

УДК 656.015

ПОДХОД К ОЦЕНКЕ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ВЫБОРА ПАССАЖИРОМ ПУТИ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ

П.Ф. Горбачев, профессор, д.т.н., А.А. Тропина, профессор, д.т.н.,
А.В. Макаричев, доцент, к.ф.-м.н., О.В. Свичинская, аспирант, ХНАДУ

Аннотация. Проведен анализ существующих методов проверки моделей выбора пассажиром пути передвижения на адекватность, указаны их преимущества и недостатки. Разработан критерий проверки данных моделей на адекватность и представлен механизм его получения. На примере проиллюстрировано практическое применение разработанного критерия в отношении стандартной логит и линейной моделей.

Ключевые слова: модели дискретного выбора, адекватность, метод максимального правдоподобия, путь, передвижение, пассажир, логит модель, вероятность выбора пути.

ПІДХІД ДО ОЦІНКИ АДЕКВАТНОСТІ МОДЕЛЕЙ ВИБОРУ ПАСАЖИРОМ ШЛЯХУ ПЕРЕСУВАННЯ

П.Ф. Горбачов, професор, д.т.н., А.А. Тропіна, професор, д.т.н., О.В. Макарічев,
доцент, к.ф.-м.н., О.В. Свічинська, аспірант, ХНАДУ

Анотація. Проведено аналіз існуючих методів перевірки моделей вибору пасажиром шляху пересування на адекватність, вказано їх переваги та недоліки. Розроблено критерій перевірки даних моделей на адекватність і представлено механізм його одержання. На прикладі проілюстровано практичне застосування розробленого критерію по відношенню до стандартної логіт і лінійної моделей.

Ключові слова: моделі дискретного вибору, адекватність, метод максимальної правдоподібності, шлях, пересування, пасажир, логіт модель, ймовірність вибору шляху.

APPROACH TO ESTIMATE THE ADEQUACY OF PASSENGER ROUTE CHOICE MODELS

P. Gorbachov, Professor, Doctor of Technical Sciences, A. Tropina, Professor, Doctor of Technical Sciences, A. Makarichev, Senior Staff Scientist, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, O. Svichinskaya, postgraduate, KhNAHU

Abstract. This paper presents the analysis of the existing methods of adequacy estimation for passenger route choice models. The advantages and disadvantages of these models are shown. A criterion to estimate the adequacy of passenger route choice models and the mechanism of its realization are presented. The example of the practical application of a new criterion in the case of standard logit and linear models is given.

Key words: discrete choice models, adequacy, maximum likelihood method, travel, route, passenger, logit model, route choice probability.

Введение

Анализ и моделирование выбора пассажиром пути передвижения (следования) является одним из наиболее важных этапов в транс-

портном планировании. Основную часть зависимостей, используемую при разделении спроса на передвижения, составляют либо нормировочные модели, либо модели дискретного выбора. При этом в моделировании

всегда возникает вопрос о необходимой и достаточной степени соответствия модели объекту-оригиналу, в нашем случае – соответствии результатов расчетов по математической модели фактическим данным.

На сегодняшний день методы, применяемые для оценки качества моделей выбора пассажиром пути передвижения, не всегда дают ответ на вопрос о достоверности последних.

Так, например, при использовании моделей дискретного выбора применяется метод максимального правдоподобия (ММП) для расчета оценок неизвестных коэффициентов этих моделей [1–4]. Согласно этому методу в качестве оценок параметров выбираются те значения, которые являются «наиболее вероятными» для данных результатов наблюдений. Из-за того, что изначально этот метод был специально разработан для оценки параметров законов распределения, целесообразность его применения в рассматриваемой задаче можно поставить под сомнение [5]. Это порождает необходимость анализа применяемых методов и критериев для оценки качества математических моделей, позволяющих определить вероятность выбора пассажиром пути следования в маршрутной системе города.

