

УДК 515.2

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВИХ ТРАЄКТОРІЙ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ 2D-ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

О.М. Семків, к.т.н., ст.н.сп.,
Національний університет цивільного захисту України, м. Харків

Анотація. Розроблено метод визначення засобами диференціального числення та комп'ютерної графіки геометричної форми особливої траєкторії переміщення по площині вантажу 2d-пружинного маятника залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, коефіцієнта жорсткості пружини та початкових умов виникнення коливань.

Ключові слова: 2d-пружинний маятник, інтегральна крива, фазова траєкторія, коефіцієнт жорсткості пружини, комп'ютерна графіка.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОЛЕБАНИЯ ГРУЗА 2D-ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

О.М. Семкив, к.т.н., ст.н.с.,
Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков

Аннотация. Разработан метод определения средствами дифференциального исчисления и компьютерной графики геометрической формы особой траектории перемещения по плоскости груза 2d-пружинного маятника в зависимости от массы груза, начальной длины пружины в ненагруженном состоянии, коэффициента жесткости пружины и начальных условий возникновения колебаний.

Ключевые слова: 2d-пружинный маятник, интегральная кривая, фазовая траектория, коэффициент жесткости пружины, компьютерная графика.

THE METHOD OF DETERMINING SPECIAL LOAD OSCILLATION TRAJECTORIES OF THE 2D-SPRING PENDULUM

O. Semkiv, Ph. D. (Eng.), Sr. Researcher,
National University of Civil Protection of Ukraine

Abstract. A method for determining a geometric shape of a special trajectory of movement of the 2D-spring pendulum weight on the path by the means of differential calculus and computer graphics, depending on the load weight, the initial length of the spring in the unloaded condition, the coefficient of spring rigidity and the initial conditions of oscillation occurrence is developed.

Key words: 2D-spring pendulum, integral curve, phase trajectory, spring rigidity coefficient, computer graphics.

Вступ

Пружинним маятником називають коливальну систему з механічною пружиною (або замінником її функцій – деяким еластичним матеріалом), що закріплена одним кінцем

стаціонарно, а на іншому кінці знаходиться вантаж певної маси. При цьому заведено вважати, що вантаж коливається виключно завдяки зусиллям пружини – як у бік її стиснення, так і у бік її розтягнення, і що конструктивно забезпечується поперечне «незги-

нання» пружини. Звичайно пружину розглядають за умови нерухомості її осі. Тобто зазначене «одновимірне» коливання пружини здійснюється переважно завдяки еластичним властивостям матеріалу, з якого її виготовлено.

Але конструкторів може зацікавити [1–3] і «двовимірне» коливання тіла пружини у вертикальній площині xOy навколо стаціонарно закріпленого кінця, подібно до коливання традиційного математичного маятника (рис. 1).

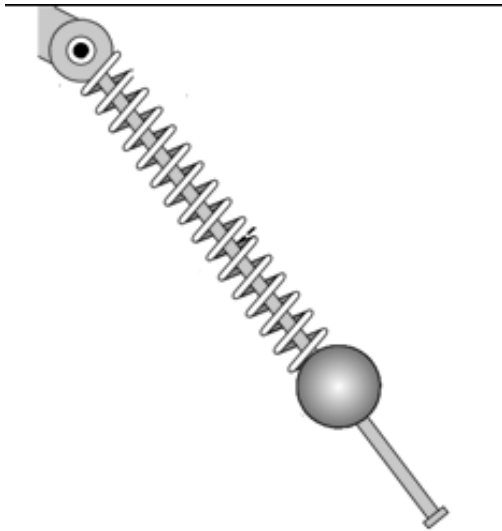


Рис. 1. Схема $2d$ -пружинного маятника

Далі зазначену коливальну конструкцію будемо називати $2d$ -пружинним маятником (тобто такою, яка здійснює коливання у площині). Траєкторією коливання вантажу назвемо слід на площині, одержаний в результаті його переміщення. Особливою траєкторією вважатимемо таку лінію, геометрична форма якої відрізнятиметься деякою закономірністю порівняно з траєкторіями переміщення вантажу в результаті хаотичних коливань $2d$ -пружинного маятника.

Аналіз публікацій

Доцільність дослідження $2d$ -пружинних маятників виникла у зв'язку з виявленими можливостями їх «нестандартних» використання як у теоретичному плані, так і на практиці [1–5]. Дійсно, відомі зв'язки пружинних маятників з фазовими траєкторіями динамічних систем на поверхні тора, а також із теорією математичних більярдів [7]. У роботі [10] наведено розрахунки коливань $2d$ -пружинного маятника, але без аналізу впливу його

параметрів. Крім того, диференціальні рівняння коливань $2d$ -пружинних маятників подібні до рівнянь задач «хижак–жертва» [6], що відкриває напрям досліджень. При зазначених коливаннях цікавість викликає геометрична форма траєкторії переміщення по площині xOy вантажу [8–10]. Ця траєкторія ілюструє розв'язок відповідних диференціальних рівнянь (1), що описують коливання $2d$ -пружинного маятника. Одержані геометричні форми траєкторій переміщення по площині вантажу допоможуть ілюструвати розв'язки певних задач (наприклад, задачі «хижак–жертва» [6]), і їх розгляд дозволить аналізувати (подібно до того, як у теорії коливань застосовують фігури Ліссажу) характер розв'язків у суміжних за змістом задачах.

