

УДК 62-752.2

ВИЗНАЧЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАСИ ПАСИВНОГО ДИНАМІЧНОГО ГАСНИКА З ДОДАТКОВОЮ МЕХАНІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

І.І. Сидоренко, проф., д.т.н., А.В. Ткачов, доц., к.т.н., О.А. Ткачов, к.т.н.,
Одеський національний політехнічний університет

Анотація. Проведено математичне моделювання вільних коливань маси гасників з розширеною структурою. Виконано порівняльний аналіз коливальних процесів в одномасовій лінійній та нелінійній системах при кінематичному збурюванні. Побудовано скелетні криві, що відображають основні властивості нелінійних пасивних динамічних гасників коливань.

Ключові слова: вільні коливання, динамічна характеристика, коливальний процес, нелінійна система, скелетні криві, додаткова механічна структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАССЫ ПАССИВНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

І.І. Сидоренко, проф., д.т.н., А.В. Ткачев, доц., к.т.н., А.А. Ткачев, к.т.н.,
Одесский национальный политехнический университет

Аннотация. Проведено математическое моделирование свободных колебаний массы гасителей с расширенной структурой. Выполнен сравнительный анализ колебательных процессов в одномассовой линейной и нелинейной системах при кинематическом возмущении. Построены скелетные кривые, отражающие основные свойства нелинейных пассивных динамических гасителей колебаний.

Ключевые слова: свободные колебания, динамическая характеристика, колебательный процесс, нелинейная система, скелетные кривые, дополнительная механическая структура.

DETERMINATION OF FREE VIBRATIONS OF MASSES OF THE PASSIVE DYNAMIC ABSORBER WITH AN ADDITIONAL MECHANICAL STRUCTURE

I. Sidorenko, Prof., D. Sc. (Eng.), A. Tkachiov, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),
A. Tkachiov, Ph. D. (Eng.), Odessa National Polytechnic University

Abstract. Mathematical modeling of free vibrations of masses of dampers with an extended structure is conducted. Comparative analysis of oscillatory processes in single-mass linear and nonlinear systems with kinematic perturbations is carried out. Skeletal curves reflecting the basic properties of nonlinear passive dynamic dampers are built.

Key words: free vibrations, dynamic characteristic, oscillating process, nonlinear system, skeletal curves, additional mechanical structure.

Вступ

Вивчення вільних коливань системи викликає великий інтерес вже тому, що їхні характеристики відображають основні залежності механічної системи, що досліджується, і ма-

ють першорядне значення при аналізі вимушених коливань системи. Вибір методів математичного дослідження вільних коливань маси пасивних динамічних гасників коливань з додатковою механічною структурою (ПДГК із ДМС) залежить від виду його ди-

намічних характеристик, характеру збурювальних впливів, необхідної частоти налаштування. Враховуючи, що нелінійність динамічної характеристики є невід'ємною ознакою ПДГК із ДМС, завдання математичного дослідження повинні вирішуватися у нелінійній постановці.

Аналіз публікацій

Дослідження динаміки механічної системи в нелінійній постановці передбачає вивчення всіх можливих режимів руху за різних фізично реалізованих значень параметрів [4]. Здійснення такої програми для систем складної структури являє досить важку самостійну задачу теорії коливань. Тому в технічних додатках обмежуються локальними рішеннями, отриманими під час вивчення поведінки системи в типових розрахункових режимах руху, зокрема стаціонарному, періодичному [3], [5].

Мета і постановка завдання

Метою проведених досліджень є математичне вивчення вільних коливань одномасової механічної системи у вигляді нелінійної ПДГК із ДМС зі встановленням взаємозв'язку між амплітудами і частотами коливального процесу, що відображають основні властивості нелінійних ПДГК із ДМС і є основою для подальшого аналізу вимушених коливань механічних систем і оцінювання ефективності їхнього динамічного гасіння.

Визначення вільних коливань та побудова скелетних кривих

Нелінійність динамічних характеристик ПДГК із ДМС зумовлює специфіку дослідження їх властивостей. Так, під час розгляду власних коливань шляхом порівняльного аналізу коливальних процесів в одномасовій лінійній та нелінійній системах при кінематичному збурюванні встановлено, що частота коливань залежить від величини амплітуди. Проілюструємо це таким прикладом. Диференціальне рівняння руху для одномасової системи має вигляд

$$m\ddot{x} + F(x) + b\dot{x} = 0, \quad (1)$$

де m – маса гасника; $F(x)$ – динамічна характеристика гасника; b – коефіцієнт дисипації; x – пружне переміщення; \dot{x} і \ddot{x} – відповідні похідні від пружного переміщення за часом t .

