

УДК 621.81:672.1:[620.173.26]

## АНАЛІЗ КОЕФІЦІЄНТІВ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗГИНУ З УРАХУВАННЯМ МІЦНОСТІ СТАЛІ

**В.М. Кондель, доц., к.т.н., Ю.О. Шевченко, Д.О. Лобода, студенти,  
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка**

*Анотація.* Проведено дослідження стійкості сталевих стиснутих елементів конструкцій та деталей машин, проаналізовано експериментальні дані про роботу цих елементів та теоретичні розробки щодо їх розрахунків, побудовано графіки коефіцієнтів поздовжнього згину та запропоновано формули для визначення цих коефіцієнтів залежно від міцності сталі.

*Ключові слова:* стиснуті елементи, коефіцієнт поздовжнього згину, міцність сталі.

## АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА С УЧЕТОМ ПРОЧНОСТИ СТАЛИ

**В.Н. Кондель, доц., к.т.н., Ю.О. Шевченко, Д.А. Лобода, студенты,  
Полтавский национальный педагогический университет имени В.Г. Короленко**

*Аннотация.* Проведено исследование устойчивости стальных сжатых элементов конструкций и деталей машин, проанализированы экспериментальные данные о работе этих элементов и теоретические разработки относительно их расчетов, построены графики коэффициентов продольного изгиба и предложены формулы для определения этих коэффициентов в зависимости от прочности стали.

*Ключевые слова:* сжатые элементы, коэффициент продольного изгиба, прочность стали.

## ANALYSIS OF STRESS REDUCTION FACTORS TAKING INTO ACCOUNT THE STEEL STRENGTH

**V. Kondel', Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),  
Yu. Shevchenko, D. Loboda, students,  
Poltava National Pedagogical University after V. Korolenko**

*Abstract.* The authors researched the stability of compressed structures and parts of machines. Analysis of experimental and theoretical data of compressed structures behaviour and their part is provided. New approaches to the stress reduction factors tests, taking into account the steel strength are described.

*Key words:* compressed members, stress reduction factor, steel strength.

### Вступ

Гарантією надійності конструкцій, елементів машин та споруд є задоволення умов їх міцності, жорсткості та стійкості. Особливу увагу слід звернути на явище втрати стійкості, яке є дуже небезпечним і може призвести до трагічних наслідків, оскільки в цьому випадку відбувається некероване зростання де-

формацій і конструкція руйнується практично миттєво, що виключає будь-яку можливість вжиття дієвих заходів щодо запобігання аваріям та катастрофам. Втрата стійкості може статися в елементах конструкцій та деталей машин, які працюють на стискання: колонах, стійках, верхніх поясах ферм, штоках парових машин та поршневих насосів, гвинтах у передачах гвинт-гайка, циліндрич-

них та конічних гвинтових пружинах, різальних інструментах для обробки отворів (свердла, зенкери, розвертки, мітчики) на свердильних верстатах, голках у швейних машинах та ін. Саме тому одним з найважливіших напрямів попередження надзвичайних ситуацій є дослідження допустимих навантажень на стиснуті елементи конструкцій та деталей машин.

### Аналіз публікацій

Вагомий внесок у вирішенні проблеми стійкості стиснутих елементів конструкцій та деталей машин зробили видатні вчені XVIII–XX ст.: Л. Ейлер, Ф. Енгессер, Ф. Ясинський, Л. Тетмайер, Т. Карман, Ф. Шенлі та ін. [1–3]. Вони запропонували формули для визначення критичної сили і напруження, які є небезпечними для стиснутого стержня, залежно від його гнучкості, матеріалу, способів закріплення кінців, схеми та виду навантаження, а також умову стійкості з коефіцієнтом поздовжнього згину  $\varphi$

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{st} = \varphi[\sigma], \quad (1)$$

де  $\sigma$  та  $[\sigma]$  – робоче та основне допустиме напруження;  $[\sigma]_{st}$  – допустиме напруження на стійкість;  $F$  – робоча поздовжня сила;  $A$  – площа поперечного перерізу стиснутого стержня.

Формула (1) використовується в машинобудуванні під час розрахунків елементів на стійкість, зокрема для визначення допустимих напружень і навантажень. Будівельні конструкції розраховують за методом граничних станів, тому замість допустимих напружень застосовують термін «розрахунковий опір», який використовуємо в дослідженнях коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$  для стиснутих елементів конструкцій.

