

УДК 624.21

РАСЧЕТ ПЛИТЫ, ОДНА СТОРОНА КОТОРОЙ ЗАЩЕМЛЕНА, А ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ – ШАРНИРНО ОПЕРТА

В.П. Кожушко, профессор, д.т.н., ХНАДУ

***Аннотация.** Приведена методика расчета плит, одна сторона которых защемлена, а вторая (ей противоположная) – шарнирно оперта. Исследование работы плит проведено на основе разработанного автором метода расчета пролетных строений автодорожных мостов.*

***Ключевые слова:** защемление грани плиты, криволинейные плиты, плиты переменной толщины, ребристые плиты, свободное опирание грани плиты, смешанный метод строительной механики.*

РОЗРАХУНОК ПЛИТИ, ОДНА СТОРОНА ЯКОЇ Є ЗАТИСНЕНОЮ, А ПРОТИЛЕЖНА – ШАРНІРНО ОБПЕРТОЮ

В.П. Кожушко, професор, д.т.н., ХНАДУ

***Анотация.** Наведено методику розрахунку плит, одна сторона яких є затисненою, а друга (її протилежна) – шарнірно обпертою. Дослідження роботи плит проведено на основі розробленого автором методу розрахунку прогінних будов автодорожніх мостів.*

***Ключові слова:** затиснення грані плити, криволінійні плити, плити змінної товщини, ребристі плити, вільне обтирання грані плити, змішаний метод будівельної механіки.*

DESIGNING OF THE PLATE ONE SIDE OF WHICH IS CLAMPED AND THE OPPOSITE ONE IS HINGE-SUPPORTED

V. Kozhushko, Professor, Doctor of Technical Science, KhNAHU

***Abstract.** The technique of plates designing, one side of which is clamped and the second one (opposite) is hinged-supported, is presented. Researches of plates work is carried out on the basis of developed by the author designing method of road bridges structures.*

***Key words:** plates face restraint, curved plates, plates with variable thickness, ribbed plates, platerib free support, mixed method of building mechanics.*

Введение

Расчет пластин (плит) с различными условиями опирания их сторон по контуру, нагруженных различными внешними нагрузками, представляет собой сложнейшую задачу теории упругости, решаемую с применением сложного математического аппарата. Классическое решение расчета пластин, базирующееся на использовании дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных, подробно изложено в капитальных работах [1, 2].

Точное решение получено для прямоугольных плит с определенными граничными условиями и нагруженными сплошной распределенной нагрузкой, сосредоточенной силой, приложенной в центре плиты, симметричной кусочной нагрузкой и другими простейшими внешними нагрузками. Практически нет сведений о решении пластин, нагруженных сосредоточенными моментами, приложенными в любом месте пластины.

Анализ публикаций

Широко используются приближенные методы расчета пластин с применением вариаци-

онных методов [2, 3], рядов или интегралов Фурье [4], интегральных уравнений Фредгольма [4], метода конечных элементов [5] и т.д.

Таким образом, при решении задач о напряженно-деформированном состоянии пластин с различными условиями их опирания по контуру нет единого математического подхода. Слабо освещена работа пластин, одна кромка которых закреплена, противоположная – оперта, а две другие кромки свободны, нагруженных любыми видами внешних нагрузок. Решение задачи представляет интерес для мостовиков.

Цель и постановка задачи

Предлагается работу упомянутой пластины исследовать с использованием приближенного метода, разработанного автором для расчета пролетных строений мостов [6, 7].

Прямоугольная пластина рассматривается как система взаимно пересекающихся полос (продольных и поперечных, рис. 1). Количество продольных полос (расположенных вдоль оси x) следует принимать не меньше 10. Желательно количество продольных полос назначать нечетным. Как видно из рис. 1, верхняя кромка плиты закреплена, нижняя (противоположная верхней) имеет свободное опирание, а боковые кромки – свободны. Таким образом, продольную полосу следует рассматривать как однопролетный элемент, один конец которого закреплен, а второй – свободно оперт.

Поперечную полосу метровой ширины рекомендуется вырезать в том сечении по длине l плиты, в котором предполагается определять напряженно-деформированное состояние системы (на рис.1 поперечная полоса вырезана в середине пролета продольной полосы). Поперечная полоса рассматривается как многопролетный элемент, который опирается на упруго-оседающие опоры, которыми и являются продольные полосы. При расчете системы взаимно пересекающихся полос, кроме их параметров (длины продольной полосы l и ее ширины d , или, то же самое, пролета поперечной полосы), вводятся изгибная жесткость продольной полосы (если в расчете учитываются только вертикальные усилия Z_i , передаваемые поперечной полосой на продольные) и изгибная жесткость попереч-

ной полосы шириной один метр. Если поставлена задача определения влияния крутящих моментов M_i на напряженно-деформированное состояние системы, то дополнительно вводится жесткость продольных полос при кручении. Можно учесть и другие внутренние усилия, но они практически не оказывают влияния на распределительную способность системы.

