УДК 519.87

УЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГИХ 3D МОДЕЛЯХ

В.А. Богомолов, проф., д.т.н., В.К. Жданюк, проф., д.т.н.,
И.Л. Разницын, доц., к.ф.-м.н., С.В. Богомолов, инж.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Предложена математическая модель учета температурных деформаций и напряжений в сложных вязкоупругих 3D моделях.*

Ключевые слова: *температурные деформации, температурные напряжения, вязкоупругая модель, девиатор, шаровой тензор.*

ВРАХУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ТА НАПРУЖЕНЬ У В'ЯЗКОПРУЖНИХ 3D МОДЕЛЯХ

В.О. Богомолов, проф., д.т.н., В.К. Жданюк, проф., д.т.н.,
І.Л. Разніцин, доц., к.ф.-м.н., С.В. Богомолов, інж.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Запропоновано математичну модель урахування температурних деформацій та напружень у складних в'язкопружних 3D моделях.*

Ключові слова: *температурні деформації, температурні напруження, в'язкопружна модель, девіатор, шаровий тензор.*

ACCOUNT OF TEMPERATURE STRAINS AND STRESSES IN 3D VISCOELASTIC MODELS

V. Bogomolov, Prof., D. Sc. (Eng.), V. Zhdaniuk, Prof., D. Sc. (Eng.),
I. Raznitsyn, Assoc. Prof., Ph. D. (Phys.-Math.), S. Bogomolov, Eng.,
Kharkiv National Automobile and Highway University

Abstract. *A mathematical model for account of temperature strains and stresses in complex 3D viscoelastic models is offered.*

Key words: *temperature strains, temperature stresses, viscoelastic model, deviator, ball tensor.*

Введение

В вязкоупругих реологических системах, например таких, как асфальтобетон, значительную роль играют температурные напряжения и вызывающие их температурные деформации [1, 2]. Заметим, что эти напряжения становятся главной причиной процесса трещинообразования в холодное время эксплуатации дорожной одежды [3].

Анализ публикаций

В работах [4, 5, 7] предложено, при одновременном наличии механических напряжений и теплового эффекта, компоненты деформации в упругом теле записывать в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T; \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T\ ;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\ ;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}\ ;\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где σ_x, σ_y; σ_z – напряжения в точке по соответствующим осям декартовых координат; τ_{xy}, τ_{yz}; τ_{zx} – касательные напряжения [4]; ε_x; ε_y; ε_z – относительные деформации; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}\ ; \qquad (2)$$

α – коэффициент линейного теплового расширения

$$\Delta T = T - T_0, \qquad (3)$$

где T – температура тела в точке; T_0 – температура, при которой температурная деформация считается равной нулю.

В работах [6, 7] предложены методы расчета, позволяющие учитывать влияние температуры на характеристики ползучести материала. Эти методы предполагают предварительную оценку мгновенного модуля упругости $E(t,\ T)$ и ядра $K(t,\ \tau,\ T)$ наследственной зависимости деформаций от напряжений.

Цель и постановка задачи

Для практики инженерных расчетов таких вязкоупругих систем, как дорожная одежда, более удобными были бы методики, предложенные в [4, 7], связывающие необходимые математические модели с построением структурных реологических моделей. Теория последних достаточно подробно представлена в работах [4, 8-12].

Средняя деформация и напряжение

Как известно [4], под средними деформацией и напряжением понимается

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\ ; \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}. \qquad (5)$$

Зависимость между $\sigma_{\text{ср}}$ и $\varepsilon_{\text{ср}}$ для упругого тела [4, 5] определяется следующим образом [4]. Сложим три первых уравнения (1) и, после соответствующих преобразований, получим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{\left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - 3\alpha\Delta T\right]E}{1-2\mu}, \qquad (6)$$

откуда, с учетом (2), (4), (5) [4],

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ср}} &= \frac{E}{1-2\mu}(\varepsilon_{\text{ср}} - \alpha\Delta T) = \\ &= \frac{2G(1+\mu)}{1-2\mu}(\varepsilon_{\text{ср}} - \alpha\Delta T).\end{aligned} \qquad (7)$$