Мета і постановка завдання

Метою роботи є розробка методу визначення засобами диференціального числення та комп'ютерної графіки геометричної форми особливої траєкторії переміщення по площині вантажу $2d$ -пружинного маятника залежно від його параметрів, де головним параметром буде значення коефіцієнта жорсткості k пружини. На характер коливань $2d$ -пружинного маятника впливатимуть такі параметри: маса вантажу, початкова довжина пружини у невантаженому стані, коефіцієнт жорсткості пружини і початкові умови ініціювання коливань – такі як початковий кут відхилення осі пружини, початкова швидкість кута відхилення $2d$ -пружинного маятника та швидкість початкового подовження тіла пружини. Для практичних впроваджень необхідно розробити метод визначення набору значень цих параметрів, які б забезпечили особливі траєкторії переміщення вантажу.

Моделювання коливань $2d$ -пружинного маятника

Описувати коливання $2d$ -пружинного маятника будемо [9] за допомогою системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -\frac{2\frac{d}{dt}L(t)\frac{d}{dt}\theta(t) + 9,81\sin(\theta(t))}{L(t) + L_0}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}L(t) = (L(t) + L_0)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 -$$

$$-\frac{kL(t)}{m} + 9,81 \cos(\theta(t)),$$

де $\theta(t)$ – кут відхилення осі маятника від вертикалі; k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса маятника; $L(t)$ – функція зміни довжини пружини; L_0 – початкова довжина маятника. Крім того, необхідно задати умови: початковий кут $\theta(0)$ відхилення тіла маятника; початкову швидкість $D\theta(0)$ відхилення тіла пружини; початкову швидкість $DL(0)$ подовження тіла пружини, а також межі часу інтегрування.

Фіксуємо значення всіх параметрів, що впливають на характер коливань, крім одного (позначимо його як p), який назвемо головним і який буде змінюватися у наперед визначених межах.

Для певного значення p систему рівнянь (1) розв'яжемо чисельним методом Рунге-Кутти. Це дозволяє у фазовому просторі одержати послідовність точок з координатами $\{L(t), \dot{L}(t), t\}$ або $\{\theta(t), \dot{\theta}(t), t\}$, які визначатимуть певну інтегральну криву розв'язку системи (1) (тут крапкою позначено похідну за t). Ортогональною проекцією інтегральної кривої з фазового простору на фазову площину буде фазова траєкторія [11, 12].

На рис. 2 наведено зображення інтегральної кривої та фазової траєкторії, які в загальному випадку матимуть хаотичний характер.

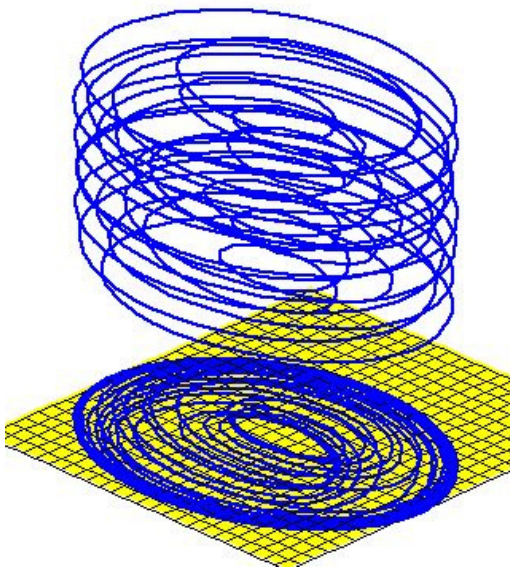


Рис. 2. Інтегральна крива та фазова траєкторія в загальному випадку

За зміни значення головного параметра p мають змінюватися як форма інтегральної кривої, так і форма фазової траєкторії. Необхідно визначити таке значення p , за якого фазова траєкторія набуде вигляду регулярної кривої.

Взаємопроеціюючими точками інтегральної кривої назвемо такі її точки, ортогональні проекції яких на фазову площину матимуть однакові (або близькі відносно точності обчислень) координати.

Під критичним значенням параметра p вважатимемо таке, коли інтегральна крива набуде форми, за якою її точки стануть взаємопроеціюючими. Наочно критичне значення параметра виявляється у тому, що фазова траєкторія матиме вигляд регулярної кривої (рис. 3).

