

УДК 629.01

## КОНТАКТНЫЕ СИЛЫ ТРЕХКОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА НА СПИРАЛЬНО-ВИНТОВЫХ ТРАССАХ

**В.В. Кравец, проф., д.т.н., К.М. Басс, доц., к.т.н., Т.В. Кравец, доц., к.т.н.,  
Н.С. Зубарев, ассист.,  
Государственное высшее учебное заведение  
«Национальный горный университет», г. Днепропетровск**

*Аннотация.* Предлагается модель кинетики трехколесного экипажа при различных режимах движения. Аналитически определяются контактные силы с учетом признака ведущего-ведомого колеса.

*Ключевые слова:* динамическое проектирование, контактные силы, спирально-винтовые трассы.

## КОНТАКТНІ СИЛИ ТРИКОЛІСНОГО ЕКІПАЖА НА СПИРАЛЬНО-ГВИНТОВИХ ТРАСАХ

**В.В. Кравець, проф., д.т.н., К.М. Бас, доц., к.т.н., Т.В. Кравець, доц., к.т.н.,  
М.С. Зубарев, асист.,  
Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»,  
м. Дніпропетровськ**

*Анотація.* Пропонується модель кінетики триколісного екіпажа при різних режимах руху. Аналітично визначаються контактні сили з урахуванням ознаки ведучого-веденого колеса.

*Ключові слова:* динамічне проектування, контактні сили, спіральні-гвинтові траси.

## CONTACT FORCES OF THE THREE-WHEELED VEHICLE ON SPIRAL-SCREW ROUTES

**V. Kravets, Prof., D. Sc. (Eng.), K. Bas, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),  
T. Kravets, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.), M. Zubaryev, T. Asst.,  
State Higher Educational Institution «National Mining University», Dnipropetrovsk**

*Abstract.* A model of kinetostatics of a three-wheeled vehicle in terms of different modes of motion is proposed. Analytical approach to determine. The contact drive-control forces, taking into account the driving-driven wheel characteristic is proposed.

*Key words:* dynamic design, contact forces, spiral-screw trajectory.

### Введение

При равномерном, ускоренном, замедленном режимах движения переднеприводного, заднеприводного, полноприводного колесного экипажа по пространственной криволинейной трассе в развязках и поворотах, в уклонах и на прямых участках актуальными являются задачи по оценке динамической нагруженности конструкции и дорожной по-

верхности, а также устойчивости и управляемости. Решение этих задач динамического проектирования колесного экипажа позволяет установить эквивалентные контактные нагрузки по опорным точкам с учетом признака ведущего колеса, синтезировать необходимые органы управления, определить необходимый крутящий момент ведущего колеса для обеспечения требуемого режима движения автомобиля по заданной трассе.

Анализ публикаций

В работах [1–3] рассматриваются задачи по оценке динамической нагруженности конструкции и дорожной поверхности; в работах [4–7] – задачи по оценке устойчивости и управляемости переднеприводного, заднеприводного, полноприводного колесного экипажа при равномерном, ускоренном, замедленном режимах движения по пространственной криволинейной трассе в развязках и поворотах, в уклонах и на прямых участках трасс.

В работах [8–10] представлено решение задач динамического проектирования колесного экипажа, которое позволяет установить эквивалентные контактные нагрузки по опорным точкам с учетом признака ведущего колеса, синтезировать необходимые органы управления, определить необходимый крутящий момент ведущего колеса для обеспечения требуемого режима движения автомобиля по заданной трассе.

Цель и постановка задачи

Целью работы является определение эквивалентной контактной движущей силы (внутренней результирующей реакции связи опорной поверхности), обеспечивающей требуемый режим движения экипажа по заданной трассе. Распределение эквивалентной контактной движущей силы по трем опорным точкам с учетом признака ведущего колеса для конструктивных схем колесного экипажа.

Для достижения данной цели полагается заданным алгоритм определения эквивалентной контактной движущей силы и ее распределения для схемы экипажа, имеющего две точки [6, 7].

