что ее скорость зависит только от градиента функции H. Матрицу $\mathbf{A}$ можно рассматривать, как матрицу поворота на угол в 90 °. Соответственно вектор скорости системы направлен по касательной к эквипотенциальной поверхности.

Найдем полную производную от функции H по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{A}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Квадратичная форма обращается в нуль, так как матрица $\mathbf{A}$ – антисимметрична. Если функция H не зависит явно от времени, то она остается постоянной. Известно, что такой функцией является функция Гамильтона, а ее постоянство отвечает закону сохранения механической энергии.

Если спроектировать уравнения движения на пространство конфигураций и на пространство импульсов, то получим канонические уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$
$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Они, в свою очередь, представляют собой систему $2s$ скалярных уравнений первого порядка

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$
$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Выясним, как выглядит функция Гамильтона в общем случае. Для этого выразим обобщенную скорость через обобщенный импульс

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a})$$

и подставим в первое каноническое уравнение. После интегрирования получим

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{a})\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + V(\mathbf{q}, t),$$

где первый член, очевидно, является кинетической, а второй – потенциальной энергиями.

Выводы

Таким образом, законы классической механики в их наиболее общем виде можно получить, рассматривая механическую систему в наиболее естественном для нее фазовом пространстве, исходя из закона о неуничтожимости и несотворимости материи и учитывая априорные представления о свойствах этого пространства.

По мнения автора, в основе дальнейшего прогресса науки будет лежать математическая формулировка универсальных законов природы. В статье сделана первая попытка показать, что законы диалектики являются генераторами общих физических законов природы.

Литература

1. Беловол А.В. Технические университеты и философия естествознания / А.В. Беловол // Актуальні проблеми гуманітарної підготовки фахівців у вищих навчальних закладах України у світлі реалізації принципів і завдань Болонського процесу: зб. матер. Всеукраїнської науково-методичної конференції, 11–12 листопада 2010 р. – Х.: ХНАДУ, 2010. – С. 83–87.
2. Біловол О.В. Сучасні тенденції і перспективи викладання теоретичної механіки / О.В. Біловол // Зб. наук. пр., 2010. – С. 58–61.

Рецензент: Ю.В. Батыгин, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2013 г.