З урахуванням результатів попередніх досліджень для ПДГК із лінійною динамічною характеристикою, рівняння (1) має вигляд

$$m_{\alpha x}\ddot{x} + c_3(x) + \frac{\bar{\Psi}_{\Sigma}^* \cdot c_3}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \dot{x} = 0, \quad (2)$$

де c_3 – коефіцієнт зведеної жорсткості пружних елементів ПДГК; $\bar{\Psi}_{\Sigma}^*$ – коефіцієнт поглинання, зумовлений наявністю у ПДГК циліндричних витих пружин і напрямних кочення.

Під час дослідження коливальних процесів у нелінійних системах зазвичай вважають, що їх характеристика залежить тільки від першої та третьої ступенів пружної деформації й може бути описана кубічною функцією. Але попередньо проведені дослідження показують, що за допомогою запропонованих пристроїв реалізується характеристика, яка залежить і від більших ступенів пружної деформації. Саме тому як дослідні зразки розглянемо ПДГК із ДМС із кубічно-нелінійною динамічною характеристикою «м'якого» виду та з нелінійною комбінованою характеристикою [1], [2].

З урахуванням цього, рівняння (1) для кожного зі зразків має вигляд:

– для зразка з «м'якою» динамічною характеристикою:

$$m_{\alpha x}\ddot{x} - (0,0012 \cdot x^3 + 0,0781 \cdot x^2 + 4,51 \cdot x + 1,02) + \frac{\bar{\Psi}_{\Sigma}^{**} \cdot c(x)}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \dot{x} = 0; \quad (3)$$

– для зразка з нелінійною комбінованою характеристикою:

$$m_{\alpha x}\ddot{x} - (10^{-6} \cdot x^5 + 10^{-6} \cdot x^4 - 0,0027 \cdot x^3 + 2 \cdot 10^{-13} \cdot x^2 + 2,5 \cdot x - 3 \cdot 10^{-6}) + \frac{\bar{\Psi}_{\Sigma}^{**} \cdot c(x)}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \dot{x} = 0, \quad (4)$$

де $c(x)$ – коефіцієнт зведеної жорсткості пружних елементів ПДГК із ДМС; $\bar{\Psi}_{\Sigma}^{**}$ – коефіцієнт поглинання, зумовлений наявністю у ПДГК циліндричних витих пружин, напрямних кочення, додаткової механічної структури у вигляді шарнірно-важільного механізму.

Встановимо значення постійного коефіцієнта для лінійного ПДГК $c_3 = 6,67$ Н/мм для того, щоб значення динамічних характеристик лінійного ПДГК і нелінійного ПДГК із ДМС на границі розрахункового діапазону переміщень $x(t)$ були однаковими й зумовили приблизно однакові амплітуди коливань.

Чисельне розв'язання диференціальних рівнянь (2) і (3) виконано за умови, що обидві системи мали кінематичне збурювання від положення пружної рівноваги. Результати розв'язання рівнянь при $m = 1$ кг і за початкових умов $x(0) = 40$ мм і $\dot{x}(0) = 0$ вказують на суттєві відмінності коливальних процесів у лінійному ПДГК і нелінійному ПДГК із ДМС (рис. 1).