Анализ публикаций

Различные научные источники гласят, что наиболее распространенным методом проверки качества моделей дискретного выбора является применение ММП. В свою очередь, качество полученной модели в результате применения данного метода дополнительно оценивается тремя классическими тестами [1, 4]: критерий Вальда (*Wald Test*), критерий отношения правдоподобия (*Likelihood Ratio Test*) и критерий множителей Лагранжа (*Lagrange Multiplier Test*). Данные критерии базируются на проверке двух гипотез:

- 1) гипотеза H_0 , которая состоит в том, что оцениваемые параметры удовлетворяют каким-либо ограничениям;
- 2) альтернативная гипотеза H_1 , которая состоит в том, что накладываемые на параметры ограничения не выполняются. Рассмотрим каждый из тестов отдельно.

Критерий Вальда (W) является одним из статистических тестов, используемых для проверки выполнения ограничений на парамет-

ры статистических моделей, оцененных на основе выборочных данных. Данный критерий считается аналогом t -статистики в линейной регрессии. Его величина определяется по зависимости [6]

$$W_i = \left(\frac{b_i}{s_{b_i}} \right)^2, \quad (1)$$

где b_i – выборочная оценка коэффициента модели; s_{b_i} – значение стандартной ошибки коэффициентов модели.

Статистика критерия Вальда имеет асимптотическое распределение χ_k^2 с k степенями свободы. В случае, если $W < \chi_{0,95}^2(k)$, гипотезу H_0 следует принять; когда $W > \chi_{0,95}^2(k)$ – гипотеза H_0 отвергается [4]. Недостаток статистики W состоит в том, что при малом количестве наблюдений она может давать заниженные оценки наблюдаемой значимости коэффициентов. Для получения более точной информации о значимости коэффициентов модели выбора пассажиром пути передвижения используют критерий отношения правдоподобия (LR).

Критерий LR основан на различии значений логарифмической функции правдоподобия, когда параметры моделей оцениваются без учета каких-либо ограничений ($\ln L_0$) и когда на параметры используемой модели ограничения накладываются ($\ln L_1$)

$$LR = -2 \{ \ln L_1 - \ln L_0 \}. \quad (2)$$

Статистика LR , как и статистика W , приближенно имеет распределение χ_k^2 с числом степеней свободы k , равным количеству ограничений, и решение о том, отвергнуть или нет определенную гипотезу, принимается аналогично статистике W [4, 7].

Еще одним статистическим тестом является критерий множителей Лагранжа (LM). Он основан на следующем принципе. Если нулевая гипотеза верна, то две оценки логарифмической функции правдоподобия – неограниченная $\ln L_0$ и ограниченная $\ln L_1$ – должны быть очень близки. Из этого следует близость уравнений правдоподобия, решение которых позволяет вычислить эти оценки.

Общее выражение для вычисления критерия имеет вид [1–3]

$$LM = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_k \lambda_k [r_k(x_1, \dots, x_n) - b_k], \quad (3)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция от многих переменных; λ_k – множители Лагранжа, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$; $r_k(x_1, \dots, x_n) = b_k$ – накладываемая система ограничений.

Данная статистика также считается асимптотически эквивалентной тесту Вальда и тесту отношения правдоподобия и имеет распределение χ_k^2 . Решение, отвергнуть нулевую гипотезу или нет, принимается по результатам сравнения с критическим значением $\chi_{0,95}^2(k)$. Далее процедура сравнения проводится аналогично тесту Вальда [4, 9].

Таким образом, рассмотренные критерии, используемые для проверки ограничений на параметры статистических моделей, схожи друг с другом. Однако для конечных выборок значения статистик не всегда совпадают. Одни из критериев могут отвергать гипотезу при выбранном уровне значимости, другие же – говорить в пользу принятия гипотезы.

Следующим методом оценки значимости параметров модели, аналогичным статистике W , является применение t -статистики (или t -теста), которая имеет вид [6]

$$t = \frac{b_i}{s_{b_i}}. \quad (4)$$

Статистика (4) имеет распределение Стьюдента (t -распределение). Полученное значение статистики сравнивается с критическим из таблиц критерия Стьюдента при заданных уровне значимости α и количестве степеней свободы [1].

