

УДК 624.21

ГИБКАЯ ПЛИТА, ОДНА СТОРОНА КОТОРОЙ ЗАЩЕМЛЕНА, А ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ЕЙ СТОРОНА ОПИРАЕТСЯ НА ДВЕ СТОЙКИ, УСТАНОВЛЕННЫЕ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет**

***Аннотация.** Изложены основные положения определения внутренних усилий в гибкой плите, одна сторона которой защемлена, а противоположная ей сторона имеет два точечных опирания в угловых точках. Предложенный метод расчета позволяет решать поставленную задачу при воздействии на плиту любых внешних поперечных нагрузок.*

***Ключевые слова:** поперечная полоса, продольная полоса, система уравнений, смешанный метод строительной механики, фиктивное защемление.*

ГНУЧКА ПЛИТА, ОДНА СТОРОНА ЯКОЇ ЗАТИСНЕНА, А ПРОТИЛЕЖНА ЇЙ СТОРОНА ОПИРАЄТЬСЯ НА ДВА СТОЯКИ, ВСТАНОВЛЕНІ В КУТОВИХ ТОЧКАХ

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет**

***Анотація.** Викладено основні положення визначення внутрішніх зусиль у гнучкій плиті, одна сторона якої затиснена, а протилежна їй сторона має два точкові опирання у куткових точках. Запропонований метод розрахунку дозволяє розв'язувати поставлену задачу при дії на плиту будь-яких зовнішніх поперечних навантажень.*

***Ключові слова:** поперечна смуга, поздовжня смуга, система рівнянь, змішаний метод будівельної механіки, фіктивне защемлення.*

FLEXIBLE PLATE ONE SIDE OF WHICH IS RESTRAINED AND THE OPPOSITE ONE RESTS ON TWO LEGS SET AT THE CORNER POINTS

**V. Kozhushko, Prof., D. Sc. (Eng.),
Kharkiv National Automobile and Highway University**

***Abstract.** The main provisions of the definition of internal forces in the flexible plate one side of which is restrained, and the opposite side has two bearing points at corner points are substantiated. The proposed design method makes it possible to solve the task set, taking into account the influence of any external transverse loads.*

***Key words:** horizontal line, longitudinal strip, system of equations, mixed method of structural mechanics, fictitious restrain.*

Введение

Плиты с рассматриваемыми условиями опирания их граней на опоры встречаются для устройства козырьков при входе в какие-либо здания и сооружения. Для их рацио-

нального проектирования необходимо иметь картину распределения внутренних усилий в плите, возникающих при воздействии различных внешних поперечных нагрузок. Эти вопросы еще недостаточно исследованы.

Анализ публикаций

Количество публикаций по расчету рассматриваемых плит незначительно. Можно обратиться к таблицам для расчета упругих прямоугольных плит, составленным В.Д. Шадурским [1]. Эти таблицы составлены только для отдельных видов внешних поперечных нагрузок: сплошной равномерно распределенной, линейной (распределенной) нагрузки, приложенной по стороне, опирающейся на стойки, линейной нагрузки, приложенной по свободным граням плиты, и распределенных моментов, действующих по сторонам плиты. При этом таблицы составлены только при величине коэффициента Пуассона материала плиты $\nu = 0$. Правда, здесь предложена и методика перерасчета внутренних усилий для плит, выполненных из материала с иными коэффициентами Пуассона. У А.С. Калманюка [2, 3], С.П. Тимошенко [4, 5], П.Ф. Папковича [6] и К.А. Китовара [7] рассмотрены пластинки при точечном опирании плиты в угловых точках, нагруженных сплошной распределенной нагрузкой или сосредоточенной силой, приложенной в центре плиты.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что задача определения напряженно-деформированного состояния этих пластин решена только для узкого класса внешних поперечных нагрузок, прилагаемых к системе. Для иных нагрузок решений нет.

Цели и постановка задачи

Целью статьи является анализ единого метода расчета рассматриваемых пластин.