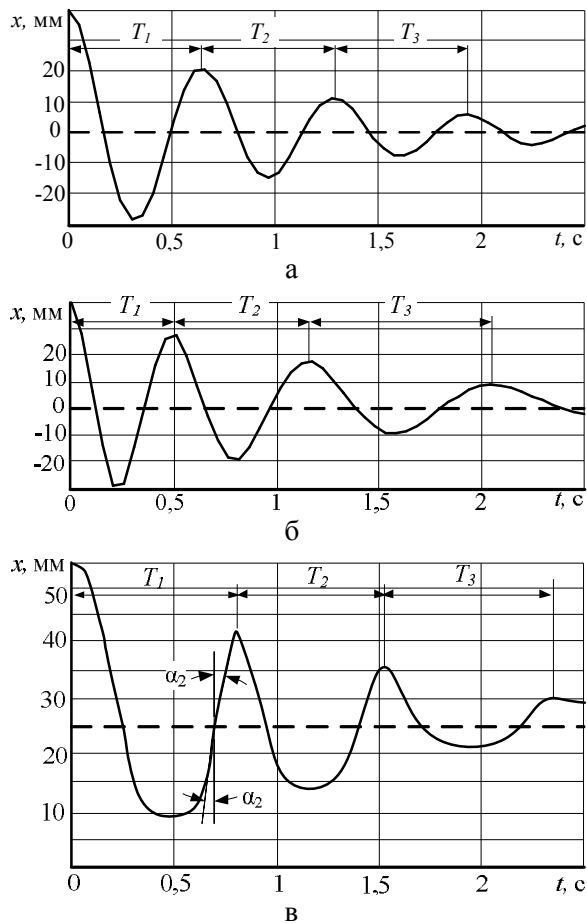


Рис. 1. Графіки коливального процесу при кінематичному збурюванні: лінійної системи (а); системи з м'якою динамічною характеристикою (б); системи із нелінійною комбінованою характеристикою (в)

Для ПДГК із лінійною динамічною характеристикою (рис. 1, а) можна відзначити, що період коливань не залежить від величини

амплітуди ($T_1 = T_2 = T_3$) і визначається постійною частотою власних коливань ω_0

$$T = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{c_3}}}, \quad c_3 = \frac{dF}{dx} = \text{const}. \quad (5)$$

У ПДГК із ДМС із «м'якою» динамічною характеристикою, як і в будь-якій іншій нелінійній системі, коефіцієнт зведеної жорсткості залежить від амплітуди, оскільки $c(x) = dF(x)/dx \neq \text{const}$, що і визначає змінне значення частоти вільних коливань ω_0 . Саме тому коливальний процес у ПДГК із ДМС із м'якою динамічною характеристикою має змінний період ($T_1 \neq T_2 \neq T_3$), значення якого залежить від величини амплітуди (рис. 1, б).

Якщо розглянути коливальний процес ПДГК із ДМС із комбінованою динамічною характеристикою, то цей процес зумовлює не тільки зміну періоду, але і форми коливань ($\alpha_1 \neq \alpha_2$). Про це свідчать результати розв'язання рівняння (4) при $m = 1$ кг і за початкових умов: $x(0)=70$ мм і $\dot{x}(0)=0$ (рис. 1, в).

Враховуючи, що величина амплітуди коливань маси ПДГК є одним з найважливіших факторів, що характеризує загальний коливальний процес системи і визначає ефективність динамічного гасіння за допомогою запропонованих пристроїв, то встановлення функціонального взаємозв'язку між амплітудами і частотами коливань у цьому випадку є актуальною науковою задачею.

Взаємозв'язок між амплітудою і частотою коливань нелінійної механічної системи найбільш ефективно визначається побудовою скелетної кривої [3]. При її побудові будемо вважати, що коливна система, що розглядається, є консервативною, тертя в системі відсутнє, а динамічна характеристика подана ітераційним поліномом. Відповідне рівняння вільних коливань в узагальнених координатах у такому випадку має вигляд

$$\ddot{x} + \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i = 0. \quad (6)$$

Позначимо через x_0 найбільше відхилення об'єкта вниз від положення статичної рівноваги. Оскільки в початковий момент часу, при якому $x = x_0$ швидкість переміщення

$\dot{x}=0$, то перший інтеграл рівняння (6) має вигляд

$$\dot{x} = \sqrt{2 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{i+1} (x_0^{i+1} - x^{i+1})}. \quad (7)$$

Щоб обчислити координату x_1 , відповідну крайньому верхньому положенню об'єкта, дорівнюємо до нуля вираз під знаком кореня. Розділивши отримане рівняння на $x_0 - x$, отримано рівняння відносно x_1

$$\sum_{i=0}^N e_i \cdot x_i = 0$$

$$e_i = \frac{a_i}{i+1} + e_{i+1} \cdot x_0; \quad e_N = \frac{e_N}{N+1}; \quad (8)$$

$$i = N-1, \dots, 1; \quad e_0 = e_1 \cdot x_0.$$

Амплітуда вільних коливань дорівнює половині розмаху

$$A = \frac{x_0 - x_1}{2}, \quad (9)$$

а зсув центру коливань відносно положення статичної рівноваги

$$S = \frac{x_0 + x_1}{2}. \quad (10)$$

Для періоду вільних коливань знаходимо

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_0} \Phi(x) dx \quad (11)$$

$$\Phi(x) = \left[\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{i+1} \cdot (x_0^{i+1} - x^{i+1}) \right]^{-0,5}.$$