К другому типу критериев относят индекс отношения правдоподобия (ρ^2 index), предложенный Д. Макфадденом [1, 9–11]

$$\rho^2 = 1 - \frac{\ln L(\tilde{\beta})}{\ln L(0)}, \quad (5)$$

где $\ln L(\tilde{\beta})$ – максимальное значение логарифмической функции правдоподобия, которое достигается в точке, координаты которой равны оценкам параметров выбранной модели $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m)$; $\ln L(0)$ – значение логарифмической функции правдоподобия, определенное при условии, что $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \dots = \tilde{\beta}_m = 0$.

Значения этого критерия всегда находятся в пределах $0 \leq \rho^2 \leq 1$. Считается, что когда значение ρ^2 близко к единице, то модель адекватна. В работе [9] также рассмотрен случай применения данного критерия для оценки адекватности модели, в результате рассмотрения которого становится очевидным существенный недостаток его использования. Он заключается в том, что в ситуации, когда значение ρ^2 попало в окрестность середины указанного интервала, принятие решения касательно адекватности модели становится проблематичным [1, 9, 11]. Так, даже для достаточно хорошей модели ρ^2 может быть равен 0,4.

Ученые Бен-Акива и Лерман дополнили данный критерий следующим образом

$$\rho_{adj}^2 = 1 - \frac{\ln L(\tilde{\beta}) - m}{\ln L(0)}, \quad (6)$$

где ρ_{adj}^2 – уточненный индекс отношения правдоподобия (*adjusted* ρ_{adj}^2); m – количество оцениваемых параметров модели. Однако и заданному критерию присущи недостатки его оригинала.

В работе [9] также представлен критерий, называемый псевдо R^2 , который применяется для определения адекватности дискретных моделей, например таких, как логит и пробит

$$R^2 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2(\ln L(\tilde{\beta}) - \ln L(0))}{n}}, \quad (7)$$

где n – объем выборки.

Как и в случае индекса (5), псевдо R^2 будет равным нулю, когда все коэффициенты модели, кроме β_0 , будут равны 0. Приближение

значения этого критерия к единице состоит в случае увеличения разницы между $\ln L(\tilde{\beta})$ и $\ln L(0)$, но равенство критерия единице все же достигнуто не будет. Решение об адекватности принимается аналогично зависимостям (5) и (6): чем ближе значение R^2 к единице, тем точнее модель описывает фактический материал [9].

Учитывая все вышеизложенное, можно сделать вывод, что на сегодняшний день существует достаточно большое количество различных статистических тестов для проверки исследуемых моделей на адекватность. В своем большинстве рассмотренные методы основаны либо на использовании ММП, либо на оценках значимости коэффициентов модели, что, как выяснилось, не гарантирует соответствия расчетной вероятности выбора пассажиром пути передвижения ее фактическому значению. Это вызывает необходимость разработки нового критерия для проверки моделей выбора пассажиром пути передвижения на адекватность, что и является предметом данной статьи.

Цель и постановка задачи

Анализ литературных источников показал необходимость разработки механизма проверки моделей выбора пассажиром пути передвижения на адекватность, при котором адекватной будет считаться та модель, которая обеспечивает минимальные отклонения теоретической вероятности выбора пассажиром пути передвижения от фактически определенной. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- 1) разработать статистику, которая может быть применена для проверки моделей выбора пассажиром пути следования на адекватность;
- 2) выделить этапы выполнения проверки моделей выбора пассажиром пути следования на адекватность;
- 3) осуществить практическое применение данного критерия;
- 4) выделить отличительные особенности разработанного критерия.

Критерий проверки моделей выбора пассажиром пути передвижения на адекватность

Известно, что выбор пассажиром пути передвижения базируется на оценке многих слу-

чайных факторов, которые, в свою очередь, определяют частоту этого выбора. Использование различных математических моделей позволяет спрогнозировать теоретическую вероятность выбора пассажиром той или иной альтернативы передвижения, которую на следующих этапах моделирования необходимо сравнить с фактически зафиксированной. Исходя из этого, новый критерий проверки модели на адекватность должен включать в себя разность фактической частоты выбора пассажиром пути передвижения от полученной теоретически, и эта разность для адекватных моделей всегда должна быть как можно меньше. Аналогом такого критерия может служить критерий согласия Пирсона, представляющий собой сумму квадратов отклонений эмпирических частот от теоретических, отнесенную к теоретическим частотам. Так, рассматривая выборку, состоящую из N выборов пассажиром пути передвижения (все они получены в N независимых экспериментах), где в каждой анкете имеется $J \geq 2$ альтернатив, можно вычислить статистику

$$s_N^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(v_1^{(i)} - P_1^{(i)})^2}{\frac{P_1^{(i)}}{n}} + \dots + \frac{(v_J^{(i)} - P_J^{(i)})^2}{\frac{P_J^{(i)}}{n}} \right], \quad (8)$$

