

УДК 624.21

## ПЛИТЫ С ДВУМЯ СМЕЖНЫМИ ЗАЩЕМЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н., Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет**

*Аннотация.* Изложен вопрос расчета плит с двумя смежными защемленными сторонами при действии на них любых внешних нагрузок. Исследование работы рассматриваемых жестких пластин основано на разработанном автором методе расчета плитных конструкций при различных способах опирания сторон.

*Ключевые слова:* продольная полоса, поперечная полоса, система алгебраических уравнений.

## ПЛИТИ З ДВОМА СУМІЖНИМИ ЗАТИСНЕНИМИ СТОРОНАМИ

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н., Харківський національний автомобільно-дорожній університет**

*Анотація.* Викладено питання розрахунку плит із двома суміжними затисненими сторонами при дії на них будь-яких зовнішніх навантажень. Дослідження роботи жорстких пластин, які розглядаються, базується на розробленому автором методі розрахунку плитних конструкцій за різних способів обтірання їх сторін.

*Ключові слова:* поздовжня смуга, поперечна смуга, система алгебраїчних рівнянь.

## PLATES WITH TWO ADJESENT RESTRAINED SIDES

**V. Kozhushko, Prof., D. Sc. (Eng.),  
Kharkiv National Automobile and Highway University**

*Abstract.* The problem of design of plates with two adjacent restrained sides under the action of any external loads is stated. Study of the examined rigid plates work is based on the developed by the author method of plate structures design, using various ways of supporting their sides.

*Key words:* longitudinal stripe, horizontal line, fictitious restrain, system of algebraic equations.

### Введение

Тонкие пластины являются неотъемлемым конструктивным элементом многих сооружений. От их точного расчета зависит стоимость конструкции в целом. Распределение усилий в плитах зависит от условий закрепления (опирания) их граней.

Значительный интерес для проектировщиков представляет расчет пластины, две смежные стороны которых защемлены, а две другие – свободны.

### Анализ публикаций

Расчету пластин с двумя смежными защемленными и двумя другими смежными свободными сторонами посвящено очень мало литературных источников [1, 2]. В работе [1] приведены общие (очень скудные) сведения об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) данной системы. Подчеркнуто, что для решения задачи следует использовать двойные синусоидальные ряды Фурье. В справочном пособии [2] приведены таблицы для определения внутренних усилий и деформаций рассматриваемых в данной

статье пластин, но только для некоторых видов внешних нагрузок: расположенных по всей площади равномерно распределенной или гидростатической нагрузок, распределённых по свободным краям моментов и линейной распределенной по свободным краям нагрузки.

При воздействии иных внешних нагрузок или при расчете анизотропных тонких упругих пластин вопрос определения НДС системы требует дополнительных исследований.

**Цель и постановка задачи**

Целью исследований является разработка приближенного метода расчета пластин, позволяющий учесть вышеизложенные факторы.

**Реализация задачи**

При расчете рассматриваемых в данной статье пластин предлагается использовать единый для всех прямоугольных плит метод расчета [3, 4], который может учитывать специфику закрепления их сторон, все виды внешних нагрузок, наличие ребер или переменную жесткость плиты.

Произведём разбивку пластины на продольные (скажем, вдоль оси  $Ox$ ) и поперечные (вдоль оси  $Oy$ ) полосы (рис. 1).

Количество продольных полос следует принимать  $n \geq 10$ , и желательно разбивку выполнять на нечетное количество полос. Поперечную полосу шириной 1 м рекомендуем вырезать в том сечении по длине пластины  $\ell$ , в которой предлагается изучать напряженно-деформированное состояние.

В статическом отношении продольная полоса представляет защемленную консоль длиной  $\ell$ , а короткая полоса – защемленную в точке  $A$  полосу, одновременно опирающуюся на упруго оседающие опоры, роль которых играют продольные полосы. Если учитывать влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) системы только вертикальных усилий  $Z_i$ , то количество неизвестных будет равным  $(n+2)$ , где  $n$  – количество продольных полос. Тогда неизвестные  $Z_A, M_A$  и  $Z_i$  будут определены в результате решения следующей системы уравнений (1)