Під час вивчення вільних коливань велику зацікавленість викликає тимчасова несиметричність процесу. Для цього потрібно обчислити інтеграли

$$t_1 = \sqrt{2} \int_0^{x_0} \Phi(x) dx; \quad (12)$$

$$t_2 = \sqrt{2} \int_0^{x_1} \Phi(x) dx,$$

де t_1 і t_2 – відповідно час руху об'єкта від положення статичної рівноваги у крайнє нижнє

положення, крайнє верхнє положення і назад. Тоді період коливань

$$T = t_1 + t_2. \quad (13)$$

Застосування звичайних формул чисельного інтегрування вищенаведених невластивих інтегралів є неможливим, оскільки підінтегральний вираз в точках, що визначають зміну напрямку руху x_0 і x_1 , обертається в нескінченність, що зумовлює велику помилку інтегрування. Щоб уникнути цього, рекомендують замінити вираз (10) квадратурною формулою найвищої точності [3]. Дотримуючись вказаних рекомендацій, подамо $\Phi(x)$ у такому вигляді

$$\Phi(x) = (x - x_0)^{-0,5} \cdot (x - x_1)^{-0,5} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x_i \right)^{-0,5}$$

$$\alpha_i = e_{i+1} + \alpha_{i+1} \cdot x_1; \quad \alpha_{N-1} = e_N; \quad i = N-2, \dots, 0. \quad (14)$$

Використовуючи лінійне перетворення

$$x = 0,5 \cdot (x_0 + x_1) + 0,5 \cdot (x_0 - x_1) \cdot x = S + A \cdot x, \quad (15)$$

зведемо відрізок інтегрування $[x_1, x_0]$ у рівнянні (11) до стандартного відрізка $[-1, 1]$. Виконавши необхідні математичні перетворення, отримаємо ортогональну систему многочленів на відрізку $[-1, 1]$ з відповідною ваговою функцією $\rho(x) = (1 - x^2)^{-0,5}$, що відповідає системі многочленів Чебишева першого роду. Квадратурна формула найвищої алгебраїчної точності для періоду коливань буде мати вигляд

$$T = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{n} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \left(S + A \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n}\right) \cdot \pi \right)^i}} + R(T), \quad (15)$$

де $R(T)$ – залишковий член, найменша величина якого регламентує вибір вузлів інтерполяції.

У результаті проведених розрахунків були отримані скелетні криві для ПДГК із ДМС. У разі реалізації пристроєм динамічних характеристик у вигляді «м'якої» і «жорсткої» нелінійностей відповідні скелетні криві дозво-

ляють виявити нелінійне збільшення частоти вільних коливань зі зростанням амплітуди при нелінійності «жорсткого» виду (крива 1 на рис. 2, а) і нелінійне зменшення частоти при нелінійності «м'якого» виду (крива 2 на рис. 2, а). Варіюючи коефіцієнт зведеної жорсткості пружного зв'язку, шляхом зміни геометричних параметрів елементів додаткової механічної структури можна отримати відповідний зсув скелетної кривої в частотному діапазоні, що розглядається. При цьому форма скелетної кривої не змінюється.

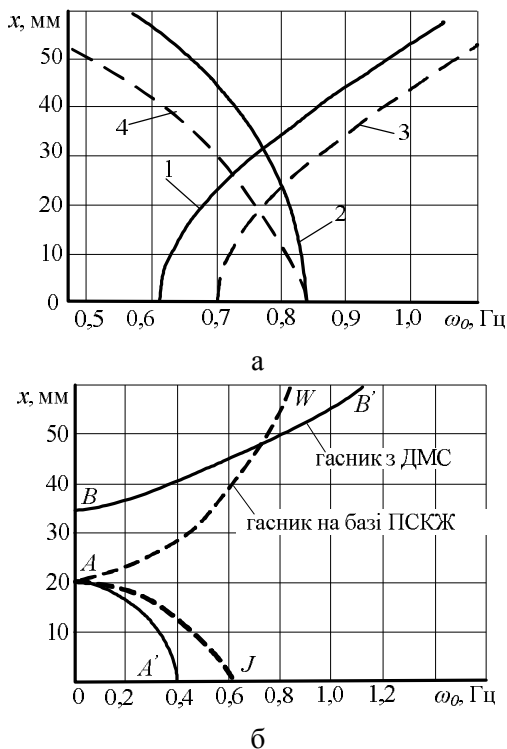


Рис. 2. Скелетні криві: для ПДГК із ДМС із «м'якою» та «жорсткою» динамічними характеристиками (а); для ПДГК із ДМС із комбінованою динамічною характеристикою (б)

Наприклад, за збільшення коефіцієнта наведеної жорсткості в системі з нелінійністю «жорсткого» виду, її скелетна крива зміщується в область високих частот (крива 3 на рис. 2, а). У випадку, коли варіювання конструктивних параметрів додаткової механічної структури призводить до зміни величини, яка визначає нахил динамічної характеристики, відповідно змінюється і нахил скелетної кривої. Наприклад, збільшення цього параметра для системи з кубічною нелінійністю «м'якого» виду приводить до більш інтенсивного зниження частоти вільних коливань за зростання амплітуди (крива 4 на рис. 2, а).