где i – идентификатор пассажира; $v_j^{(i)}$ – фактическая частота выбора альтернативы j пассажиром i , $j=1, 2, \dots, J$; n – количество принятых решений о выборе того или иного пути передвижения; $P_j^{(i)}$ – расчетная вероятность выбора альтернативы j пассажиром i .

Благодаря центральной предельной теореме теории вероятности и теореме о статистике χ^2 [12], при количестве принятых решений $n \rightarrow \infty$ статистика s_N^2 будет стремиться по распределению к случайной величине, имеющей χ^2 ($N - m$) распределение [13] с ($N - m$) степенями свободы, где m – число оцениваемых параметров (факторов) при определении вероятности выбора пассажиром пути передвижения в N случаях.

Частным случаем данного критерия является его применение к выборке, состоящей только из двух альтернатив [14]. Тогда, преобразовав выражение (8), получим статистику следующего вида

$$s_N^2 = \sum_{i=1}^N n \frac{(v_1^{(i)} - P_1^{(i)})^2}{P_1^{(i)}(1 - P_1^{(i)})}, \quad (9)$$

где $v_1^{(i)}$ – фактическая (относительная) частота выбора i -м пассажиром первой альтернативы; $P_1^{(i)}$ – вероятность выбора i -м пассажиром первой альтернативы, рассчитанная по исследуемой модели.

При любом наборе наблюдений выбора пассажиром пути передвижения существует вероятность того, что на выбор, совершенный пассажиром, не будет влиять ни один фактор. Такая ситуация соответствует равновероятному выбору пути передвижения. Учитывая это, расчет представленного приближенного критерия и сравнение его с критическим значением χ_P^2 -распределения на заданном уровне значимости с $(N-m)$ степенями свободы позволит определить целесообразность построения математической модели выбора пассажиром пути передвижения с учетом влияния на выбор различных факторов.

Основываясь на вышеизложенном, проверка моделей выбора пассажиром пути следования на адекватность может состоять из следующих этапов:

- проведение обследования выбора пассажиром пути следования с помощью специально разработанных анкет;
- расчет статистики s_N^2 по формулам (8) или (9) для «условной» модели, когда расчетные вероятности соответствуют ситуации равновозможного выбора пассажиром каждой альтернативы;
- анализ полученных результатов и определение целесообразности построения модели выбора пассажиром пути следования (помимо «условной»);
- если построение модели целесообразно – выявление факторов, влияющих на формирование выбора пассажиром пути следования;
- построение функции привлекательности пути следования для i -го пассажира;
- расчет прогнозных (теоретических) значений вероятности выбора пассажиром пути следования по построенным математическим моделям;
- расчет статистики s_N^2 для рассматриваемых моделей выбора пассажиром пути следования;
- анализ полученных результатов.

Статистика s_N^2 при $n \rightarrow \infty$ имеет асимптотически $\chi^2(N-m)$ распределение с $(N-m)$ степенями свободы. По заданному уровню значимости критерия $(1-P)$ из таблиц χ^2 -распределения находится значение χ_P^2 такое, что

$$P\{\chi^2(N-m) > \chi_P^2\} = 1 - P. \quad (10)$$

Если $s_N^2 \leq \chi_P^2$, то рассматриваемая модель может считаться соответствующей (адекватной) экспериментальным данным. Если $s_N^2 > \chi_P^2$, гипотеза о соответствии данной модели экспериментальным данным отвергается. При этом вероятность совершить ошибку первого рода приближенно равна $(1-P)$.

Практическое применение разработанного критерия s_N^2

В данной части статьи представлено практическое применение статистики s_N^2 для определения наиболее адекватной модели выбора пассажиром пути следования из двух – линейной и логит модели.

