

УДК 624.21

## РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ДВЕ СМЕЖНЫЕ СТОРОНЫ КОТОРОЙ ЗАЩЕМЛЕНЫ, А ДВЕ ДРУГИЕ СМЕЖНЫЕ СТОРОНЫ ШАРНИРНО ОПЕРТЫ

В.П. Кожушко, проф., д.т.н., Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

*Аннотация.* Рассмотрен вопрос расчета прямоугольной жесткой пластины с двумя смежными защемленными и двумя смежными свободно опертыми сторонами при воздействии на систему любых внешних нагрузок. Для решения задачи предложен единый способ расчета этих пластин смешанным методом строительной механики в постановке, разработанной автором.

*Ключевые слова:* продольная полоса, поперечная полоса, фиктивное защемление, смешанный метод строительной механики.

## РОЗРАХУНОК ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ДВІ СУМІЖНІ СТОРОНИ ЯКОЇ ЗАТИСНУТІ, А ДВІ ІНШІ СУМІЖНІ СТОРОНИ ШАРНІРНО ОБПЕРТІ

В.П. Кожушко, проф., д.т.н., Харківський національний автомобільно-дорожній університет

*Анотація.* Розглянуто питання розрахунку прямокутної жорсткої пластины з двома суміжними затиснутими і двома суміжними вільно обпертими сторонами при дії на систему будь-яких зовнішніх навантажень. Для розв'язання задачі запропоновано єдиний спосіб розрахунку цих пластин змішаним методом будівельної механіки у постановці, розробленій автором.

*Ключові слова:* поздовжня смуга, поперечна смуга, фіктивне затиснення, змішаний метод будівельної механіки.

## DESIGN OF THE RECTANGULAR PLATE TWO ADJACENT SIDES OF WHICH ARE RESTRAINED AND THE OTHER TWO ADJACENT SIDES ARE HINGED

V. Kozhushko, Prof., D. Sc. (Eng.),  
Kharkiv National Automobile and Highway University

*Abstract.* The problem of design of the rigid rectangular plate with two adjacent restrained sides and two freely supported sides when the system is subjected to any external loads is considered. To solve the problem in question there was proposed a uniform method for designing such plates, using the mixed method of structural mechanics in the formulation developed by the author.

*Key words:* longitudinal stripe, diametrical stripe, fictitious restrain, mixed method of structural mechanics.

### Введение

Сведения о расчете пластин с рассматриваемыми в данной статье условиями опирания их сторон встречаются редко.

### Анализ публикаций

В ряде литературных источников излагаются общие принципы решения задачи по определению внутренних усилий в жестких пластинах с различными граничными условиями, а

примеры расчета или расчетные таблицы приводятся только при воздействии простейших внешних поперечных нагрузок на пластины. Это связано со сложностью решения дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных. Решений в замкнутом виде (в особенности при воздействии на пластину различных внешних нагрузок) очень мало. Так, в работе [1] для решения задачи предлагается использовать ряды или интегралы Фурье, интегральные уравнения Фредгольма, в работе [2] – матричные формы МКЭ. Различные численные методы расчета с реализацией их на ЭВМ изложены в работе [3]. Вопросы применения вариационных методов при расчете пластин подробно изложены Ю.Н. Работновым [4]. Л.А. Толоконников [5] рассматривает возможность использования при решении задачи НДС пластин функций комплексной переменной. Однако он подчеркивает, что подавляющее большинство аналитических решений получено для частных форм и областей и простых систем загрузки или с помощью приемов, основанных в значительной мере на интуиции авторов. Кроме этого, в работе отмечено, что многие методы основаны на идее конформного отображения, хотя решения получаются громоздкими, неоднозначными, приближенными, потому что точные методы решения интегральных уравнений или построения конформно отображающих функций на сегодня отсутствуют. Исследования работы пластин с применением методов коллокаций, сеток и других приближенных методов изложены в работах [6, 7].

Во всех упомянутых выше источниках указывается, что задача по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких пластин упомянутыми методами возможна при любых граничных условиях, однако ни в одном из этих источников не приведен расчет пластин с указанными в данной статье условиями опирания сторон.

Для обеспечения решения задачи по расчету пластин составлены таблицы [8, 9] внутренних усилий и перемещений системы, однако и в них решения пластин с рассматриваемыми условиями закрепления нет.