Досліди показали, що коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi$  залежить від гнучкості елемента  $\lambda$ , тобто  $\varphi = f(\lambda)$ .

У свою чергу

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (2)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт зведення довжини стержня, який залежить від способу закріплення його кінців (рис. 1);  $l$  – довжина стержня;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – мінімальний радіус інерції;

$I_{\min}$  – мінімальний момент інерції.

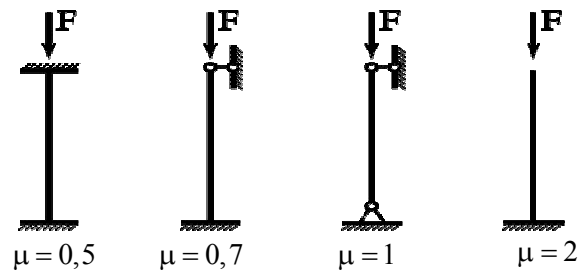


Рис. 1. Залежність коефіцієнтів  $\mu$  від способу закріплення кінців стержня

Останні дослідження [2, 4] показали, що гнучкість  $\lambda$  залежить не тільки від вищезгаданих чинників, але й від жорсткості опор, що було враховано авторами під час розрахунків коефіцієнта зведення довжини стержня  $\mu$  [4].

За результатами експериментальних даних учені багатьох країн світу одержали значення коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$  для стійок, виготовлених з різних матеріалів: сталей різної міцності та марки, чавуну, алюмінієвих сплавів, деревини (сосни, ялини), каменю, бетону та залізобетону, подані у вигляді таблиць [1–3, 5].

У свій час учені запропонували залежності  $\varphi = f(\lambda)$  для деревини і сталі [2, 7–9], які складаються з двох або трьох різних рівнянь [1, 2, 6, 7], або стосуються лише сталі марки Ст 3 [8], тому для практичних розрахунків стиснутих елементів слід вивести одне рівняння, враховуючи властивості матеріалів, з яких виготовлені ці елементи.

### Мета і постановка завдання

Оскільки переважна більшість стиснутих елементів конструкцій та деталей машин виготовляється зі сталі різної міцності, метою цієї роботи є виведення формули для визначення коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$  саме для сталевих зразків.

### Дослідження коефіцієнтів поздовжнього згину з урахуванням міцності сталі

Існують залежності коефіцієнта  $\varphi$  від розрахункового опору сталі  $R_y$  і умовної гнучкості стержня

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y/E},$$

де  $E$  – модуль Юнга або модуль пружності першого роду для сталі [6]:

$$\varphi = 1 - \left( 0,073 - 5,53 \frac{R_y}{E} \right) \bar{\lambda} \sqrt{\bar{\lambda}}$$

при  $0 < \bar{\lambda} \leq 2,5$ ;

$$\varphi = 1,47 - 13 \frac{R_y}{E} - \left( 0,371 - 27,3 \frac{R_y}{E} \right) \bar{\lambda} +$$

$$+ \left( 0,0275 - 5,53 \frac{R_y}{E} \right) \bar{\lambda}^2 \text{ при } 2,5 < \bar{\lambda} \leq 4,5;$$

$$\varphi = \frac{332}{\bar{\lambda}^2(51 - \bar{\lambda})} \text{ при } \bar{\lambda} > 4,5. \quad (3)$$

Є інші пропозиції щодо визначення коефіцієнтів  $\varphi$  зокрема прості рівняння для низькоміцних і високоміцних сталей [7]

$$\varphi = \frac{1}{(0,01\lambda)^2 + 1} \text{ і } \varphi = \frac{1}{\left[ \frac{\lambda}{100} \left( c - \frac{d}{R_y} \right) \right]^2 + 1}, \quad (4)$$

де коефіцієнти  $c$  і  $d$  відповідно становлять: при  $\lambda \leq 50$  –  $c = 1,51$ ,  $d = 142$ ; а при  $\lambda \geq 50$  –  $c = 2,21$ ,  $d = 306$ .

Для розрахунків стиснутих стійок, виготовлених зі сталі марки Ст 3, рекомендується залежність, яка має достатню для практичних розрахунків точність [8] (середні відхилення теоретичних значень коефіцієнтів  $\varphi$  від експериментальних становлять трохи більше ніж 2 %)

$$\varphi = \frac{1}{\left( (0,00453\lambda)^2 + 0,00654\lambda + 0,0277 \right)^2 + 1}, \quad (5)$$

але ця формула придатна для елементів, виготовлених тільки зі сталі марки Ст 3 з модулем пружності  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, межею текучості  $\sigma_y = 240$  МПа, межею пропорційності  $\sigma_{pr} = 200$  МПа, основним допустимим напруженням  $[\sigma] = 160$  МПа та розрахунковим опором  $R_y \approx 0,9 \cdot \sigma_y = 215$  МПа, і не може бути використана для сталей інших марок, зокрема високоміцних.