Напряжения

В правой части первого уравнения (1) добавляется и вычитается величина $\mu\sigma_x$, тогда для упругого тела можно получить [4]

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x E + \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - E\alpha\Delta T}{1+\mu}. \qquad (8)$$

Проделав подобные операции со вторым и третьим уравнениями, с учетом (2), (6), (7), из (1) получаем шесть известных в теории упругости [4] физических уравнений

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}} - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha\Delta T\right];$$

$$\sigma_y = 2G\left[\varepsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}} - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha\Delta T\right]; \qquad (9)$$

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}} - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha\Delta T\right];$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\ ;\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}\ ;\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\ .$$

Если из левой и правой частей первых трех уравнений (9) вычесть величину $\sigma_{\text{ср}}$ (7), то эти же уравнения приводятся к известной разновидности записи закона Гука [4]

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}})\ ;$$

$$\sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}})\ ;$$

$$\sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}})\ ; \qquad (10)$$

$$\tau_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}\ ;\ \tau_{yz} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz}\ ;\ \tau_{zx} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx},$$

где $\sigma_{\text{ср}}$, $\varepsilon_{\text{ср}}$ – определены в (7).

Таким образом, исходя из (10), напряженно-деформированное состояние такого тела удобнее всего представлять в виде [4]

$$T_{\text{н}} = D_{\text{н}} + D_{\text{ш}}, \tag{11}$$

где

$$T_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_x, \ \tau_{xy}, \ \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \ \sigma_y, \ \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \ \tau_{zy}, \ \sigma_z \end{pmatrix}$$ – тензор напряжений;

$$D_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}}, \ \tau_{xy}, \ \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \ \sigma_y - \sigma_{\text{ср}}, \ \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \ \tau_{zy}, \ \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{pmatrix}$$ – девиатор напряжений;

$$D_{\text{ш}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{ср}}, \ 0, \ 0 \\ 0, \ \sigma_{\text{ср}}, \ 0 \\ 0, \ 0, \ \sigma_{\text{ср}} \end{pmatrix} = J\sigma_{\text{ср}}$$ – шаровой тензор;

$$J = \begin{pmatrix} 1, \ 0, \ 0 \\ 0, \ 1, \ 0 \\ 0, \ 0, \ 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица;

$$T_{\text{д}} = D_{\text{д}} + T_{\text{д}}^{0}; \tag{12}$$

где

$$T_{\text{д}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x, \ \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\lambda_{yx}, \ \varepsilon_y, \ \frac{1}{2}\lambda_{yz} \\ \frac{1}{2}\lambda_{zx}, \ \frac{1}{2}\gamma_{zy}, \ \varepsilon_z \end{pmatrix}$$ – тензор деформаций;

$$D_{\text{д}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}, \ \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\lambda_{yx}, \ \varepsilon_{\text{y}} - \varepsilon_{\text{ср}}, \ \frac{1}{2}\lambda_{yz} \\ \frac{1}{2}\lambda_{zx}, \ \frac{1}{2}\gamma_{zy}, \ \varepsilon_{\text{z}} - \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix}$$ – девиатор деформаций;

$$T_{\text{д}}^{0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{ср}} \ 0, \ 0 \\ 0 \ \varepsilon_{\text{ср}} \ 0 \\ 0 \ 0 \ \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix} = \varepsilon_{\text{ср}} J$$ – шаровой тензор деформаций.

Таким образом, для рассматриваемого случая закон Гука может быть записан в обобщенном виде [4]

$$D_H = 2GD_{\text{д}}. \tag{13}$$

По виду выражения (13) напрашивается вывод о том, что для построения зависимостей напряжений от деформаций у упругих тел, с учетом термических деформаций, упругий структурный элемент просто заменяется на упруго-термический, представленный на рис. 1.