Только в источниках [10, 11] автору данной статьи удалось найти сведения о расчете упругих пластин с двумя смежными защем-

ленными и двумя смежными шарнирно опертыми сторонами, однако и в этих работах рассмотрены пластины, нагруженные только распределенными по всей площади нагрузками.

Таким образом, вопрос исследования работы рассматриваемых в данной статье пластин, нагруженных любой поперечной нагрузкой, представляет определенный интерес.

### Цель и постановка задачи

Рассматривается приближенный метод расчета исследуемых пластин, нагруженных любой внешней поперечной нагрузкой.

### Реализация задачи

Предлагается пластину вдоль длинной стороны  $l$  (рис. 1) разбивать на  $n$ -е количество полос шириной  $d=b/n$ , где  $b$  – меньшая сторона пластины. Для определения распределительной способности пластины вдоль короткой стороны  $b$  тоже вырезается полоса (поперечная) шириной  $1m$ . Поперечную полосу следует вырезать в том сечении по длине пластины  $l$ , в котором ставится задача определения внутренних усилий и перемещений (на рис. 1 эта полоса вырезана в середине пролета).

Поперечная полоса рассматривается как неразрезная система на упруго оседающих опорах, роль которых играют продольные элементы. Для определения усилий  $X_A, X_i, X_B$  и  $M_A$  предлагается смешанный метод строительной механики [12, 13], для чего в точке  $A$  (на левом конце поперечной полосы) вводится фиктивное защемление (рис. 1). Таким образом, основная схема поперечной полосы представлена консольным элементом, что значительно облегчает процедуру определения единичных перемещений и свободных членов в системе уравнений (1).

Поскольку в точке  $A$  угол поворота  $\varphi_A$  и прогиб  $w_A$  равны нулю, количество неизвестных будет  $(n+3)$  (если учитывать влияние на систему только вертикальных сил  $Z_i$ ). Тогда система уравнений будет иметь следующий вид, если внешняя нагрузка будет равна  $P = 1$

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{1b}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{nb}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B - 1 = 0; \\ a_1 \cdot Z_1 + \dots + a_n \cdot Z_n + b \cdot Z_B - M_A - a_i = 0; \\ \delta_{b1}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{bn}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{bb}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{bp} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

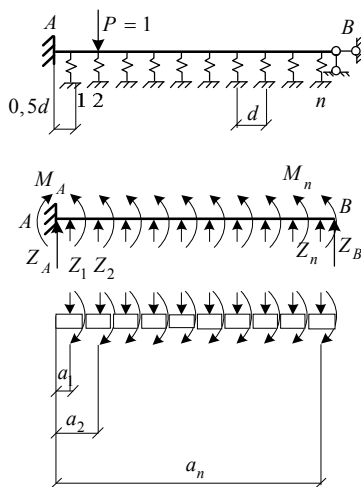
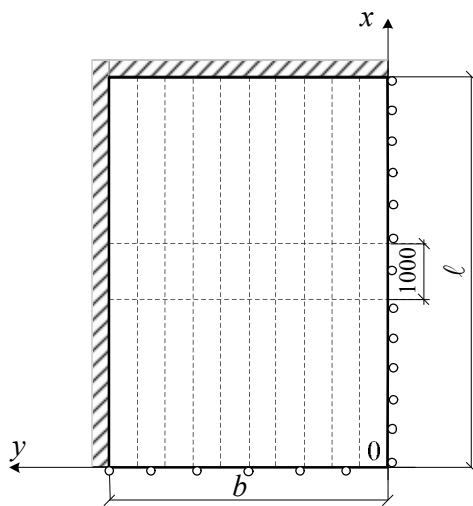


Рис. 1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

Методика определения единичных перемещений  $\delta_{ik}^{(z)}$  и свободных членов  $\Delta_{iP}$  изложена в работе [12]. В работе [12] определение главных единичных перемещений  $\delta_{ik}^{(z)}$  приведено для случая, когда левый и правый края пластины свободны. В нашем случае левый край пластины защемлен, а правый – свободно оперт, поэтому главные единичные перемещения следует определять по такой формуле

$$\delta_{ii}^{(z)} = \delta_{ii}'^{(z)} + \beta \cdot V_i, \quad (2)$$

где  $\delta_{ii}'^{(z)}$  – прогиб поперечной полосы (при введении фиктивного защемления в точке A) в  $i$ -й точке от единичной силы  $Z_i=1$ ;  $V_i$  – прогиб свободной продольной полосы от единичной распределенной нагрузки  $q=1$  в сечении  $x$  от шарнира (рис. 2).