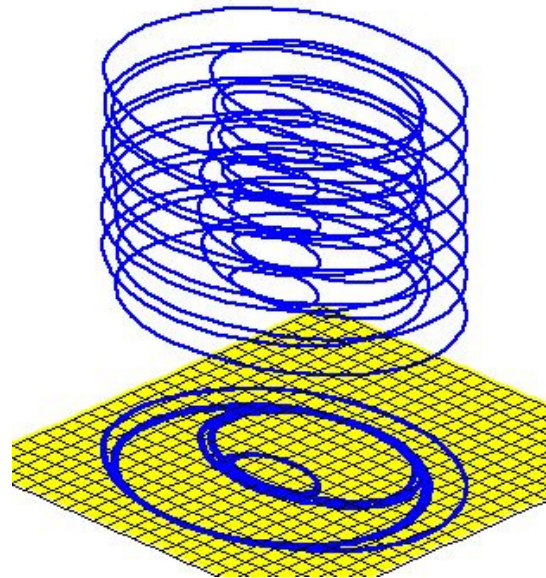


Рис. 3. Інтегральна крива та фазова траєкторія у випадку критичного значення головного параметра p

За результатами відтворення коливань $2d$ -пружинного маятника критичне значення k_0 відіб'ється в особливій траєкторії форми коливання вантажу на площині xOy .

У загальному випадку пропонується такий алгоритм пошуку особливих траєкторій.

Крок 1. Обираємо поточне значення p і шляхом розв'язання системи рівнянь (1) одержуємо поточкове подання інтегральної кривої системи (1).

Крок 2. Будуємо поточкове зображення фазової траєкторії як проєкції на фазову площину інтегральної кривої.

Крок 3. Здійснюємо оцінку кількості точок на фазовій площині, за умови їх можливих суміщень при проєціюванні; ця кількість точок відповідатиме поточному значенню p .

Крок 4. Починаючи з кроку 2 виконуємо у циклі обчислення для усіх необхідних значень головного параметра p .

Крок 5. Залежно від значення параметра p формуємо функцію $Np(p)$ кількості точок на фазовій площині, які визначають зображення фазової траєкторії, та обчислюємо екстремуми цієї функції.

Крок 6. За визначеними критичними значеннями параметра p перевіряємо «дію» $2d$ -маятника шляхом побудови засобами комп'ютерної графіки сліду від коливання вантажу.

Далі узагальнений алгоритм детально проілюструємо на прикладі побудови сліду від коливання вантажу $2d$ -маятника залежно від головного параметра k – коефіцієнта жорсткості пружини.

Наприклад, розв'яжемо систему рівнянь (1) з параметрами $m = 1$; $L_0 = 1$ і початковими умовами: початковий кут $\theta(0) = 0$ відхилення; початкова швидкість $D\theta(0) = 0,5$ відхилення тіла пружини; початкова швидкість $DL(0) = 0$ подовження тіла пружини; час t інтегрування обрано у межах $0-8\pi$. Параметр k змінювався на інтервалі $15 \leq k \leq 35$, який було розділено на $S=250$ частин. Значення всіх обраних параметрів взято в умовних величинах.

Для визначення взаємопроєціюючих точок інтегральної кривої було побудовано послідовність анімаційних зображень фазових траєкторій на фазовій площині, здійснених засобами комп'ютерної графіки.

Наочно процес вибору критичного значення параметра має вигляд на фазовій площині «як наведення на різкість» зображення, утвореного хаотично переплетеними фазовими траєкторіями (порівняти рис. 2 і 3).

Оскільки розв'язок диференціальних рівнянь одержано чисельним методом, то інтегральна крива складатиметься з окремих точок. На фазовій площині проєкції цих точок можуть співпадати, тому фазову траєкторію в момент виявлення критичного значення k_0 зображатиме менша кількість точок. На базі розробленого алгоритму для середовища Maple було складено програму обчислення кількості точок, які утворюють зображення фазової траєкторії на фазовій площині за умови врахування можливих суміщень точок проєкції.

Для цього було залучено команди пакета ImageTools для формування та аналізу точкових зображень проєкцій на фазовій площині. Оцінка виражається значеннями побудованої функції $Np(k)$. Критичне значення k_0 визначається мінімальною кількістю точок фазової траєкторії, що на графіку функції $Np(k)$ має проявлятися як екстремум (мінімум).

У результаті виконаних обчислень одержано графік $Np(k)$ функції зміни кількості точок-проєкцій на фазовій площині (рис. 4). Ця функція має глобальний мінімум при $k = 18,12$, а також множину локальних мінімумів, серед яких два будуть яскраво вираженими при $k = 23,0$ і $k = 28,84$.