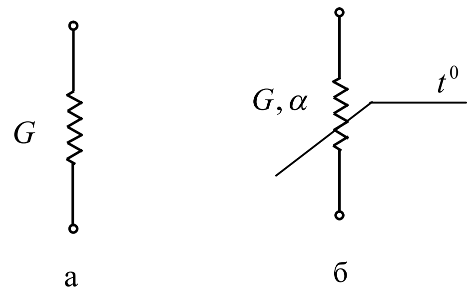


Рис. 1. Упругий и упруго-термический элементы в структурных моделях

Возникает вопрос: возможна ли такая же замена в вязкоупругих схемах, как это показано на рис. 2, а, б?

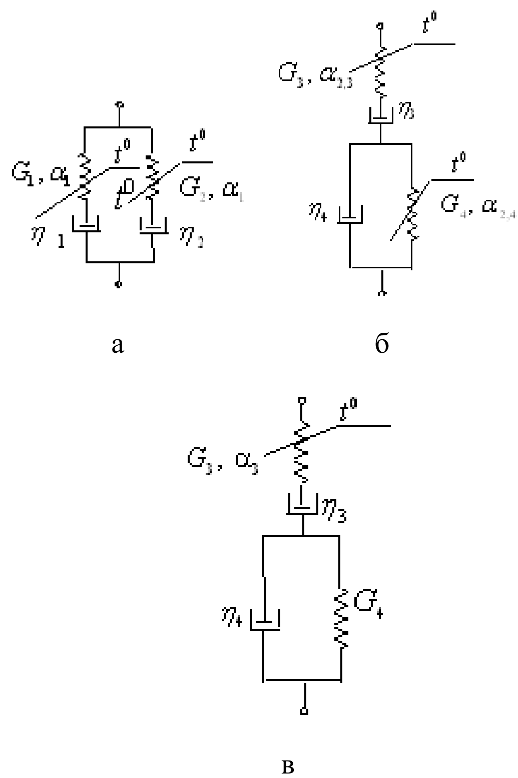


Рис. 2. Структурные термовязкоупругие схемы: а – обобщенная модель Максвелла; б, в – модель Бюргерса

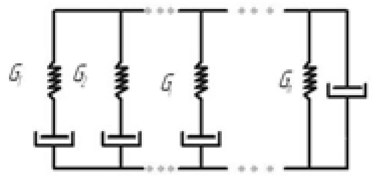
Очевидно, что последовательные и параллельные соединения упруго-термических элементов (рис. 2, а, б) при одинаковых коэффициентах теплового расширения (например, $\alpha_1 = \alpha_{2,3} = \alpha_{2,4}$) приведут к различным суммарным деформациям. Значит, применяя, например, схему Бюргерса, необходимо либо соглашаться с неравенством $\alpha_{2,3} \neq \alpha_{2,4}$, либо использовать как упругие, так и упруго-термические элементы (рис. 2, в).

Второй способ лишен универсальности и может привести к значительным затруднениям при математическом моделировании и экспериментальной оценке α_1, α_2 и т.д.

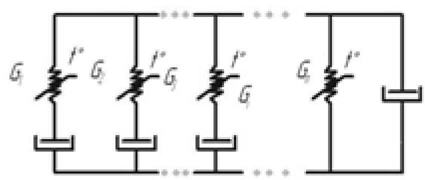
Выводы

Учитывая выше сказанное, реологическую термовязкоупругую модель можно создавать в следующей последовательности:

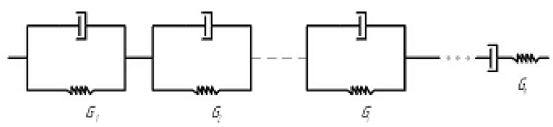
1. Структурную вязкоупругую модель необходимо привести либо к обобщенной модели Максвелла (рис. 3, а), либо к обобщенной модели Кельвина (рис. 3, в), в соответствии с выводами работы [9].