Для оцінки формул (3) і (4) та оцінки точності розрахунків коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$  використаємо табличні дані експериментів [1–3, 5] для зразків, виготовлених з різних матеріалів, зокрема для сталей різної міцності, і побудуємо відповідні графіки залежностей  $\varphi = f(\lambda)$  (рис. 2).

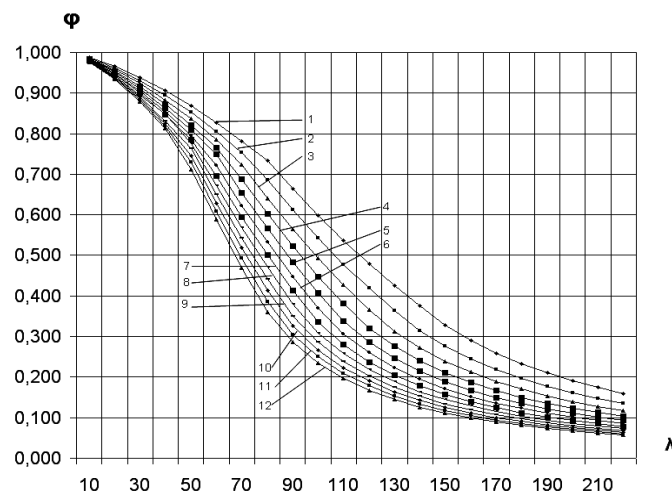


Рис. 2. Залежності  $\varphi = f(\lambda)$  для стиснутих елементів з різним розрахунковим опором сталі: 1 – 200 МПа; 2 – 240 МПа; 3 – 280 МПа; 4 – 320 МПа; 5 – 360 МПа; 6 – 400 МПа; 7 – 440 МПа; 8 – 480 МПа; 9 – 520 МПа; 10 – 560 МПа; 11 – 600 МПа; 12 – 640 МПа

Для аналізу залежності коефіцієнта  $\varphi$  від міцності сталі, за дослідними даними [3, 5], будемо ще графік функції  $\varphi = f(R_y)$ , де  $R_y$  – розрахунковий опір сталі (рис. 3). Очевидно, що коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi$  залежить не тільки від гнучкості стержня  $\lambda$ , але й від міцності матеріалу, з якого його виготовлено. Зокрема для сталі з підвищенням її міцності (рис. 3) та зростанням гнучкості (рис. 2) коефіцієнт  $\varphi$  зменшується, тому для практичних розрахунків виведемо формулу для визначення коефіцієнта поздовжнього згину з урахуванням його залежності від цих чинників.

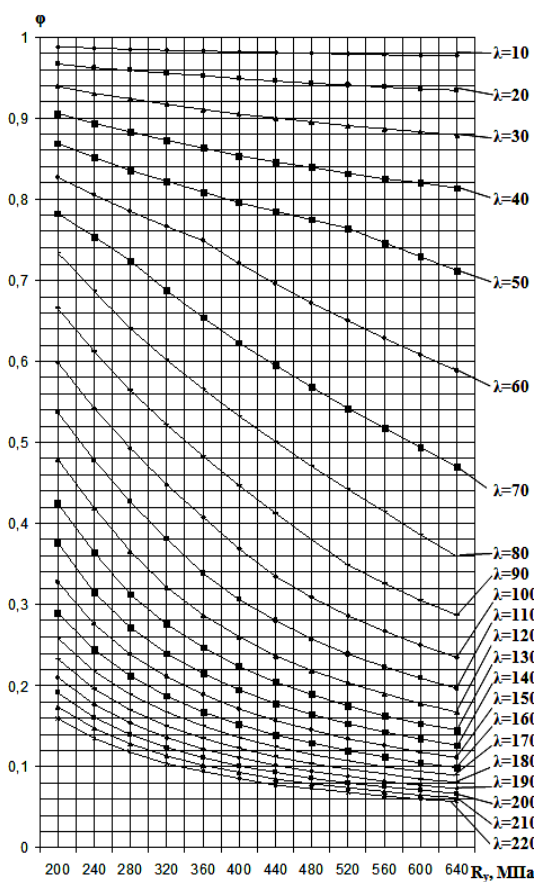


Рис. 3. Залежності  $\varphi = f(R_y)$  для стиснутих сталевих елементів з різними гнучкостями  $\lambda$