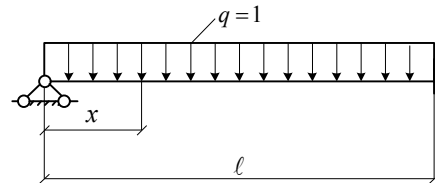


Рис. 2. Расчетная схема продольной полосы

Прогиб  $V_i$  в сечении  $x$  определим, используя справочник [14]

$$\begin{aligned} V_i = & \frac{\ell^4 (1 - \nu_{\text{пр}}^2)}{24 E_{\text{пр}} \cdot J_{\text{пр}}} \left( \frac{x}{\ell} - 2 \frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4} \right) - \\ & - \frac{\ell^3 (1 - \nu_{\text{пр}}^2)}{48 E_{\text{пр}} \cdot J_{\text{пр}}} x \left( 1 - \frac{x^2}{\ell^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E_{\text{пр}} J_{\text{пр}}$  – изгибная жесткость продольной полосы;  $\nu_{\text{пр}}$  – коэффициент Пуассона материала продольной полосы;

Для середины пролета продольной полосы (т.е. при  $x = 0,5\ell$ ) прогиб

$$\nu_i = \frac{\ell^4 (1 - \nu_{\text{пр}}^2)}{192 E_{\text{пр}} \cdot J_{\text{пр}}}. \quad (4)$$

Коэффициент  $\beta$  в формуле (2) учитывает влияние концевых закреплений поперечной полосы на величину прогибов продольной полосы.

Рассмотрим поперечную полосу при истинном закреплении ее левого и правого концов (рис. 3), нагруженную единичной силой  $P=1$ .

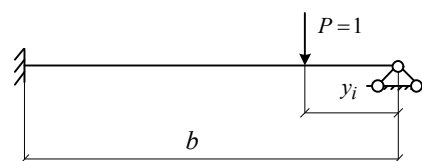


Рис. 3. Расчетная схема поперечной полосы при определении ее прогибов от силы  $P=1$

Прогиб  $\delta$  этой полосы под грузом (под точкой приложения силы  $P$ ) равен

$$\frac{E_{\text{попереч}} \cdot J_{\text{попереч}}}{1 - \nu_{\text{попереч}}^2} \cdot \delta = \frac{1}{12} b^3 (3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6), \quad (5)$$

где  $\xi = y/b$  – относительное расстояние до точки приложения силы  $P$ .

Введем обозначение

$$K_i = 3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6. \quad (6)$$

Коэффициент

$$\beta = \frac{K_i}{K_1}. \quad (7)$$

Через  $K_1$  обозначим выражение (6) при  $\xi = 0,5$ , т.е. для средней продольной полосы, если количество продольных полос нечетное. При четном количестве продольных полос через  $K_1$  следует обозначить эту величину для двух смежных полос, расположенных симметрично справа и слева непосредственно у линии  $y = 0,5b$ . Тогда для этих полос  $\beta = 1$ , а для других продольных полос  $\beta \neq 1$ .

Как уже было упомянуто, свободные члены в системе уравнений (1) получены от силы  $P=1$ , приложенной к поперечной полосе. Прикладывая силу  $P=1$  в  $i$ -х точках поперечной полосы и решая систему уравнений  $n$  раз, получим ординаты линий влияния сил  $Z_i$ . Загрузив линии влияния сил внешними нагрузками, определим значения коэффициентов поперечного распределения (КПР). После этого задача определения внутренних усилий и перемещений в продольных балках не представляет трудностей, т.к. продольную балку следует рассматривать как однопролетную полосу, один конец которой заземлен, а второй имеет шарнирное опирание (рис. 2). При определении усилий и перемещений должен быть учтен КПР так, как это показано в работах [15, 16].

Для определения поперечных сил и изгибающих моментов в поперечной полосе необходимо первоначально построить линии влияния этих усилий по методике, изложенной

в работе [17], загрузив которые постоянной или внешней временной нагрузками, получим искомые внутренние усилия. Используя метод начальных параметров [18], можно получить уравнения изгибающих моментов, поперечных сил, углов поворота и прогибов для поперечной полосы.