Реализация задачи

Пластинка разрезается на систему продольных (скажем, вдоль стороны l) и поперечных (вдоль короткой стороны) полос (рис.1). Количество продольных полос желательно назначать не менее 10. Крайние продольные полосы (левая и правая, или первая и n -я) представляют собой полосы, один конец которых зашпелен, а второй – шарнирно опирается на опору. Все остальные полосы – это консольные полосы. Поперечную полосу шириной $1m$ следует вырезать в том сечении по длине пролета l (рис.1), в котором планируется определять напряженно-деформированное состояние пластины. Поперечная

полоса рассматривается как неразрезная многопролетная полоса на упруго-оседающих опорах, роль которых играют продольные полосы. Для определения вертикальных усилий, передаваемых поперечной полосой на продольные, предлагается использовать смешанный метод строительной механики, для чего на левом конце поперечной полосы вводится фиктивное защемление.

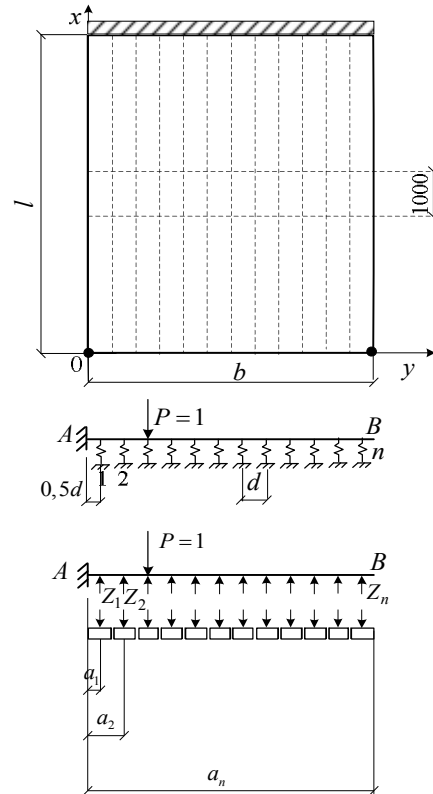


Рис.1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

Неизвестные вертикальные силы Z_i от поперечной внешней загрузки, передаваемые поперечной полосой на продольные полосы, определяются в результате решения системы уравнений (1). Количество уравнений в системе равно $(n + 2)$, где n – количество продольных полос. Еще два неизвестных – это угол поворота ϕ_A и прогиб y_A фиктивной заделки поперечной полосы.

$$\begin{cases} \delta'_{11}Z_1 + \dots + \delta'_{m1}Z_2 + 0,5\phi'_A + y'_A + \Delta'_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta'_{n1}Z_1 + \dots + \delta'_{mn}Z_2 + (n - 0,5)\phi'_A + y'_A + \Delta'_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n - 1 = 0; \\ 0,5Z_1 + 1,5Z_2 + \dots + (n + 0,5)Z_n - \frac{a_i}{d} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где δ'_{ik} – увеличенные в $1/y$ раз единичные перемещения поперечной полосы; ϕ'_A и y'_A – увеличенные в $1/y$ раз соответственно угол поворота и прогиб фиктивного защемления поперечной полосы в точке A ; Δ'_{ip} – увеличенные в $1/y$ раз свободные члены, или перемещения от внешней нагрузки.

Коэффициенты при угле поворота ϕ'_A будут равны 0,5; 1,5 ... ($n-0,5$) тогда, когда продольные полосы имеют одинаковую ширину $d = b/n$, где b – ширина полосы. Если ширина продольных полос будет неодинаковой, эти коэффициенты не будут кратными 0,5; y – прогиб какой-то продольной консольной полосы от единичной распределенной нагрузки $q=1$ в том сечении по ее длине, в котором вырезана поперечная полоса.