Нами було проведено дослідження точності розрахунків коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$  відповідно до формул (3) і (4) з порівнянням експериментальних  $\varphi^{\text{exp}}$  і теоретичних  $\varphi^{\text{th}}$  значень цих коефіцієнтів і визначенням середніх арифметичних  $\delta_m$  і середніх квадратичних  $\sigma_m$  похибок. Очевидно, що рівнян-

ня (4) є більш зручними для розрахунків коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$ , ніж громіздкі формули (3), але останні дозволяють значно точніше визначити коефіцієнти  $\varphi$  (похибки становлять  $\delta_m = 1,91\%$  і  $\sigma_m = 2,20\%$ ), у той час як за формулами (4) – відповідно  $\delta_m = 8,26\%$  і  $\sigma_m = 10,32\%$ . Це означає, що необхідно скласти одне рівняння, яке б враховувало властивості як низькоміцних, так і високоміцних сталей та мало б прийнятні для практичних розрахунків показники точності (до 5%).

Аналіз діаграм (рис. 2) для сталевих стиснутих стійок показав, що графіки функції  $\varphi = f(\lambda)$  подібні до кривої  $x^2 y = 4a^2(2a - y)$ , яка називається локонном Аньєзі [9]. Для цієї кривої при  $x = 0$ ,  $y = 2a$ . У свою чергу, при  $\lambda = 0$ ,  $\varphi = 1$ . Замінивши  $x$  на  $\lambda$ , а  $y$  на  $\varphi$ , визначаємо  $a = 0,5$  і отримуємо рівняння  $y = 1/(x^2 + 1)$ . Враховуючи різну кривизну графіків  $\varphi = f(\lambda)$  для низькоміцних і високоміцних сталей (рис. 2), маємо залежність

$$\varphi = \frac{1}{(a\lambda^2 + b\lambda + c)^2 + 1}, \quad (6)$$

де  $a, b$  і  $c$  – коефіцієнти, які залежать від розрахункового опору сталі  $R_y$  і визначаються за допомогою методу найменших квадратів (табл. 1).

Таблиця 1 Значення коефіцієнтів  $a, b$  і  $c$

$R_y$ , МПа	$a$	$b$	$c$
200	$2,066 \cdot 10^{-5}$	$5,972 \cdot 10^{-3}$	$3,726 \cdot 10^{-2}$
240	$1,983 \cdot 10^{-5}$	$7,437 \cdot 10^{-3}$	$7,338 \cdot 10^{-3}$
280	$1,799 \cdot 10^{-5}$	$8,954 \cdot 10^{-3}$	$-2,390 \cdot 10^{-2}$
320	$1,632 \cdot 10^{-5}$	$1,036 \cdot 10^{-2}$	$-5,136 \cdot 10^{-2}$
360	$1,394 \cdot 10^{-5}$	$1,182 \cdot 10^{-2}$	$-8,110 \cdot 10^{-2}$
400	$1,131 \cdot 10^{-5}$	$1,324 \cdot 10^{-2}$	$-1,084 \cdot 10^{-1}$
440	$1,036 \cdot 10^{-5}$	$1,431 \cdot 10^{-2}$	$-1,258 \cdot 10^{-1}$
480	$7,259 \cdot 10^{-6}$	$1,570 \cdot 10^{-2}$	$-1,528 \cdot 10^{-1}$
520	$4,701 \cdot 10^{-6}$	$1,696 \cdot 10^{-2}$	$-1,764 \cdot 10^{-1}$
560	$2,830 \cdot 10^{-6}$	$1,803 \cdot 10^{-2}$	$-1,931 \cdot 10^{-1}$
600	$7,770 \cdot 10^{-7}$	$1,913 \cdot 10^{-2}$	$-2,119 \cdot 10^{-1}$
640	$-1,923 \cdot 10^{-6}$	$2,028 \cdot 10^{-2}$	$-2,314 \cdot 10^{-1}$

Використовуючи цю таблицю, виведемо рівняння для розрахунків коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$  залежно від розрахункового опору сталі  $R_y$  у МПа

$$(a, b, c) = k_0 + k_1 R_y + k_2 R_y^2, \quad (7)$$

де  $k_0, k_1$  і  $k_2$  – параметри, які враховують міцність сталі і також визначаються за допомогою методу найменших квадратів. Значення параметрів  $k_0, k_1$  і  $k_2$  та їх розмірності наведено в табл. 2.