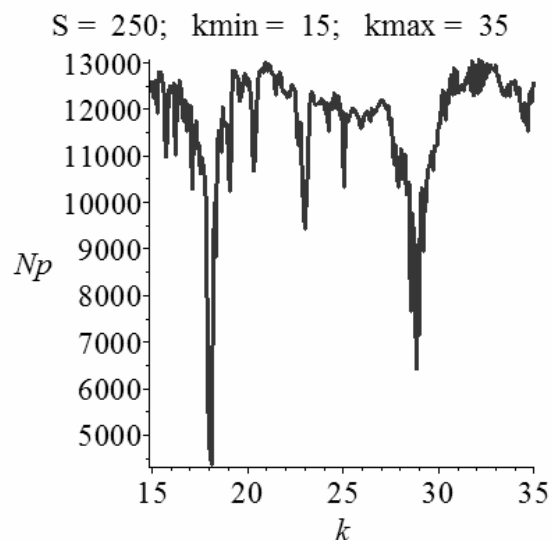


Рис. 4. Графік функції від k зміни кількості точок на фазовій площині

На рис. 5–7 наведено відповідні цим випадкам інтегральні криві та їх фазові траєкторії. На кожному з рисунків 5–7 зображено відповідно до знайденого значення k фазову траєкторію:

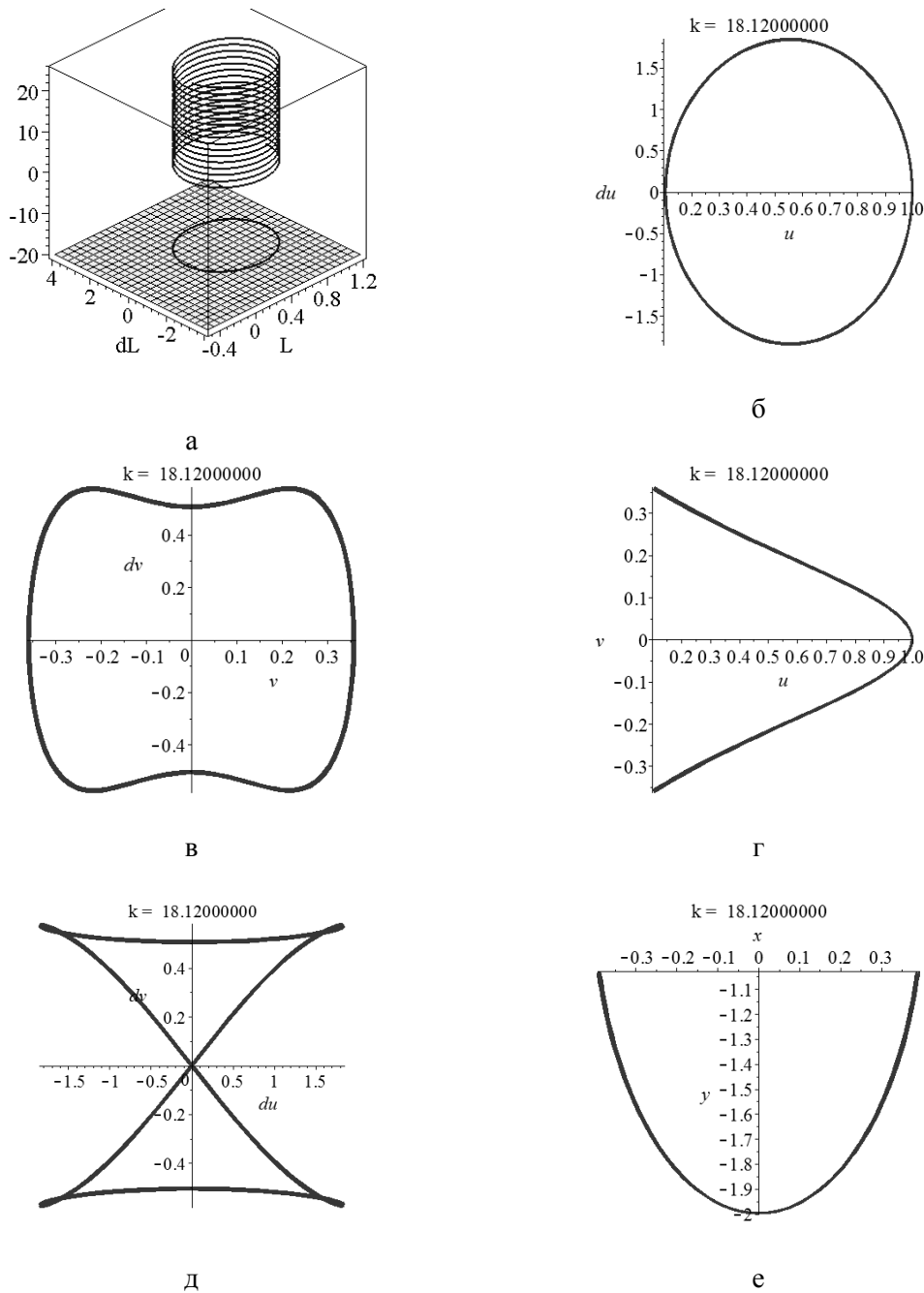


Рис. 5. Фазові траєкторії для «особливого» значення параметра $k=18,12$

- а) як проекцію інтегральної кривої у фазовому просторі $\{L(t), \dot{L}(t), t\}$;
 б) на площині $\{L(t), \dot{L}(t)\}$;
 в) на площині $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$;
 г) на площині $\{\theta(t), L(t)\}$;
 д) на площині $\{\dot{L}(t), \dot{\theta}(t)\}$,
 а також
 е) траєкторію коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника на площині xOy .