Методика определения увеличенных в $1/y$ раз единичных перемещений δ'_{ik} и увеличенных свободных членов Δ'_{ip} заложена в работе [8]

$$\delta'_{ik} = \alpha w_{ik}; \quad (2)$$

$$\delta'_{ii} = \beta + \alpha w, \quad (3)$$

где w_{ik} – перемещения поперечной полосы в точке i от единичной силы $Z_k = 1$, приложенной в точке k . При определении w_{ik} поперечная полоса рассматривается как защемления на левом конце полосы; β – соотношение прогибов y_i i -й продольной полосы и прогиба y $\beta = \frac{y_i}{y}$; α – показатель гибкости системы [9]

$$\alpha = \frac{d^3(1-\nu_{np}^2)}{6 \cdot E_{np} I_{np} \cdot y}, \quad (4)$$

где d – расстояние между осями продольных полос (ширина продольной полосы, рис. 1); ν_{np} – коэффициент Пуассона материала поперечной полосы; $E_{np} I_{np}$ – изгибная жесткость поперечной полосы.

Рассмотрим методику определения прогиба продольной полосы y . За основу примем консольную продольную полосу (рис. 2).

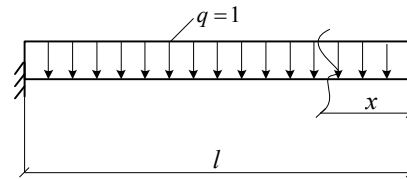


Рис. 2. Расчетная схема средней продольной полосы, используемая для определения прогиба y

Прогиб в сечении x от единичной равномерно распределенной нагрузки $q = 1$

$$y = \frac{l^4(1-\nu_{np}^2)}{24 E_{np} I_{np}} \left[6 \cdot \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 - 4 \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 + \frac{(l-x)^4}{l^4} \right], \quad (5)$$

где l – пролет продольной полосы; ν_{np} – коэффициент Пуассона материала продольной полосы; $E_{np} I_{np}$ – изгибная жесткость материала поперечной полосы.

Если умножить уравнения (1 ÷ n) системы (1) на величину $1/y$, то во всех уравнениях, кроме уравнений 1 и n (уравнений, описывающих работу крайних продольных полос, которые опираются на стойки) величина $\beta = 1$. Для уравнений 1 и n , которые описывают работу крайних продольных полос, $\beta \neq 1$. Её следует определять как отношение прогиба крайней и средней полос, т.е.

$$\beta = \frac{y_i}{y}, \quad (6)$$

где y_i – прогиб крайней продольной полосы от единичной распределенной нагрузки $q=1$. Рассмотрим эту полосу как элемент, левый конец которого защемлен, а правый шарнирно оперт (рис. 3). Прогиб продольной полосы в сечении x

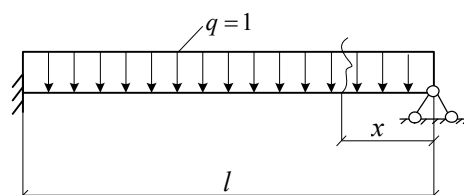


Рис. 3. Расчетная схема крайней полосы, используемая для определения прогиба y_i

$$y_i = \frac{l^4(1-v_{\text{пр}}^2)}{24 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) - \frac{l^3(1-v_{\text{пр}}^2)}{48 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}} \cdot x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (7)$$

Для примера определим показатель α и величину β для некоторых сечений продольной полосы, как это показано на рис. 1. Определим прогиб консольной полосы при $x = 0,5l$. Подставив $x = 0,5l$ в формулу (5), получим

$$y = \frac{17l^4(1-v_{\text{пр}}^2)}{384 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}} \quad (8)$$

Если плита ортотропна, то $v_{\text{пр}} = v_{\text{п}}$. Тогда показатель

$$\alpha = \frac{64d^3 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}}{17l^4 E_{\text{п}} I_{\text{п}}}. \quad (9)$$

Определим прогиб крайней продольной полосы по формуле (7), подставив $x = 0,5l$

$$y_i = \frac{l^4(1-v_{\text{пр}}^2)}{192 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}}. \quad (10)$$

Тогда для крайних продольных полос (уравнение 1 и n системы (1))

$$\beta = \frac{y_i}{y} = \frac{2}{17} \approx 0,11765.$$

Вырежем поперечную полосу в сечении $x \approx 0$, т.е. над стойками, на которые опирается плита. Подставим в формулу (5) $x = 0$.