Для оцінки точності складеного нами рівняння (6) було проведено додаткові розрахунки теоретичних значень коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi^{th}$  для сталевих стійок у діапазонах гнучкостей стиснутих елементів від 10 до 220 і розрахункових опорів сталі від 200 до 640 МПа.

Таблиця 2 Значення параметрів  $k_0, k_1$  і  $k_2$

$R_y$ , МПа	$k_0$	$k_1$ , МПа <sup>-1</sup>	$k_2$ , МПа <sup>-2</sup>
$a$	0,00236	$1,63 \cdot 10^{-5}$	$-3,27 \cdot 10^{-8}$
$b$	-0,00238	$4,45 \cdot 10^{-5}$	$-1,43 \cdot 10^{-8}$
$c$	0,217	$-9,83 \cdot 10^{-4}$	$4,44 \cdot 10^{-7}$

Порівняння теоретичних значень  $\varphi^{th}$  з експериментальними даними  $\varphi^{exp}$  [3, 5] свідчать про достатню для практичних розрахунків точність запропонованої нами формули (6): середні значення відхилень становлять  $\delta_m = 3,69\%$  і  $\sigma_m = 4,51\%$ .

### Висновки

Проведено дослідження стійкості сталевих стиснутих елементів конструкцій та деталей машин. Проаналізовано експериментальні дані про роботу цих елементів і теоретичних розробок щодо їх розрахунків. Побудовано графіки коефіцієнтів поздовжнього згину та запропоновано нові формули для визначення цих коефіцієнтів залежно від гнучкості стійки та розрахункового опору сталі.

1. Коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi$ , який використовується для визначення допустимих навантажень на стиснуті елементи, залежить не тільки від гнучкості стержня  $\lambda$ ,

але й від міцності матеріалу, з якого його виготовлено. Зокрема для сталі з підвищенням її розрахункового опору та зростанням гнучкості коефіцієнт  $\varphi$  зменшується, на що слід звернути увагу під час проектування стійок з високоміцних сталей.

2. Запропонована формула (6) враховує гнучкість стержня і розрахунковий опір сталі, з якої його виготовлено, має достатню для практичних розрахунків точність, тому рекомендується для визначення коефіцієнтів поздовжнього згину  $\varphi$ .

3. Аналогічні дослідження слід провести для стиснутих елементів, виготовлених з інших матеріалів: чавуну, алюмінієвих сплавів, деревини, каменю, бетону, залізобетону тощо. Ці розробки дозволять підвищити надійність і довговічність елементів конструкцій та деталей машин і запобігти багатьом аваріям і катастрофам у майбутньому.

### Література

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.
3. Лихтарников Я.М. Расчет стальных конструкций: справочное пособие / Я.М. Лихтарников, Д.В. Ладыженский, В. М. Клыков. – К.: Будівельник, 1984. – 368 с.
4. Кондель В. Дослідження стійкості сталевих стиснених елементів конструкцій з урахуванням умов їх закріплення та жорсткості опор / В. Кондель, А. Павліченко // Вісник Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. – 2011. – Т. 16, № 4. – С. 18–27.
5. Васильченко В.Т. Справочник конструктора металлических конструкций / В.Т. Васильченко, А. Н. Рутман, Е. П. Лукьяненко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Будівельник, 1990. – 312 с.
6. Справочник по расчету строительных конструкций на программируемых микрокалькуляторах / А.Я. Барашиков, М.Г. Гольдберг, Ю.Н. Кушнарв и др.;

- под ред. А.Я. Барашикова и В.А. Пермякова. – К.: Будівельник, 1989. – 224 с.
7. Кондель В.М. Дослідження стійкості сталених стиснутих елементів сталого та змінного поперечних перерізів / В.М. Кондель, А.І. Павліченко // Фізико-математичні науки: Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2011. – № 4. – С.76–79.
8. Кондель В.М. Дослідження стійкості елементів конструкцій та деталей машин раціональних складених перерізів / В.М. Кондель, Р.Т. Холодков, М.М. Шевчук // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2015. – Вып. 68. – С. 50–56.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – 4-е изд. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

Рецензент: В.П. Кожушко, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.

---