Для побудови на площині xOy особливих траєкторій коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника за обраних значень параметрів $m=1, L_0=1, \theta(0) = 0, D\theta(0) = 0,5, DL(0) = 0$, а також за визначеного значення $k = 28,85$ необхідно розв'язати систему рівнянь (1).

Це зручно здійснити за допомогою Maple-оператора `dsolve`, де через `deg1` і `deg2` позначено відповідні диференціальні рівняння системи (1). На рис. 8 наведено текст Maple-програми.

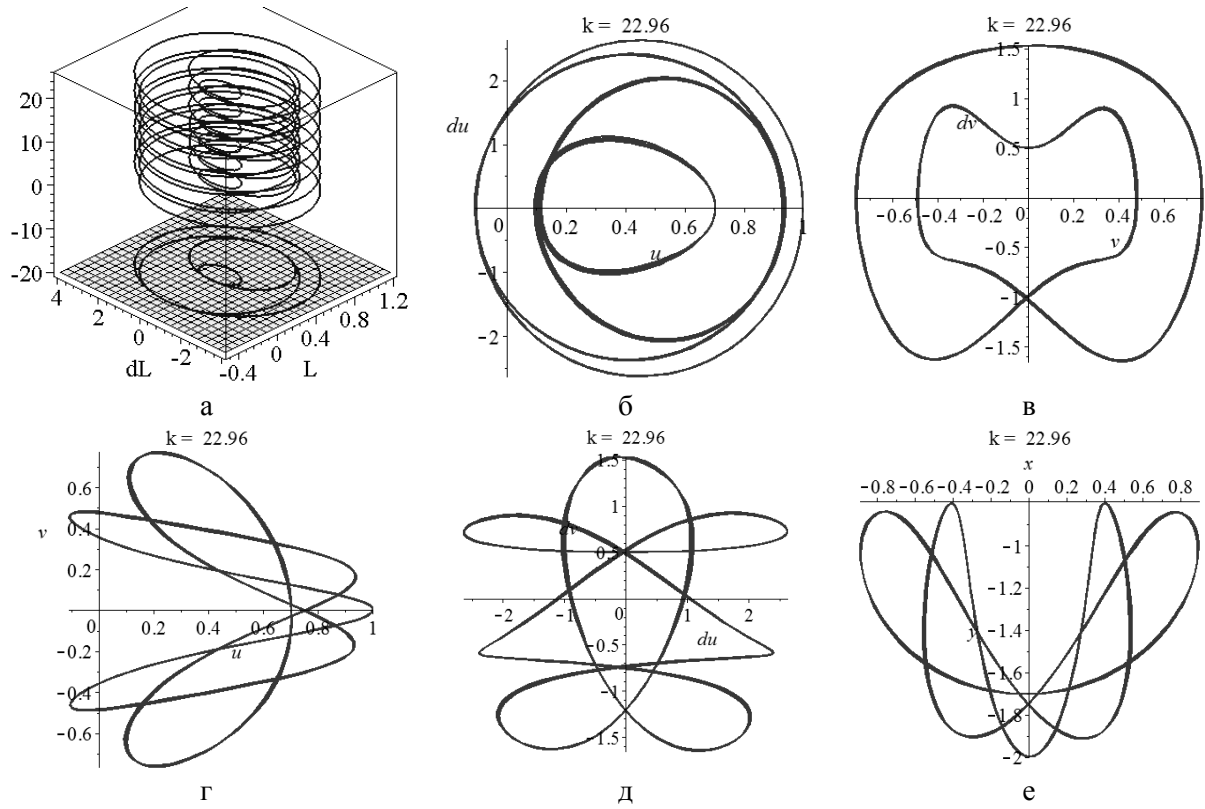


Рис. 6. Фазові траєкторії для значення параметра $k = 22,96$

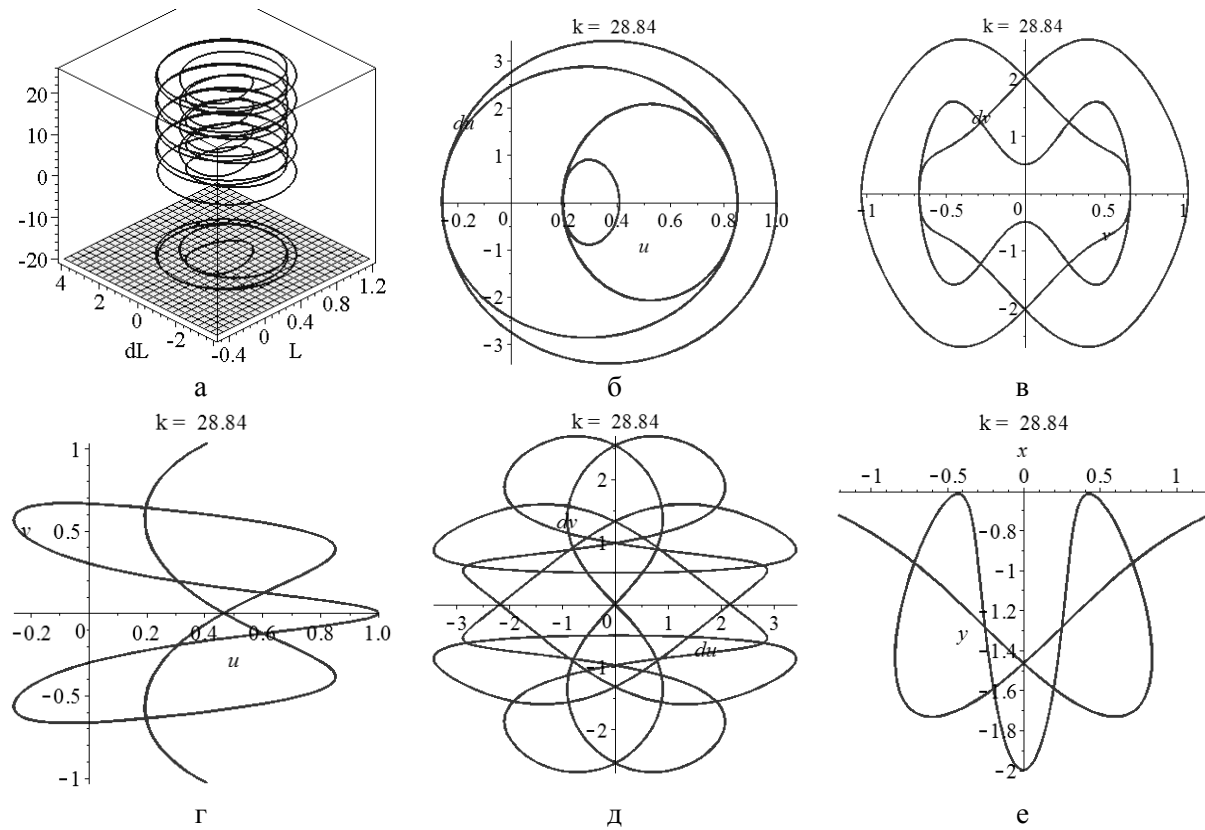


Рис. 7. Фазові траєкторії для значення параметра $k = 28,84$

```

k := 28.85:      # коефіцієнт жорсткості пружини
m := 1:        # маса вантажу маятника
theta0 := 0:   # початковий кут відхилення маятника
L0 := 1:      # початкова довжина пружини
Dtheta := 0.5: # початкова швидкість відхилення маятника
DL0 := 0:     # початкова швидкість подовження пружини