Пусть дана выборка, состоящая из трех наблюдений, в каждом из которых рассматриваются только две альтернативы пути передвижения и оценивается один параметр, влияющий на их выбор (табл. 1) [1].

Согласно вышеописанным этапам проверки моделей на адекватность, перед тем, как приступить к применению логит и линейной моделей, необходимо рассчитать статистику s_N^2 для «условной» модели (при которой теоретические вероятности соответствуют ситуации равновозможного выбора) и сравнить его с табличным значением χ^2 -распределения на принятом уровне значимости 0,95. В данном конкретном случае выполняется неравенство $s_N^2 \leq \chi_{0,95}^2$ ($3 < 7,815$), и вероятность того, что случайная величина $s_N^2 = 3$ не окажется больше ее критического значения, равна 0,39. Это говорит о том, что «условная» модель пригодна для описания эмпирического материала. На данном этапе можно принять решение о том, что в поиске более адекватной модели нет смысла. Однако не в ее пользу говорит то, что описательные возможности этой модели не очень высоки (отклонение прогнозных значений вероятности от фактически заданных велики), размер

Таблица 1 Проверка на адекватность моделей выбора пассажиром пути передвижения
с помощью критерия s_N^2

Номер наблюдения	Результат выбора альтернативы	Параметр (характеристика пути)	Вероятность выбора для логит модели		Вероятность выбора по линейной модели	Результат равновероятного выбора альтернативы
			коэффициент β , оцененный по ММП	коэффициент β подобран итеративным способом		
1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	0,82	0,69	0,85	0,5
	0	3	0,18	0,30	0,15	0,5
2	1	1	0,32	0,39	0,73	0,5
	0	2	0,68	0,60	0,27	0,5
3	0	3	0,32	0,39	0,23	0,5
	1	4	0,68	0,60	0,77	0,5
Значение критерия s_N^2			2,82	2,61	0,84	3
Вероятность по таблице $\chi^2(N-m)$			0,24	0,27	0,36	0,39
Количество степеней свободы			2	2	1	3

выборки достаточно мал и число степеней свободы достаточно велико по отношению к рассматриваемым моделям. Это значит, что целесообразно провести проверку упомянутых логит и линейной моделей на адекватность и сравнить их с результатом равновероятного выбора.

Вероятность выбора пути передвижения при использовании логит модели была определена по зависимости [5, 7]

$$P_{ij} = \frac{e^{x_{ij}\beta}}{\sum_{r=1}^J e^{x_{ir}\beta}}, \quad (11)$$

где x_{ij} – характеристика альтернативы (пути) j для пассажира i ; β – параметр модели, в рассматриваемом примере (в случае оценки по ММП) $\beta = 0,756$.

Результаты расчетов по логит модели представлены в табл. 1. Сравнение значений статистики s_N^2 для логит модели и модели равновозможного выбора указывает на их несущественные различия, но при этом число степеней свободы в случае равновозможного выбора равно 3, а для логит модели – 2. Это говорит не в пользу последней, поскольку вероятность ошибки при отвержении гипотезы о равновозможности составляет 0,39, что более чем в 1,5 раза превышает аналогичную характеристику в логит модели. Далее, с целью увеличения описательных способностей логит модели, ее параметр β был оценен с помощью надстройки «Пакет анализа» приложения *MS Excel* и составил 0,419. Данное значение параметра обеспечивает выполненные условия $s_N^2 \rightarrow \min$ (табл. 1).

В этом случае значение статистики s_N^2 оказалось существенно отличным от того случая, когда параметр β был оценен по ММП при равном количестве степеней свободы. Это еще раз доказывает, что ММП не всегда обеспечивает качественные оценки параметров модели. Полученная таким образом оценка параметра β позволяет более точно описать фактический выбор пассажиром пути передвижения с помощью логит модели, но не настолько хорошо, как в случае линейной модели.

Вероятность выбора пути передвижения, согласно линейной модели, определялась по зависимости

$$P_j = \frac{a_0 + a_1 \cdot x_{ij}}{\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_{ij})}, \quad (12)$$

где a_0, a_1 – коэффициенты регрессии линейной модели [5]. В данном примере они равны $a_0 = -0,947, a_1 = 0,368$.