Определение контактных сил двухколесного экипажа

Для двухколесного экипажа результирующая движущая сила ( $N_\tau, N_n, N_b$ ) подлежит распределению по двум опорным точкам с учетом признака ведущего колеса в виде искомой системы двух эквивалентных движущих сил ( $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ ). Здесь для экипажей наземного транспорта возможны две структурные схемы расположения опорных точек ( $O_1, O_2$ ): тандемная и параллельная. Динамические

схемы приводятся на рис. 1, где геометрические параметры заданы в системе координат, связанной с экипажем,  $\bar{\tau}$  – направление движения.

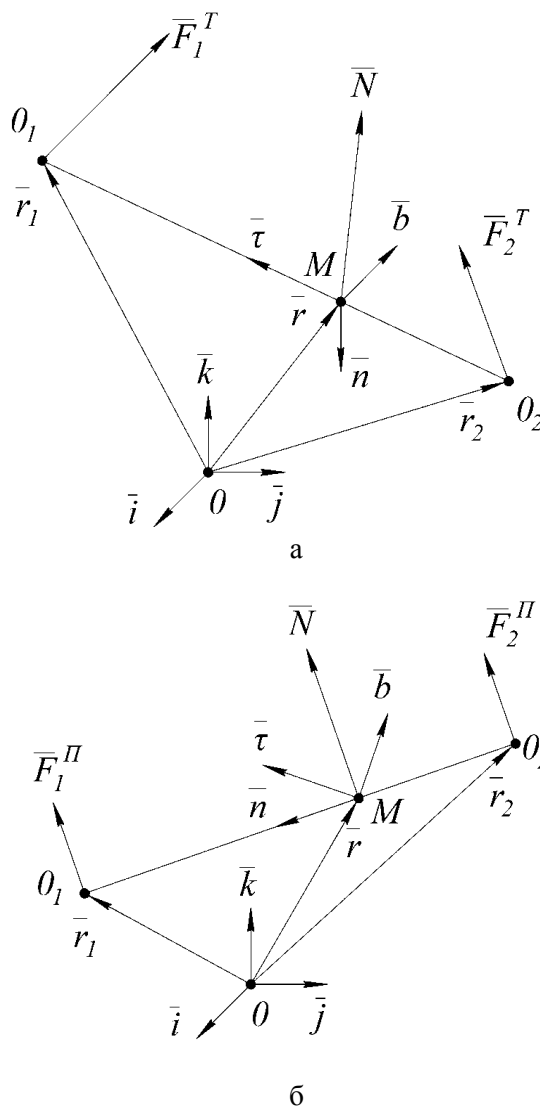


Рис. 1. Динамические схемы расположения опорных точек: а – тандемная, б – параллельная

Сформулированная задача динамического проектирования двухколесного экипажа наземного транспорта составляет задачу статики, для решения которой целесообразно воспользоваться теоремой Вариньона [11]:

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = \bar{r} \times \bar{N},$$

где  $\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{\tau} l_1, \bar{r}_2 = \bar{r} - \bar{\tau} l_2$ .

В частности, совмещая полюс 0 со второй опорной точкой  $O_2$ , получим:

– для тандемной схемы:

$$\bar{r} = \bar{\tau} l_2, \bar{r}_2 = 0, \bar{r}_1 = (l_1 + l_2) \bar{\tau};$$

– для параллельной схемы:

$$\bar{r} = \bar{n} h_2, \bar{r}_2 = 0, \bar{r}_1 = (h_1 + h_2) \bar{n},$$

где  $l_1, h_1$  – отрезок  $M0_1$  (расстояние от центра масс до первой опорной точки);  $l_2, h_2$  – отрезок  $M0_2$  (расстояние от центра масс до второй опорной точки).