deq1 := diff(theta(t),t,t) = -(2*diff(L(t),t)*diff(theta(t),t) +
9.81*sin(theta(t)))/(L0 + L(t));
deq2 := diff(L(t),t,t) = (L0 + L(t))*diff(theta(t),t)^2 -
k*L(t)/m + 9.81*cos(theta(t));
sol := dsolve({deq1, deq2, L(0)=L0, theta(0)=theta0,
D(L)(0) = DL0, (D(theta))(0) = Dtheta}, {L(t),
theta(t)}, numeric, output=listprocedure);
  Далі упорядкуємо одержаний розв'язок:
solu := subs(sol, L(t));      # розв'язок L(t)
solv := subs(sol, theta(t));  # розв'язок theta(t)
Підготуємо масив з N=250 точок для побудови сліду за умовний час T=20:
for i from 0 to N do
x[i] := solu(T*i/N);  y[i] := solv(T*i/N);
x1[i] := (L0+x[i])*sin(y[i]);
y1[i] := -(L0+x[i])*cos(y[i]);
end do:
  В результаті будемо зображення особливої траєкторії коливання;
  display(curve([seq([x1[i], y1[i]], i = 0 .. N)]));

```

Рис. 8. Maple-програма побудови на площині xOy особливої траєкторії коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника