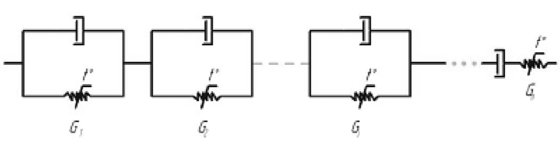
а



б



в



г

Рис. 3. Обобщенные модели Максвелла и Кельвина

2. Упругие элементы в схеме по п. 1 заменить на термовязкоупругие (рис. 3, б, г) [13].

3. В случае обобщенной схемы Максвелла (рис. 3, б) принимаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = \ldots = \alpha_n = \alpha, \quad (14)$$

где α – обозначено в (1); α_1, α_2, α_n – коэффициенты линейного теплового расширения соответствующих упругих элементов (рис. 3, б).

4. В случае обобщенной схемы Кельвина (рис. 3, г), принимаются допущения:
– сумма тепловых деформаций во всех термоупругих элементах равна суммарной термоупругой деформации;
– напряжения от термо-упругих деформаций во всех термоупругих элементах равны.

Из (1), (9) можно получить соотношения

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_n = \alpha; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &G_1 \frac{1+\mu_1}{1-2\mu_1}\alpha_1 = G_2 \frac{1+\mu_2}{1-2\mu_2}\alpha_2 = \\ &= \ldots G_i \frac{1+\mu_i}{1-2\mu_i}\alpha_i = \ldots G_n \frac{1+\mu_n}{1-2\mu_n}\alpha_n, \end{aligned} \quad (16)$$

где μ_i – коэффициент поперечной деформации в i-м упругом элементе схемы (рис. 3, г).

Откуда

$$\alpha_j = \alpha \cdot \frac{\frac{1}{G_j} \cdot \frac{1-2\mu_j}{1+\mu_j}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1-2\mu_i}{(1+\mu_i)G_i}}. \quad (17)$$

5. Дифференциальные зависимости деформаций от напряжений для схем по п. 2 могут быть получены в соответствии с рекомендациями работы [10].

6. Решения линейных дифференциальных уравнений могут быть получены в соответствии с [11], учитывая, что $\sigma_{ср}$ и $\varepsilon_{ср}$ определяются в (4)–(7).

Литература

1. Мозговой В.В. Научные основы обеспечения температурной трещиностойкости

асфальтобетонных покрытий: дисс... доктора техн. наук: 05.22.11 / В.В. Мозговой. – К., 1996. – 344 с.
2. Радовский Б.С. Проектирование дорожных одежд для движения большегрузных автомобилей / Б.С. Радовский, А.С. Супрун, И.И. Козаков. – К.: Будівельник, 1989. – 168 с.
3. Сюньи Г.К. Исследование трещинообразования в асфальтобетонных покрытиях под влиянием температурных напряжений: дис. … канд. техн. наук / Сюньи Георгий Камилович. – Харьков, 1940. – 128 с.
4. Безруков Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безруков. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
5. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1965. – 204 с.
6. Ржаницын А.Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.
7. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
8. Богомолов В.А. Простейшие звенья линейной пространственной реологической модели асфальтобетона / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Автомобильный транспорт: сб. науч. тр. – 2010. – Вып. 27. – С. 157–162.
9. Богомолов В.А. Универсальный метод составления линейных вязкоупругих структурных моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Автомобильный транспорт: сб. науч. тр. – 2011. – Вып. 28. – С. 125–131.
10. Богомолов В.А. Общий метод получения дифференциальных зависимостей деформаций от напряжений для линейных реологических 3D моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2011. – Вып. 52. – С. 54–59.
11. Богомолов В.А. Общий подход к решению линейных трехмерных вязкоупругих обобщенных моделей Максвелла / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2011. – Вып. 54. – С. 153–158.
12. Богомолов В.А. Общее решение для четырехэлементных, линейных, вязкоупругих 3D моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Вестник ХНАДУ: сб науч. тр. – 2011. – Вып. 29. – С. 43–47.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности; пер. с англ. / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Рецензент: В.К. Жданюк, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 15 июня 2015 г.