Тогда в осях естественного трехгранника теорему Вариньона представим в форме определителей:

– для тандемной схемы:

$$\begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ l_1 + l_2 & 0 & 0 \\ F_{1\tau}^T & F_{1n}^T & F_{1b}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ l_2 & 0 & 0 \\ N_\tau & N_n & N_b \end{vmatrix};$$

– для параллельной схемы:

$$\begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & h_1 + h_2 & 0 \\ F_{1\tau}^{\Pi} & F_{1n}^{\Pi} & F_{1b}^{\Pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & h_2 & 0 \\ N_\tau & N_n & N_b \end{vmatrix}.$$

Откуда следует:

– для тандемной схемы:

$F_{1\tau}^T$  – неопределенно,

$$F_{1n}^T = \frac{l_2}{l_1 + l_2} N_n, F_{1b}^T = \frac{l_2}{l_1 + l_2} N_b;$$

– для параллельной схемы:

$$F_{1\tau}^{\Pi} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_\tau, F_{1n}^{\Pi} \text{ – неопределенно,}$$

$$F_{1b}^{\Pi} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_b.$$

Совмещая полюс 0 с первой опорной точкой  $0_1$ , получим:

– для тандемной схемы:

$$\bar{r} = -l_1 \bar{\tau}, \bar{r}_1 = 0, \bar{r}_2 = -(l_1 + l_2) \bar{\tau};$$

– для параллельной схемы:

$$\bar{r} = -h_1 \bar{n}, \bar{r}_1 = 0, \bar{r}_2 = -(h_1 + h_2) \bar{n}.$$

Тогда теорема Вариньона в осях естественного трехгранника принимает вид:

– для тандемной схемы:

$$\begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ l_1 + l_2 & 0 & 0 \\ F_{2\tau}^T & F_{2n}^T & F_{2b}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ l_2 & 0 & 0 \\ N_\tau & N_n & N_b \end{vmatrix};$$

– для параллельной схемы:

$$\begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & h_1 + h_2 & 0 \\ F_{2\tau}^{\Pi} & F_{2n}^{\Pi} & F_{2b}^{\Pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & h_2 & 0 \\ N_\tau & N_n & N_b \end{vmatrix}.$$

Откуда следует:

– для тандемной схемы:

$F_{2\tau}^T$  – неопределенно,

$$F_{2n}^T = \frac{l_1}{l_1 + l_2} N_n, F_{2b}^T = \frac{l_1}{l_1 + l_2} N_b;$$

– для параллельной схемы:

$$F_{2\tau}^{\Pi} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau,$$

$$F_{2n}^{\Pi} \text{ – неопределенно, } F_{2b}^{\Pi} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_b.$$

### Определение контактных сил трехколесного экипажа

Схемы двухколесного экипажа преобразуются по тандемно-параллельному принципу в схемы трехколесного экипажа. Варианты полученных структурных схем представлены на рис. 2.

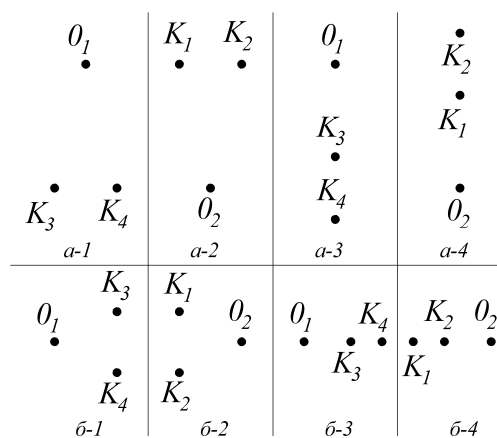


Рис. 2. Структурные схемы трехколесного экипажа: а – тандемная (а-1, а-2, а-3, а-4); б – параллельная (б-1, б-2, б-3, б-4)

За основу взята схема модели трехколесного экипажа [12], соответствующая варианту а-1 (рис. 2). Для трехколесного экипажа результирующая движущая сила  $\bar{N}$  подлжит распределению по трем опорным точкам ( $O_1, K_3, K_4$ ) с учетом признака ведущего-ведомого колеса в виде системы трех эквивалентных контактных движущих сил ( $\bar{F}_1^T, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4$ ).

Соответствующая динамическая модель приводится на рис. 3.