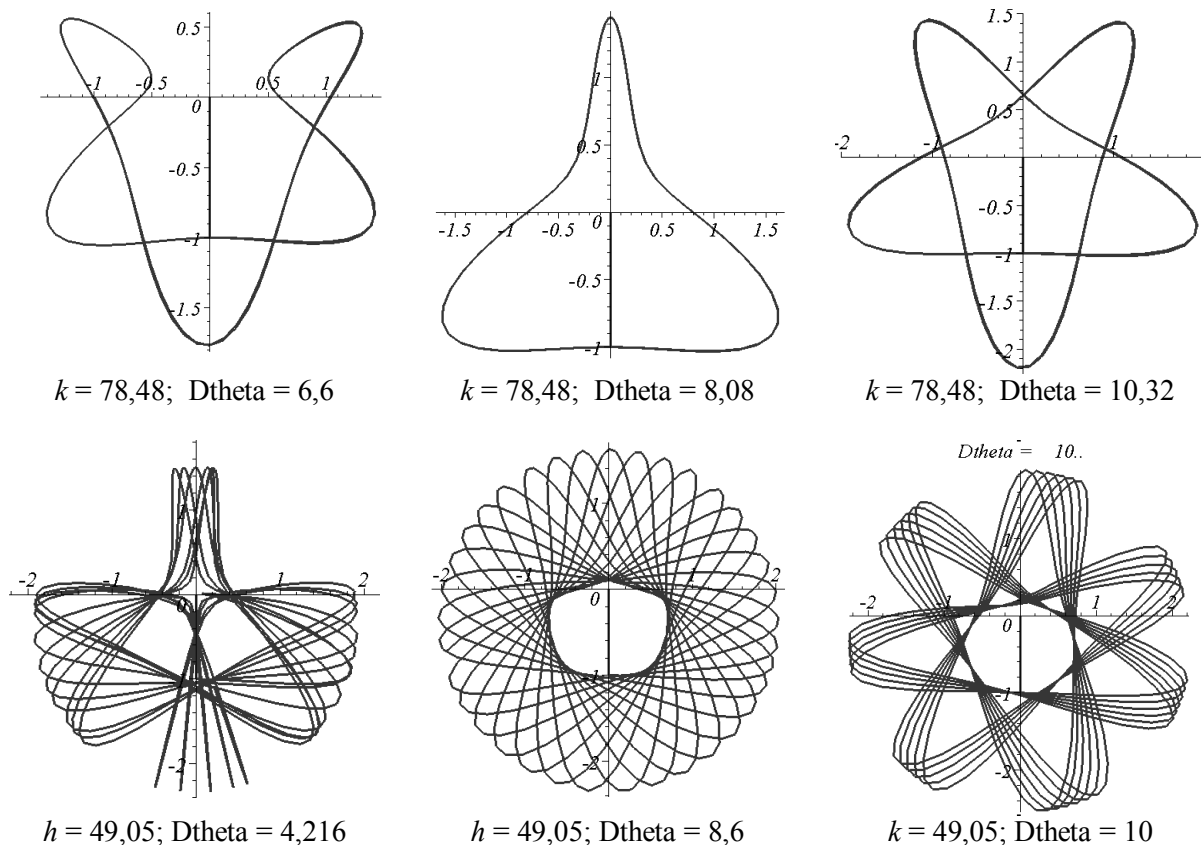


Рис. 9. Особливі траєкторії на площині xOy коливання вантажу залежно від значень k і $D\theta$ (початок)