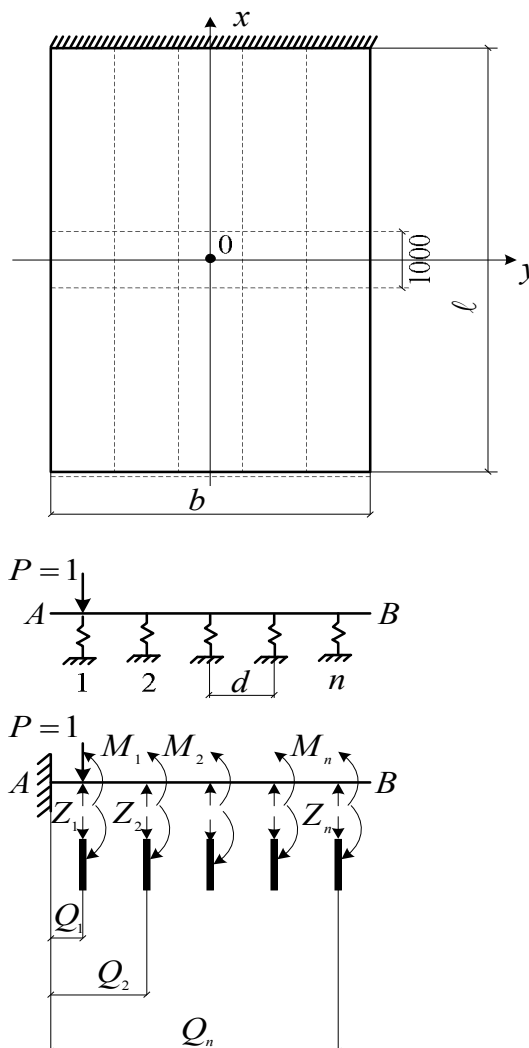


Рис. 1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

Не вызывает затруднений решение плиты, имеющей различную толщину в поперечном направлении (вдоль стороны b). В этом случае предлагается поперечную полосу рассматривать как элемент, в котором изгибная жесткость по ее длине изменяется ступенчато. Поскольку при решении задачи надо уметь определять перемещения ступенчатой поперечной полосы, нами выведены формулы для определения перемещений (прогибов) полосы при действии на нее сосредоточен-

ных сил или моментов [9–11]. Следует отметить, что продольные полосы при переменной жесткости поперечной полосы следует вырезать так, чтобы высота продольных полос в пределах ее ширины d была постоянной, т.е. ширину продольной полосы следует назначать равной длине ступени d поперечной полосы. При этом ширину продольных полос d_i (или, то же, длину стороны поперечной полосы с одинаковой жесткостью) можно принимать разной, что не вызывает принципиальных затруднений при решении задачи.

Если плита имеет переменную жесткость и вдоль стороны l (вдоль пролета продольной полосы), то при определении деформаций (прогибов или углов поворота) продольной полосы необходим учет этого фактора, что также не вызывает серьезных трудностей, т.к. методика определения перемещений однопролетных полос переменной по их длине жесткости известна. Методика определения перемещений изложена в работе [13].

Не вызывает затруднений и решение задачи о напряженно-деформированном состоянии плиты, подкрепленной ребрами в одном или обоих направлениях. Если имеются продольные ребра, то продольные полосы следует вырезать так, чтобы ребра располагались по середине ширины d продольного элемента. При наличии поперечных ребер вводится приведенная к одному метру изгибная жесткость поперечной полосы (т.е. жесткость, полученная с учетом жесткости поперечных ребер). Если продольные ребра расположены на разных расстояниях по ширине плиты (вдоль стороны b), то продольные полосы следует вырезать переменной ширины d_i , что не вызывает, как уже упоминалось ранее, затруднений в решении задачи, т.к. ее решение сводится, как это будет показано далее, к решению системы уравнений, количество которых зависит исключительно от количества продольных элементов.

Не вызывает затруднений расчет однопролетных косых плит с ребрами или без них, методика определения напряженно-деформированного состояния которых (для плит со свободным опиранием двух противоположных сторон) приведена в работе [8].

Если плита имеет криволинейные очертания в плане, то продольные элементы будут криволинейными, имеющими различный пролет

l_i , а поперечная полоса будет иметь переменную ширину. Как показано в работе [12], приемлемые результаты дает замена плавного очертания ширины поперечной полосы ступенчатым. Для облегчения определения прогибов и углов кручения криволинейных продольных полос следует использовать составленные М.Е. Гибшманом таблицы [14], позволяющие определять эти перемещения при любой кривизне продольных полос. Количество уравнений в решаемой системе уравнений снова-таки зависит только от количества продольных полос, которые следует вводить с разным пролетом l_i .