Результаты расчетов вероятности выбора пассажиром пути передвижения по зависимости (12) представлены в табл. 1.

Сравнив полученные для линейной зависимости значения статистики s_N^2 со значениями этой же статистики для равновозможного выбора и логит модели, можно сделать вывод, что линейная модель наилучшим образом описывает фактические значения вероятности выбора пассажиром пути передвижения. Это подтверждается почти втрое меньшим значением статистики $s_N^2 = 0,84$.

Выводы

Анализ существующих методов проверки моделей выбора пассажиром пути передвижения на адекватность показал, что среди них отсутствуют методы, учитывающие отклонения теоретических вероятностей выбора от фактических. К недостаткам существующих подходов также относится использование во многих из них ММП, который, в свою очередь, не всегда обеспечивает такие оценки параметров модели, которые позволяют минимизировать расхождения между расчетными данными и эмпирическим материалом.

С целью устранения данных недостатков был разработан критерий проверки моделей выбора на адекватность s_N^2 , который позволяет учесть отклонения расчетных значений вероятностей выбора пассажиром пути следования от реальных (фактических).

Рассмотрение использования данного критерия на конкретном примере позволило определить наиболее адекватную модель среди трех, а также сравнить описательные способности одной и той же модели при разных ее параметрах. При этом рассмотренный пример не является пригодным для демонстрации возможностей разработанного критерия из-за малого количества наблюдений реализованного пассажиром выбора.

Предметом дальнейших исследований является рассмотрение выборки большего объема и определение границы принятия решений о целесообразности построения модели выбора пассажиром пути следования на основе материала, собранного в ходе обоснования этого выбора.

Литература

1. Ortuzar J.D. Modelling Transport / J.D. Ortuzar, L.G. Willumsen. – Fourth Edition. – Chichester: John Wiley&Sons Ltd, 2011. – 586 p.
2. Lindveld Ch.D.R. Non-Linear Utility Functions in MNL Discrete-Choice Models / Ch.D.R. Lindveld. – Delft: University of Technology, 2001. – 19 p.
3. Kjær T. A review of the discrete choice experiment / T. Kjær. – D.: University of Southern Denmark, 2005. – 143 p.

4. Эконометрия: уч. для студ. эконом. спец. / В.И. Суслов, Н.М. Ибрагимов, Л.П. Талышева, А.А. Цыплаков. – Новосибирск: Экфак, 1990. – 740 с.
5. Горбачов П.Ф. Аналіз сучасних моделей дискретного вибору пасажиром шляху пересування / П.Ф. Горбачов, О.В. Макаричев, О.В. Свічинська, С.В. Свічинський // Автомобільний транспорт: сб. науч. тр. – 2011. – Вып. 28. – С. 97–103.
6. Multivariate Data Analysis. Part 2: Logistic Regression [electronic resource] / Southampton university, 2007/2008. – Access mode: <http://www.southampton.ac.uk>.
7. Ben-Akiva M. Discrete choice models with applications to departure time and route choice / M. Ben-Akiva, M. Bierlaire. – Handbook of Transportation Science, 2003. – 32 p.
8. Biersen H. J. The Logit Model: Estimation, Testing and Interpretation [Electronic Resource] / Lecture notes. Undergraduate econometrics, 2008. – Access mode: <http://www.econ.psu.edu>.
9. Давнис В.В. Прогнозные модели экспертных предпочтений / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248 с.
10. Mode Choice Models: Bespoke and Transferred. Transport Analysis Guidance // Department for Transport. – London. – 2006, № 3.11.3.
11. Ben-Akiva M. Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand (Transportation Studies) / M. Ben-Akiva, S. Lerman. – Massachusetts: MIT Press., 1985. – 10 p.
12. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / под ред. В.С. Королюка. – К.: Наукова думка, 1978. – 580 с.
14. Cramer J.S. Logit Models from Economics and Other Fields / J.S. Cramer. – New York: University of Amsterdam and Tinbergen Institute, 2003. – 173 p.

Рецензент: Е.В. Нагорный, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 15 марта 2013 г.