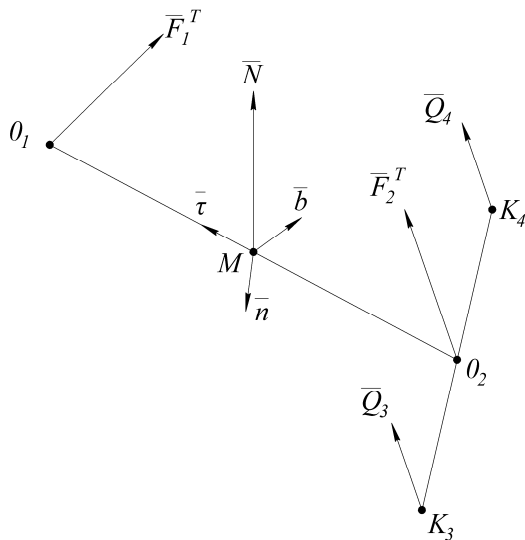


Рис. 3. Динамическая модель трехколесного экипажа, построенная по тандемной схеме

Здесь геометрические параметры и динамическая нагрузка заданы в связанной системе координат

$$MO_1 = l_1; MO_2 = l_2; O_2K_3 = h_3^T; O_2K_4 = h_4^T;$$

$\bar{F}_1^T$  – динамическая нагрузка на переднее колесо;  $\bar{F}_2^T$  – динамическая нагрузка на заднюю ось.

Тогда для асимметричной тандемной конструктивной схемы находим

$$F_{1\tau}^T = \frac{k}{1+k} N_\tau; F_{1n}^T = \frac{l_2}{l_1+l_2} N_n; F_{1b}^T = \frac{l_2}{l_1+l_2} N_b;$$

$$F_{2\tau}^T = \frac{1}{1+k} N_\tau; F_{2n}^T = \frac{l_1}{l_1+l_2} N_n; F_{2b}^T = \frac{l_1}{l_1+l_2} N_b,$$

где  $k$  – заданный проектный параметр:

$$k = \left| \frac{F_{1\tau}^T}{F_{2\tau}^T} \right|.$$

Для асимметричной параллельной конструктивной схемы задней оси находим:

$$Q_{3\tau}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} F_{2\tau}^T; Q_{3n}^T = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} F_{2n}^T;$$

$$Q_{3b}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} F_{2b}^T;$$

$$Q_{4\tau}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} F_{2\tau}^T; Q_{4n}^T = \frac{1}{1+\mu_2} F_{2n}^T;$$

$$Q_{4b}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} F_{2b}^T,$$

где  $\mu_2$  – заданный проектный параметр:

$$\mu_2 = \frac{Q_{3n}^T}{Q_{4n}^T}.$$

Тогда для полноприводной конструктивной схемы в развернутой записи получим:

$$F_{1\tau}^T = \frac{k}{1+k} N_\tau; F_{1n}^T = \frac{l_2}{l_1+l_2} N_n; F_{1b}^T = \frac{l_2}{l_1+l_2} N_b;$$

$$Q_{3\tau}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{1+k} N_\tau; Q_{3n}^T = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2} N_n;$$

$$Q_{3b}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2} N_b;$$

$$Q_{4\tau}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{1+k} N_\tau; Q_{4n}^T = \frac{1}{1+\mu_2} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2} N_n;$$

$$Q_{4b}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2} N_b.$$

Соответственно для переднеприводной

$$F_{1\tau}^T = \frac{k}{k-1} N_\tau; Q_{3\tau}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{k-1} N_\tau;$$

$$Q_{4\tau}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{k-1} N_\tau;$$

и заднеприводной схем:

$$F_{1\tau}^T = \frac{k}{1-k} N_\tau; \quad Q_{3\tau}^T = \frac{h_4^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{1-k} N_\tau;$$

$$Q_{4\tau}^T = \frac{h_3^T}{h_3^T + h_4^T} \cdot \frac{1}{1-k} N_\tau.$$

Аналогично изложенному, взяв за основу вариант б-1 (рис. 2), строится динамическая модель трехколесного экипажа в виде, показанном на рис. 4.