Реализация задачи

Для решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния системы применен смешанный метод строительной механики. Поперечная полоса рассматривается как многопролетный элемент на упруго-оседающих опорах (рис. 1). Роль упругих опор играют продольные полосы. Фиктивное защемление поперечной полосы вводится на левом ее конце (в точке A). При определении неизвестных усилий Z_i (если в расчете учитываются только вертикальные силы Z_i , передаваемые поперечной полосой на продольные полосы) следует решить систему уравнений с $(n+2)$ количеством неизвестных, где n – количество продольных полос.

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(Z)} Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(Z)} Z_n + a_1 \varphi_A + y_A + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(Z)} Z_1 + \dots + \delta_{nm}^{(Z)} Z_n + a_n \varphi_A + y_A + \Delta_{nP} = 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i - \sum_{j=1}^m P_j = 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i a_i + \sum_{j=1}^m P_j a_j = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При учете в расчете и крутящих моментов M_i количество уравнений в системе возрастает до $(2n+2)$.

В системах (1), (2):

Z_i – вертикальные усилия (рис. 1), передаваемые поперечным элементом на i -ю продольную полосу ($i=1, 2, 3, \dots, n$);

$$\begin{cases}
 \delta_{11}^{(Z)} Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(Z)} Z_n + \delta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nn}^{(M)} M_n + a_1 \varphi_A + y_A + \Delta_{1P} = 0; \\
 \dots \\
 \delta_{nn}^{(Z)} Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(Z)} Z_n + \delta_{nn}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nn}^{(M)} M_n + a_n \varphi_A + y_A + \Delta_{nP} = 0; \\
 \theta_{11}^{(Z)} Z_1 + \dots + \theta_{nn}^{(Z)} Z_n + \theta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nn}^{(M)} M_n + \varphi_A + \theta_{1P} = 0; \\
 \dots \\
 \theta_{nn}^{(Z)} Z_1 + \dots + \theta_{nn}^{(Z)} Z_n + \theta_{nn}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nn}^{(M)} M_n + \varphi_A + \theta_{nP} = 0; \\
 \sum_{i=1}^n Z_i - \sum_{j=1}^m P_j = 0; \\
 \sum_{i=1}^n Z_i a_i + \sum_{k=1}^n M_k - \sum_{j=1}^m P_j a_j = 0,
 \end{cases} \quad (2)$$

M_k – крутящие моменты, передаваемые поперечным элементом на продольные полосы ($k=1, 2, 3 \dots n$);

$\delta_{ik}^{(z)}$ – единичные вертикальные перемещения поперечного элемента в i -й точке от единичной силы $Z_k = 1$, приложенной в k -й точке ($i=1, 2, 3 \dots n; k = 1, 2, 3 \dots n$);

$\delta_{ik}^{(M)}$ – единичные вертикальные перемещения поперечного элемента в i -й точке от единичного момента $M_k = 1$, приложенного в k -й точке (рис. 1);

$\theta_{ik}^{(z)}$ – единичный угол поворота поперечного элемента в i -й точке от единичной силы $Z_k = 1$, приложенной в k -й точке;

$\theta_{ik}^{(M)}$ – единичный угол поворота i -й точки поперечной полосы от единичного момента $M_k = 1$, приложенного в k -й точке (рис. 1);

Δ_{iP} – вертикальное перемещение i -й точки поперечной полосы от внешних нагрузок ΣP_i ;

θ_{1P} – угол поворота i -й точки поперечной полосы от внешних нагрузок ΣP_i .

Главные единичные перемещения $\delta_{ii}^{(Z)}$ включают в себя вертикальные перемещения поперечного элемента $V_{ii}^{(Z)}$ и прогиб продольной полосы $y_{ii}^{(Z)}$ в том сечении по длине плиты, в котором вырезана поперечная полоса. Прогибы $y_{ii}^{(Z)}$ определяются от равномерно распределенной по всей длине продольной полосы нагрузки интенсивностью $q = 1$.

Рассмотрим продольную полосу как элемент, который имеет защемление одного и свободное опирание другого конца и нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1$ (рис. 2).