При учете крутящих моментов  $M_i$  необходима система из  $(2n+3)$  уравнений (8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{in}^{(z)} Z_n + \delta_{ib}^{(z)} Z_B + \delta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{1n}^{(M)} M_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(z)} Z_n + \delta_{nb}^{(z)} Z_B + \delta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nn}^{(M)} M_n + \Delta_{nP} = 0; \\ \theta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{in}^{(z)} Z_n + \theta_{ib}^{(z)} Z_B + \theta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{1n}^{(M)} M_n + \theta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \theta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{nn}^{(z)} Z_n + \theta_{nb}^{(z)} Z_B + \theta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nn}^{(M)} M_n + \theta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B - 1 = 0; \\ a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n + b Z_B - M_A + M_1 + \dots + M_n - a_i = 0; \\ \delta_{b1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{bn}^{(z)} Z_n + \delta_{bb}^{(z)} Z_B + \delta_{b1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{bn}^{(M)} M_n + \Delta_{bP} = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Методика определения единичных перемещений  $\delta_{ik}^{(z)}$ ,  $\delta_{ik}^{(M)}$  и единичных углов поворота  $\theta_{ik}^{(z)}$ ,  $\theta_{ik}^{(M)}$  изложена в работе автора [19].

## Выводы

Предложенный метод расчета жестких пластин применим для рассматриваемой системы при воздействии на нее любых поперечно приложенных нагрузок.

## Литература

1. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский; пер. с польск. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.
2. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебн. пособие / А.М. Масленников. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
3. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек. Ч.1 / А.В. Александров, Б.Я. Лашенков, Н.Н. Шапошников, В.А. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учебн. пособие / Ю.Н. Работнов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1979. – 744 с.
5. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела: учебн. пособие

- для вузов / Л.А. Толоконников. – М.: Высш. шк., 1979. – 318 с.
6. Суслов В.П. Строительная механика корабля и основы теории упругости / В.П. Суслов, Ю.П. Кочанов, В.Н. Спихтаренко. – Л.: Судостроение, 1972. – 720 с.
  7. Строительная механика корабля и теория упругости: учебник для вузов: в 2 т. Т. 2: Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек / В.А. Постнов, Д.М. Ростовцев, В.П. Суслов, Ю.П. Кочанов. – Л.: Судостроение, 1987. – 416 с.
  8. Шадурский В.П. Таблицы для расчета упругих прямоугольных плит: справочное пособие / В.П. Шадурский. – М.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
  9. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений (расчетно-теоретический) / под ред. А.А. Уманского. – М.: Госстройиздат, 1961. – 1940 с.
  10. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. – 2-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
  11. Вайнберг Д.В. Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания) / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – К.: Гос. изд-во л-ры по стр-ву и архитектуре УССР, 1959. – 1049 с.
  12. Кожушко В.П. Расчет пролетных стропильных балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вып. 36. – С. 118–122.
  13. Кожушко В.П. До розрахунку балочно-консольних прогінних будов на тимчасово навантаження / В.П. Кожушко // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1985. – Вип. 37. – С. 56–60.
  14. Островидов А.М. Таблицы для проектирования мостов: справочник / А.М. Островидов, И.А. Кузнецов. – М.: Автотрансиздат, 1959. – 536 с.
  15. Назаренко Б.П. Железобетонные мосты: учебник для студентов автомобильно-дорожных вузов / Б.П. Назаренко. – 2-е изд., допол. и перераб. – М.: Высш. школа, 1970. – 432 с.
  16. Поливанов Н.И. Проектирование и расчет железобетонных и металлических автодорожных мостов: учебное пособие для вузов / Н.И. Поливанов. – М.: Транспорт, 1970. – 516 с.
  17. Кожушко В.П. Моделювання прольотних будов мостів: монографія / В.П. Кожушко. – Харків: ХНАДУ, 2010. – 196 с.
  18. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1975. – 702 с.
  19. Кожушко В.П. Розрахунок нескінченних консольних смуг / В.П. Кожушко, С.А. Біндюг // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2002. – Вип. 64. – С. 125–127.
- Рецензент: А.Г. Кислов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.
- Статья поступила в редакцию 10 декабря 2014 г.
-