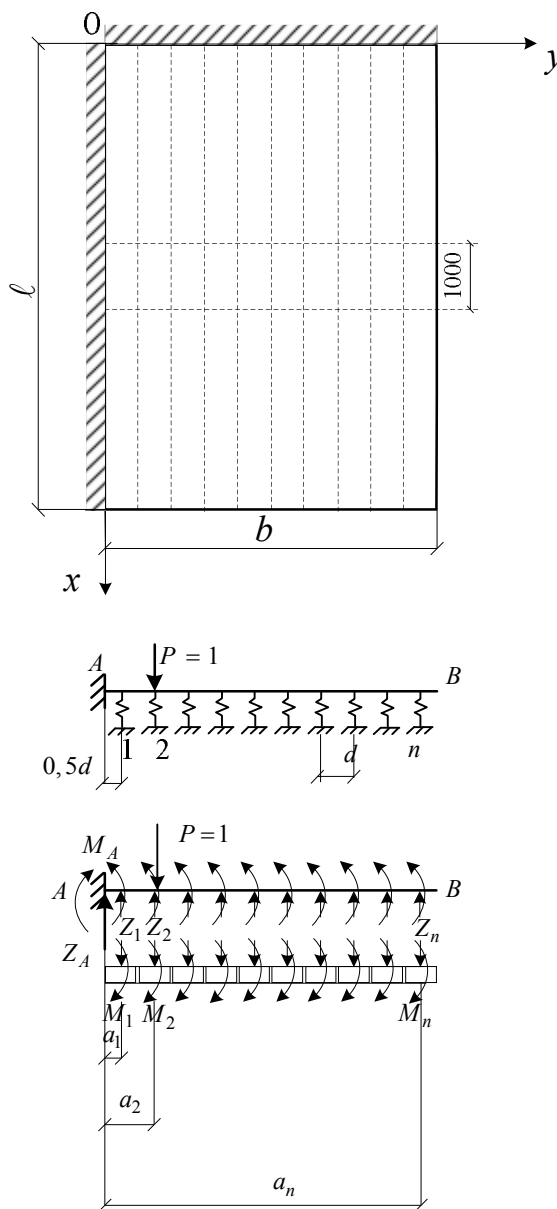


Рис. 1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

$$\begin{cases} \delta_{11}Z_1 + \dots + \delta_{1n}Z_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1}Z_1 + \dots + \delta_{nn}Z_n + \Delta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A - 1 = 0; \\ a_1Z_1 + \dots + a_nZ_n - M_A - a_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Свободные члены в системе уравнений определяются из условия, что к поперечной полосе последовательно в точках  $1, 2, \dots, n$  будут приложены единичные внешние сосредоточенные силы  $P=1$ . При решении системы уравнений (1)  $n$  раз будут определены ординаты линий влияния усилий  $Z_i$  и  $Z_A$ , передаваемые поперечной полосой на продоль-

ные полосы. После загрузки линии влияния силами внешними нагрузками будут определены коэффициенты поперечного распределения (КПР). Загрузив продольные полосы внешними нагрузками и умножив их на КПР каждой продольной полосы, получим значения внутренних усилий и деформаций в каждой полосе. При определении перерезывающих сил и изгибающих моментов в поперечной полосе (в том сечении пластины, в котором вырезана поперечная полоса) следует предварительно построить линии влияния перерезывающих сил и изгибающих моментов по методике, изложенной в работе [5]. Загрузив эти линии влияния внешней нагрузкой, получим значения требуемых усилий в данном поперечном сечении пластины. Для определения усилий в ином сечении следует в этом сечении снова вырезать поперечную полосу единичной ширины и повторить процедуру расчета.

Методика определения единичных перемещений  $\delta_{ik}$  и свободных членов  $\Delta_{iP}$  изложена в работе автора [6]. Следует обратить внимание на определение главных единичных перемещений, которые определяются по следующей формуле

$$\delta_{ii} = \delta'_{ii} + w_i \cdot \beta, \quad (2)$$

где  $\delta'_{ii}$  – прогиб поперечной полосы в  $i$ -м сечении от единичной силы  $Z_i=1$ , приложенной в этом же сечении;  $w_i$  – прогиб продольной полосы от единичной распределенной по ее длине нагрузки, определяемой как для консольной балки (рис. 2), в сечении  $x$ , где вырезана поперечная полоса [7], по формуле (3).

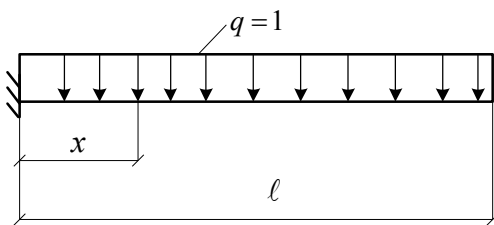


Рис. 2. Расчетная схема продольной полосы

$$w_i = \frac{\ell^4(1-\nu_{\text{пр}}^2)}{24E_{\text{пр}} \cdot J_{\text{пр}}} \left( 6 \cdot \frac{x^2}{\ell^2} - 4 \frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4} \right), \quad (3)$$

где  $E_{\text{пр}}J_{\text{пр}}$  – изгибная жесткость продольной полосы;  $\nu_{\text{пр}}$  – коэффициент Пуассона материала продольной полосы;  $\beta$  – коэффициент, учитывающий влияние защемления смежной стороны на величину прогиба продольного элемента. Он определяется по формуле (4)

$$\beta = \frac{K_i}{K_1}. \quad (4)$$

Для определения величин  $K_i$  рассмотрим поперечную полосу как консольный элемент, нагруженный единичной сосредоточенной силой, приложенной на расстоянии  $y_i$  от защемления (рис. 3).