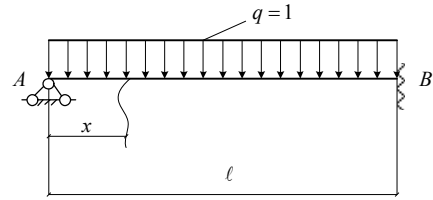


Рис. 2. Расчетная схема продольной полосы

Прогиб продольной полосы $y_{ii}^{(Z)}$ от распределенной нагрузки в сечении, расположенном на расстоянии x от шарнирной опоры, легко определить, пользуясь справочной литературой [13].

$$y_{ii(x)}^{(Z)} = \frac{ql^4}{24E_{np}I_{np}} (1 - \nu_{np}^2) \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) - \frac{ql^3}{48E_{np}I_{np}} (1 - \nu_{np}^2) x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad (3)$$

где $E_{np}I_{np}$ – изгибная жесткость продольной полосы; ν_{np} – коэффициент Пуассона материала продольной полосы.

Прогиб $y_{ii}^{(Z)}$ в середине пролета продольной полосы равен

$$y_{ii(0,5l)}^{(Z)} = \frac{ql^4}{192E_{np}I_{np}} (1 - \nu_{np}^2). \quad (4)$$

Поскольку в формулы по определению главных единичных перемещений входит прогиб $y_{ii}^{(Z)}$, полученный при $q = 1$, то в формулы (3), (4) следует подставить $q = 1$.

Таким образом, прогиб рассматриваемой полосы будет в 2,5 раза меньше прогиба полосы с шарнирным опиранием обоих концов, т.е. распределительная способность этой системы будет иной, чем в плите со свободным опиранием двух противоположных кромок.

Используя предложенную автором методику расчета рассматриваемых пластин, можно построить линии влияния усилий Z_i и крутящих моментов M_i , передаваемых поперечной полосой на продольные полосы.

Для построения линий влияния усилия Z_i к поперечной полосе над i -й продольной полосой следует приложить единичное усилие $P = 1$ (рис. 1) и решить систему уравнений

(1) или (2). Полученные значения усилий и будут ординатами линий влияния усилия Z_i .

Для построения линий влияния крутящего момента M_i систему (2) следует решать n раз. Полученные значения крутящих моментов в i -м сечении при различных положениях силы $P = 1$ и будут ординатами линии влияния M_i .

Загрузив линии влияния вертикальных усилий и крутящих моментов внешними нагрузками, определяем усилия и деформации в продольных и поперечной полосах.

Выводы

На основании вышеизложенного следует сделать выводы:

1. Предложенная методика расчета позволяет рассчитывать рассматриваемые плиты при воздействии на них любой внешней нагрузки.
2. Не вызывает затруднений реализация этой методики при расчете косых, кривых в плане пластин, пластин переменной толщины и пластин, подкрепленных ребрами в одном или обоих направлениях.

Литература

1. Вайнберг Д.В. Пластинки, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость, колебания) / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – К.: Гос. изд-во л-ры по стр-ву и архитектуре УССР, 1959. – 1048 с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки: пер. с англ. / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер. с англ. / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 390 с.
4. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты: пер. с польск. / З. Кончковский. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред: пер. с англ. / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 240 с.
6. Кожушко В.П. Расчет пролетных строений балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вып. 36. – С. 118–122.
7. Кожушко В.П. До розрахунку балочно-консольних прогінних будов на тимчасово навантаження / В.П. Кожушко // Автом. дороги і дор. буд-во. – 1985. – Вип. 37. – С. 56–60.
8. Кожушко В.П. Деякі особливості роботи косих прольотних будов балкових мостів розрізної системи / В.П. Кожушко // Автом. дороги і дор. буд-во. – 1998. – Вип. 56. – С. 107–114.
9. Кожушко В.П. Анализ работы главных балок некоторых разрезных балочных мостов при изменении поперечной жесткости пролетных строений / В.П. Кожушко // Вестник ХГАДТУ: сб. науч. тр. – 2000. – Вып. 12–13. – С. 127–131.
10. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок на упруго-оседающих опорах / В.П. Кожушко // Науковий вісник буд-ва. – 2002. – Вип. 17. – С. 146–150.
11. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок от единичных моментов / В.П. Кожушко // Науковий вісник буд-ва. – Х.: ХДТУБА, ХОТВАБУ. – 2002. – Вип. 18. – С. 73–76.
12. Кожушко В.П. Расчет балочных пролетных строений мостов, криволинейных в плане / В.П. Кожушко // Вестник ХГАДТУ: сб. науч. тр. – 1996. – Вып. 4. – С. 31–34.
13. Островидов А.М. Таблицы для проектирования мостов: справочник / А.М. Островидов, И.А. Кузнецов. – М.: Автотрансиздат, 1959. – 536 с.
14. Гибшман М.Б. Таблицы для расчета пролетных строений транспортных сооружений: справочник / М.Е. Гибшман. – М.: Транспорт, 1985. – 448 с.

Рецензент: В.К. Жданюк, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 31 октября 2013 г.