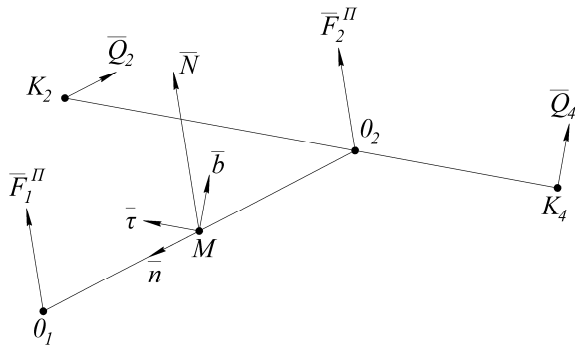


Рис. 4. Динамическая модель трехколесного экипажа, построенная по параллельной схеме

Здесь геометрические параметры и динамическая нагрузка заданы в связанной системе координат

$$MO_1 = h_1; \quad MO_2 = h_2; \quad O_2K_2 = l_2^{II}; \quad O_2K_4 = l_4^{II};$$

$\bar{F}_1^{II}$  – динамическая нагрузка на левое колесо;  $\bar{F}_2^{II}$  – динамическая нагрузка на правый борт.

Тогда для асимметричной параллельной конструктивной схемы находим

$$F_{1\tau}^{II} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_\tau; \quad F_{1n}^{II} = \frac{\mu}{1 + \mu} N_n;$$

$$F_{1b}^{II} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_b;$$

$$F_{2\tau}^{II} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau; \quad F_{2n}^{II} = \frac{1}{1 + \mu} N_n;$$

$$F_{2b}^{II} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_b,$$

где  $\mu$  – заданный проектный параметр:

$$\mu = \frac{F_{1n}^{II}}{F_{2n}^{II}}.$$

Для асимметричной тандемной конструктивной схемы правого борта находим

$$Q_{2\tau}^{II} = \frac{k_2}{1 + k_2} F_{2\tau}^{II}; \quad Q_{2n}^{II} = \frac{l_4^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} F_{2n}^{II};$$

$$Q_{2b}^{II} = \frac{l_4^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} F_{2b}^{II};$$

$$Q_{4\tau}^{II} = \frac{1}{1 + k_2} F_{2\tau}^{II}; \quad Q_{4n}^{II} = \frac{l_2^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} F_{2n}^{II};$$

$$Q_{4b}^{II} = \frac{l_2^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} F_{2b}^{II},$$

где  $k_2$  – заданный проектный параметр:

$$k_1 = \left| \frac{Q_{2\tau}^{II}}{Q_{4\tau}^{II}} \right|.$$

В развернутой записи для полноприводной конструктивной схемы получим

$$F_{1\tau}^{II} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_\tau; \quad F_{1n}^{II} = \frac{\mu}{1 + \mu} N_n;$$

$$F_{1b}^{II} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_b;$$

$$Q_{2\tau}^{II} = \frac{k_2}{1 + k_2} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau;$$

$$Q_{2n}^{II} = \frac{l_4^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} \cdot \frac{1}{1 + \mu} N_n;$$

$$Q_{2b}^{II} = \frac{l_4^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_b;$$

$$Q_{4\tau}^{II} = \frac{1}{1 + k_2} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau;$$

$$Q_{4n}^{II} = \frac{l_2^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} \cdot \frac{1}{1 + \mu} N_n;$$

$$Q_{4b}^{II} = \frac{l_2^{II}}{l_2^{II} + l_4^{II}} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_b.$$

Соответственно для переднеприводной

$$F_{1\tau}^{II} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_\tau; \quad Q_{2\tau}^{II} = \frac{k_2}{k_2 - 1} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau;$$

$$Q_{4\tau}^{II} = \frac{1}{k_2 - 1} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_\tau$$

и заднеприводной схем:

$$F_{1\tau}^{\Pi} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} N_{\tau}; \quad Q_{2\tau}^{\Pi} = \frac{k_2}{1 - k_2} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_{\tau};$$

$$Q_{4\tau}^{\Pi} = \frac{1}{1 - k_2} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} N_{\tau}.$$

Аналогичным методом определяется результирующая движущая сила для остальных структурных схем трехколесного экипажа (рис. 2, варианты а-2, а-3, а-4, б-2, б-3, б-4).