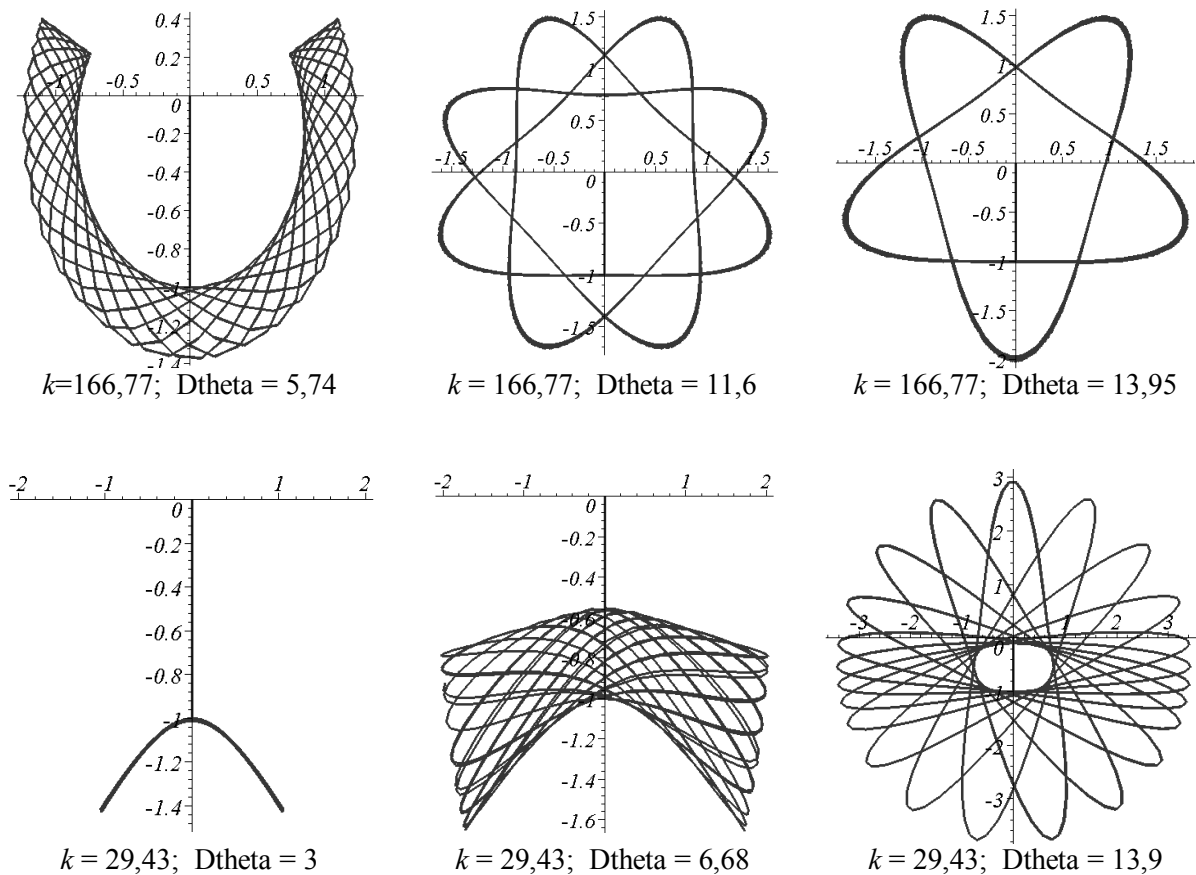


Рис. 9. Особливі траєкторії на площині xOy коливання вантажу залежно від значень k і $D\theta$ (закінчення)

У наведеному прикладі головним параметром обрано коефіцієнт жорсткості пружини k . Але таким може бути будь-який параметр, який впливатиме на геометричну форму сліду коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника.

Проілюструємо алгоритм на прикладі вибору іншого головного параметра, наприклад, початкової швидкості кута відхилення маятника $D\theta(0)$. Для цього зафіксуємо значення $m=1$, $L_0=1$, $\theta(0) = 0$, $DL(0) = 0$. Залежно від вибору значень $D\theta(0)$ обчислювався коефіцієнт жорсткості k . На рис. 9 наведено відповідні особливі траєкторії на площині xOy коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника. Їх деякі геометричні форми можна порівняти з результатами роботи [10].

Висновок

Розроблений метод дозволяє визначати геометричні форми особливих траєкторій при коливанні вантажу $2d$ -пружинного маятника

залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, коефіцієнта жорсткості пружини, а також від початкових умов ініціювання коливань – таких як початковий кут відхилення тіла пружини, початкова швидкість кута відхилення $2d$ -пружинного маятника та швидкість початкового подовження тіла пружини.

Запропонований метод дозволяє визначити множину значень параметрів, які забезпечують формування особливих траєкторій переміщення вантажу по площині. Для прикладу у даній роботі детально досліджено вплив на форму траєкторії коефіцієнта жорсткості пружини.

Метод дозволяє створювати алгоритми визначення множини критичних значень головного параметра, які відповідатимуть особливим траєкторіям коливання вантажу $2d$ -пружинного маятника. Крім того, попутно можна визначити різноманітні фазові траєкторії, розташовані на фазових площинах,

відповідних обчисленому критичному значенню головного параметра.

Все це дозволяє здійснювати аналіз коливальних $2d$ -пружинного маятника на якісному рівні.

Література

1. Rusbridge M.G. Motion of the spring pendulum / M.G. Rusbridge // *American Journal of Physics*. – 1980. – Vol. 48, no. 2. – P. 146–151.
2. Breitenberger E. The elastic pendulum: a nonlinear paradigm / E. Breitenberger, R.D. Mueller // *Journal of Mathematical Physics*. – 1981. – Vol. 22, no. 6. – P. 1196–1210.
3. Lai H.M. On the recurrence phenomenon of a resonant spring pendulum / H.M. Lai // *American Journal of Physics*. – 1984. – Vol. 52, no. 3. – P. 219–223.
4. Georgiou I.T. On the global geometric structure of the dynamics of the elastic pendulum / I.T. Georgiou // *Nonlinear Dynam.* – 1999. – Vol. 18. – P. 51–68.
5. Girgin Z. Investigation of Elastic Pendulum Oscillations by Simulation Technique / Z. Girgin, E. Demir // *Journal of Engineering Sciences*. – 2009. – 15 (1). – P. 81–86.
6. Богданов К.Ю. Хищник и жертва. – Режим доступу: <http://bio.fizteh.ru/student/files/biology/biopharticles/bioph15-arpfelurcdc.pdf>.
7. ODE ARCHITECT Companion (Consortium for ODE Experiments). – New York: John Wiley & Sons, Inc. – 286 p.
8. Broucke R. Periodic solutions of a spring-pendulum system / R. Broucke, P.A. Baха // *Celestial mechanics* September. – 1973. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 261–267.
9. Gavin Henri P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541 / Gavin Henri P. // *Structural Dynamics*. – Duke University. – 2014. – 23 p.
10. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top.4. – Режим доступу: <http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>.
11. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
12. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой / В.С. Анищенко. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. – 144 с.

Рецензент: В.М. Колодяжний, професор, д.фіз-мат.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 2 листопада 2015 р.