Розглянемо скелетну криву, що відповідає системі при реалізації ПДГК із ДМС динамічних характеристик з комбінованою нелінійністю. Як зазначено в деяких джерелах, подібну динамічну характеристику можна реалізувати, застосовуючи як пружний зв'язок гасника пружний зв'язок, що реалізується у пружних системах із квазінульовою жорсткістю (ПСКЖ). Проведені розрахунки показують відмінність скелетних кривих для таких систем (суцільна і штрихова криві на рис. 2, б), на яких залежно від величини амплітуди можна виділити як подібні, так і різні ділянки. На першій ділянці, відповідній діапазону амплітуд $A \in [0; 20]$ мм, в системах, що розглядаються, відбувається нелінійне зменшення частоти вільних коливань. Подібна зміна частоти спостерігається і у ПДГК із ДМС із нелінійною динамічною характеристикою «м'якого» виду. За подальшого збільшення амплітуди (більше 20 мм) скелетні криві мають істотну відмінність, хоча відповідають однаковому стану систем. Отже, необхідно дослідити вплив квазінульової жорсткості на частоту вільних коливань. Так, для гасників, побудованих на базі ПСКЖ, взаємозв'язок між амплітудою і частотою виявляється у вигляді точки квазінульової частоти A . Фактично вказана точка відповідає чітко визначеному конструктивним параметрам пристрою значенню амплітуди (точці «спрацьовування»), за якого відбувається зміна напрямку деформації пружних елементів у такому гаснику. На відміну від гасників, побудованих на базі ПСКЖ, у системі, яка містить ПДГК із ДМС, дійсно можна реалізувати ділянку квазінульової частоти вільних коливань AB . Величину цієї ділянки визначає стрибкоподібна зміна амплітуди коливання з точки у точку, причому варіювання конструктивних параметрів додаткової механічної структури дозволяє змінювати як величину вказаної ділянки, так і її положення в діапазоні амплітуд.

За подальшого збільшення амплітуди в обох розглянутих системах відбувається нелінійне зростання частоти вільних коливань (ділянки AW і BB').

Висновки

У результаті проведених математичних досліджень розглянуто коливальний процес маси ПДГК із ДМС із кубічно-нелінійною та комбінованою динамічними характеристиками.

ми із побудовою скелетних кривих. При цьому аналіз результатів розрахунку скелетних кривих показав, що для ПДГК із ДМС, у яких динамічна характеристика має одну комбіновану ділянку, можна виявити притаманну тільки таким ПДГК із ДМС здатність забезпечувати ділянку квазінульової та комбінованої частот вільних коливань, що дозволяє припустити можливість зміни форми резонансних коливань у бік їхнього зменшення без використання спеціальних демпфірувальних пристроїв.

Описана методика побудови скелетних кривих застосовна для пасивних динамічних гасників коливань з різними нелінійними динамічними характеристиками, незалежно від того, якими конструкціями ПДГК вони реалізовані.

Література

1. Сидоренко І.І. Динамічні характеристики пружинного погашувача коливань розширеної структури / І.І. Сидоренко, О.А. Ткачов, К.Г. Мосієнко // Праці Одес. політехн. ун-ту. – 2013. – Вип. 1_(40). – С. 54–59.
2. Сидоренко І. І. Динамічні характеристики пружинного погашувача коливань з структурою, розширеною кулачковим механізмом / І.І. Сидоренко, Г.Б. Параско, О. А. Ткачов // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. – 2014. – Вип. 1 (209). – С. 16–21.
3. Алабужев П.М. Виброзащитные системы с квазиулево́й жесткостью / П.М. Алабужев, А.А. Гритчин, И.И. Ким. – Л.: Машиностроение, 1986. – 96 с.
4. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1966. – 320 с.
5. Корнев Б.Г. Динамические гасители колебаний: теория и технические приложения / Б. Г. Корнев, Л. М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

Рецензент: М.А. Подригало, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 21 квітня 2016 р.