### Выводы

Предложена на основе нелинейных уравнений Эйлера–Лагранжа детерминированная математическая модель кинетики трехколесного экипажа при различных режимах движения в пространстве по криволинейной трассе. Предложена в классе спирально-винтовых линий детерминированная математическая модель кинематики трехколесного экипажа в виде годографа при равномерном, ускоренном, замедленном режимах движения по участкам трассы: прямолинейному, горизонтальному; при подъеме или уклоне в вертикальной плоскости; при повороте в горизонтальной плоскости. Предложен на основе уравнений кинестатики аналитический метод определения контактных движущих/управляющих сил колесного экипажа в динамике для структурных схем, имеющих три опорные точки, с учетом признака ведущего-ведомого колеса: полноприводной, переднеприводной и заднеприводной.

### Литература

1. Hachaturov A.A. Dynamics of «road-tire-vehicle-driver» system / A.A. Hachaturov, V.L. Afanasiev, V.S. Vasiliev. – М.: Mashinostroyeniye, 1976. – 535 p.
2. Martynyuk A.A. Dynamics and sustainability of transport vehicle wheelset movement / A.A. Martynyuk, L.G. Lobas, N.V. Nikitina. – К.: Tekhnika, 1981. – 223 p.
3. Kravets V.V. Evaluation of the Centrifugal, Coriolis and Gyroscopic Forces on a Railroad Vehicle Moving at High Speed / V.V. Kravets, T.V. Kravets. // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, No. 1. – P. 101–109.
4. Igdalov I.M. Rocket as a controlled object / I.M. Igdalov, L.D. Kuchma, N.V. Poliakov,

- Yu.D. Sheptun. – Dnipropetrovsk: ARTpress, 2004. – 544 p.
5. Kravets T.V. Control forces and moments determining in the process of asymmetric aircraft along program trajectory of complex spatial configuration / T.V. Kravets // Technical Mechanics. – 2003. – No. 1. – P. 60–65.
  6. Beshta O. Control of tandem-type two-wheel vehicle at various motion modes along spatial curved lay of line / O. Beshta, V. Kravets, K. Bas et al. // Power Engineering, Control and Information Technologies in Geotechnical Systems, Taylor and Francis Group. – London, 2015. – P. 27–32.
  7. Кравец В.В. Управляемость двухколесного тандемного экипажа на криволинейной трассе / В.В. Кравец, К.М. Басс, Т.В. Кравец, Н.С. Зубарев // Новітні шляхи створення, технічної експлуатації, ремонту і сервісу автомобілів: збірник тез доповідей науково-практичної конференції – Одеса-Коблево: Військова академія, 2015. – С. 114–117.
  8. Gerasiuta N.F. Flight dynamics. Key tasks of dynamic design of rockets / N.F. Gerasiuta, A.V. Novikov, M.G. Beletskaya. – Dnipropetrovsk: M.K. Yangel State Design Office «Yuzhnoe». 1998. – 366 p.
  9. Kravets V.V. Dynamic Design of Ground Transport With the Help of Computation Experiment / V.V. Kravets, K.M. Bass, T.V. Kravets, L.A. Tokar // Mechanics, Materials Science and Engineering, October 2015 – ISSN 2412-5954, MMSE Journal. Open Access [www.mmse.xyz](http://www.mmse.xyz). DOI 10.13140/RG.2.1.2466.6643.
  10. Kravets V. Mathematical model of a path and hodograph of surface transport / V. Kravets, T. Kravets, K. Bas, L. Tokar // Transport problems. – 2014. – P. 830–841.
  11. Lobas L.G. Theoretical mechanics / L.G. Lobas, G. Lobas Lyudm. – К.: DETUT, 2009. – 407 p.
  12. Банников В.А. Оценка угла развала управляемого ведущего колеса автомобиля / В.А. Банников, В.Г. Вербицкий // Сучасні автомобільні розробки України. – 2015. – С. 151–155.

Рецензент: А.В. Бажинов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 23 мая 2016 г.