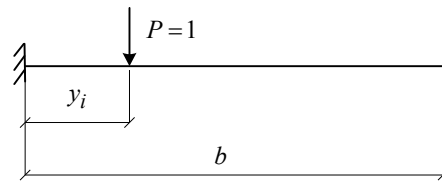


Рис. 3. Схема определения прогибов продольной полосы  $w_i$  в  $i$ -й точке поперечной полосы

Тогда коэффициент  $K_i$ , входящий в формулу по определению прогиба поперечной полосы в  $i$ -й точке, равен

$$K_i = \frac{1}{3} \xi_i^3, \quad (5)$$

где  $\xi_i = \frac{y_i}{b}$  (6)

При учете влияния крутящих моментов  $M_i$  на НДС пластины следует решить систему из  $(2n+2)$  уравнений (6).

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(z)} Z_n + \delta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{1n}^{(M)} M_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(z)} Z_n + \delta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nn}^{(M)} M_n + \Delta_{nP} &= 0; \\ \theta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{1n}^{(z)} Z_n + \theta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{1n}^{(M)} M_n + \theta_{1P} &= 0; \\ \dots & \\ \theta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{nn}^{(z)} Z_n + \theta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nn}^{(M)} M_n + \theta_{nP} &= 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A - 1 &= 0; \\ a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n - M_A + M_1 + \dots + M_n - a_i &= 0. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Методика определения единичных перемещений  $\delta_{ik}^{(z)}$ ,  $\delta_{ik}^{(M)}$ , единичных углов поворота  $\theta_{ik}^{(z)}$ ,  $\theta_{ik}^{(M)}$  и свободных членов  $\theta_{iP}$  изложена в работе автора [8].

При определении главных единичных углов поворота  $\theta_{ii}^{(m)}$  должен быть учтен угол закручивания продольной полосы от моментов  $M_i = 1$ , распределенных по длине  $i$ -й продольной полосы (8)

$$\theta_{ii}^{(m)} = \theta_{ii}^{\prime(m)} + \theta_i, \quad (8)$$

где  $\theta_{ii}^{\prime(m)}$  – единичный угол поворота поперечной полосы в  $i$ -й точке от момента  $M_i = 1$ ;  $\theta_i$  – угол закручивания продольной полосы от  $M_i = 1$ . Для его определения следует использовать таблицы работы [9].

Определение единичных перемещений в системах уравнений (1)–(7) при переменной жесткости пластины не представляет трудностей. Автором предложены формулы для определения этих перемещений [10, 11].

Количество уравнений в системах (1), (7) не изменится, т.к. оно зависит исключительно от количества продольных полос.

При наличии ребер, подкрепляющих пластинку, разбивка на полосы должна быть такой, чтобы ребро входило в состав  $i$ -й полосы. И в этом случае количество уравнений в системах (1), (7) также будет зависеть от количества  $n$  продольных элементов.

### Выводы

Предложенный метод расчета позволяет исследовать НДС рассматриваемых жестких как изотропных, так и анизотропных пластинок, при воздействии на них любых внешних нагрузок.

### Литература

1. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский; пер. с польск. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.
2. Шадурский В.П. Таблицы для расчета упругих прямоугольных плит: справочное пособие / В.П. Шадурский. – М.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
3. Кожушко В.П. Розрахунок нескінченних консольних смуг / В.П. Кожушко,

С.А. Біндюг // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2002. – Вип. 64. – С. 125–127.

4. Кожушко В.П. Определение внутренних усилий в плитах с тремя или четырьмя заземленными сторонами / В.П. Кожушко // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – 2009. – Вип. 8. – С. 440–449.
5. Поливанов Н.И. Проектирование и расчет железобетонных и металлических автодорожных мостов: учебное пособие для вузов / Н.И. Поливанов. – М.: Транспорт, 1970. – 516 с.
6. Кожушко В.П. Расчет пролетных стропильных балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вип. 36. – С. 118–122.
7. Островидов А.М. Таблицы для проектирования мостов: справочник / А.М. Островидов, И.А. Кузнецов. – М.: Автотрансиздат, 1959. – 536 с.
8. Кожушко В.П. До розрахунку балочно-консольних прогінних будов на тимчасове навантаження / В.П. Кожушко // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1985. – Вип. 37. – С. 56–60.
9. Гишман М.Е. Таблицы для расчета пролетных строений транспортных сооружений: справочник / М.Е. Гишман. – М.: Транспорт, 1985. – 418 с.
10. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок на упруго-оседающих опорах / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 17. – С. 146–150.
11. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок от единичных изгибающих моментов / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 18. – С. 73–76.

Рецензент: А.Г. Кислов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 26 ноября 2014 г.