Прогиб консольно-продольной полосы

$$y = \frac{l^4(1-v_{\text{пр}}^2)}{8 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}}. \quad (11)$$

Показатель

$$\alpha = \frac{4d^3 E_{\text{пр}} I_{\text{пр}}}{3l^4 E_{\text{п}} I_{\text{п}}}. \quad (12)$$

Прогиб y_i крайних полос при $x = 0$ равен нулю, т.е. в уравнениях 1 и n системы (1) при определении δ'_{ii} следует подставить $\beta = 0$, а в остальные уравнения – $\beta = 1$.

Для упрощения решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния плиты нами предлагается строить линии влияния усилий Z_i , передаваемых поперечной полосой на продольные полосы. Для этого следует загрузить поперечную полосу над i -й продольной полосой единичной сосредоточенной нагрузкой $p = 1$ так, как это показано на рис. 1. Определив свободные члены Δ'_{ip} от нагрузки $p = 1$ и решив систему уравнений (1), получим ординаты линий влияния усилий Z_i для i -й продольной полосы. Далее, загрузив линию влияния внешней нагрузкой по общим правилам строительной механики, получим долю внешней нагрузки, которая приходится на i -ю продольную полосу.

При расчете пролетных строений автодорожных мостов эта доля называется коэффициентом поперечной установки (КПУ), а в последние годы – коэффициентом поперечного распределения (КПР). Теперь, рассматривая продольную полосу как консольную полосу для полос $[2 \div (n-1)]$, или как полосу, рассчитываемую по схеме, приведенной на рис. 3 (для крайних продольных полос), загруженную внешней нагрузкой, определим её внутренние усилия и деформации, учитывая, что на неё приходится не вся внешняя нагрузка, а часть её, которая определяется путем умножения всей внешней нагрузки на КПУ.

Не представляет труда и построение линий влияния изгибающих моментов и поперечных сил в поперечной полосе [9].

Если плита имеет переменную толщину вдоль короткой стороны b , то решение задачи существенно не усложняется. Следует плиту разрезать на продольные полосы так, чтобы в пределах её ширины d она имела постоянную жесткость. Несколько усложняется определение единичных перемещений поперечной ступенчатой полосы, однако нами выведены формулы для определения этих перемещений [10].

При наличии продольных ребер продольные полосы должны включать в себя эти ребра, а сама методика расчета остается прежней.

Вывод

Предложенный метод расчета позволяет определять напряженно-деформированное состояние как изотропных, так и ортотропных плит, при воздействии на них любых внешних поперечно приложенных нагрузок.

Литература

1. Шадурский В.П. Таблицы для расчета упругих прямоугольных плит: справочное пособие / В.П. Шадурский. – М.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
2. Калманюк А.С. Строительная механика пластинок / А.С. Калманюк. – М.: Машстройиздат, 1950. – 304 с.
3. Калманюк А.С. Расчет пластинок: справочное пособие / А.С. Калманюк. – М.: Госстройиздат, 1959. – 212 с.
4. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки: пер. с англ. / С.П. Тимошенко. – М.-Л.: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теоретических литератур, 1948. – 460 с.
5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. – 2-е, стереотипное изд. – М.: Наука, 1966. – 616 с.
6. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Ч.П. Сложный изгиб и устойчивость стержней. – Л.: Государственное союзное изд-во судостроительной промышленности, 1941. – 960 с.
7. Китовар К.А. Изгиб тонких прямоугольных плит / К.А. Китовар // Расчет пространственных конструкций: сб. – 1951. – Вып. 2. – С. 441–467.
8. Кожушко В.П. Расчет пролетных строений балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вып. 36. – С. 118–122.
9. Кожушко В.П. Моделивання прольотних будов мостів: монографія / В.П. Кожушко. – Х.: ХНАДУ, 2010. – 196 с.
10. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок на упругооседающих опорах / В.П. Кожушко // Науковий вісник буд-ва. – 2009. – Вип. 17. – С. 146–150.

Рецензент: А.Г. Кислов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2015 г.